

Résolution approchée d'équations différentielles

On se pose la question de représenter les solutions approchées d'une équation différentielle de la forme

$$Y(t_0) = y_0 \quad \forall t \in I, \quad Y'(t) = \mathcal{E}(Y(t), t)$$

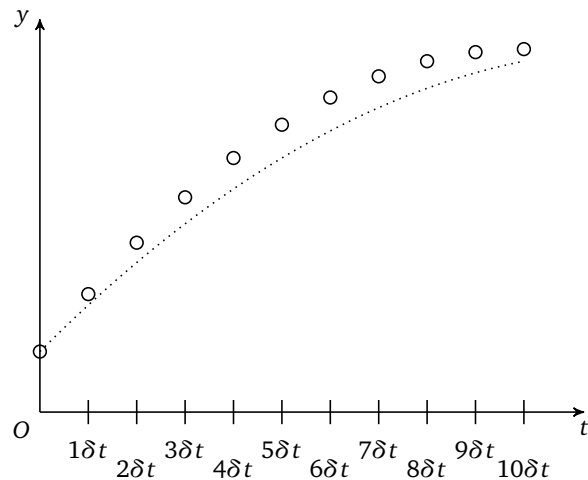
où

- Y est une fonction inconnue d'une variable t qui varie dans un intervalle I ;
- t_0 est l'instant initial (bien sûr $t_0 \in I$);
- \mathcal{E} est une fonction représentant l'équation différentielle.

Pour simplifier on prendra dans la suite $t_0 = 0$ et I de la forme $[0 ; T]$.

1 — Principe d'un schéma numérique

On cherche à déterminer une valeur approchée d'une solution de l'équation différentielle. Pour cela, on fixe un nombre N d'intervalles de temps, puis on choisit $N + 1$ instants répartis entre 0 et T . Le plus simple est répartir ces instants uniformément dans $[0 ; T]$: on calcule le pas de temps $\delta t = T/N$ et on considère les instants $0, \delta t, 2\delta t, \text{etc.}$ jusqu'à $N\delta t = T$.



On cherche donc à déterminer une liste Y des $N + 1$ valeurs approchées de Y aux instants $(n\delta t)_{0 \leq n \leq N}$. La première valeur de la liste est bien sûr la condition initiale de l'équation différentielle.

Le principe d'un schéma numérique est de calculer chaque valeur de la liste Y à partir des valeurs précédentes, en utilisant la fonction \mathcal{E} définissant l'équation différentielle.

Pour évaluer la qualité de la méthode employée, on évalue l'erreur commise, c'est-à-dire la valeur maximale des erreurs $|Y[n] - Y(n\delta t)|$. Si la méthode est correcte, cette erreur doit tendre vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$. Nous n'aborderons pas cette problématique ici, mais les méthodes présentées sont bien convergentes.

EXERCICE 1 SCHÉMA D'EULER EXPLICITE - É.D. D'ORDRE UN

Le schéma d'Euler explicite associé à l'équation différentielle est donnée par les relation de récurrence

$$Y[0] = y_0 \\ \forall n \in \llbracket 0 ; N - 1 \rrbracket, \quad Y[n + 1] = Y[n] + \delta t \times \mathcal{E}(Y[n], n\delta t)$$

C'est l'équivalent du développement limité d'ordre 1 de la fonction en $n\delta t$ qui s'écrit

$$Y(n\delta t + \delta t) = Y(n\delta t) + \delta t \times Y'(n\delta t) + o(\delta t) \\ \simeq Y(n\delta t) + \delta t \times \mathcal{E}(Y(n\delta t), n\delta t)$$

1. Implémenter en Python une fonction `EulerExplicite1(y0, T, N)` qui renvoie la solution approchée de l'équation différentielle du premier ordre

$$y' = y \quad \text{et} \quad y(0) = y_0$$

Représenter la solution approchée et la solution exacte. Tester cette fonction avec différentes valeurs de N et commenter.

2. Autre équation différentielle :

$$y' = t \times (1 - y^2) \quad \text{et} \quad y(0) = 0$$

Solution exacte : $y(t) = 1 - \frac{2}{1 + e^{t^2}}$.

On peut démontrer que dans la méthode d'Euler l'erreur commise au point t_n est de l'ordre de $n \times (\delta t)^2$. L'erreur finale est donc $N \times T^2/N^2 = T^2/N$. La méthode d'Euler est qualifiée de « méthode d'ordre un ».

EXERCICE 2 CAS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE DEUX

Pour approcher numériquement des équations différentielles d'ordre 2, comme par exemple

$$\begin{aligned} \text{équation du pendule} \quad & y''(t) = -\sin(y(t)) \\ & y(0) = y_0 \quad \text{et} \quad y'(0) = v_0 \end{aligned}$$

on introduit un système de deux équations différentielles d'ordre un, d'inconnues $y_1 = y$ et $y_2 = y'$.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} y_1(t) = y_2(t) \\ \frac{d}{dt} y_2(t) = -\sin(y_1(t)) \end{cases} \quad y_1(0) = y_0 \quad \text{et} \quad y_2(0) = v_0$$

On résout ces équations à l'aide d'un schéma d'Euler. La liste représentant y_1 est nommée Y et celle représentant y_2 est nommée V .

$$\begin{aligned} & Y[0] = y_0 \quad V[0] = v_0 \\ \forall n \in \llbracket 0; N-1 \rrbracket, \quad & \begin{cases} Y[n+1] = Y[n] + \delta t \times V[n] \\ V[n+1] = V[n] + \delta t \times \sin(V[n]) \end{cases} \end{aligned}$$

1. Implémenter un schéma d'Euler explicite qui approche numériquement l'équation du pendule.

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\sin(y) \quad y(0) = y_0 \quad y'(0) = 0$$

On implémentera une fonction `EulerExplicite2(y0, v0, T, N)` qui renverra la liste des valeurs de y entre 0 et T .

2. Représenter la solution approchée et la solution exacte $y_0 \times \cos(t)$. Commentez.

2 — Une méthode d'ordre supérieur

EXERCICE 3 SCHÉMA PRÉDICTEUR-CORRECTEUR EXPLICITE

Dans un schéma prédicteur-correcteur explicite, on résout une équation différentielle d'ordre un en introduisant un point intermédiaire pour évaluer la dérivée de y

$$\begin{aligned} & Y[0] = y_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad & M[n+1] = Y[n] + \frac{1}{2} \delta t \times \mathcal{E}(Y[n], n\delta t) \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad & Y[n+1] = Y[n] + \delta t \times \mathcal{E}\left(M[n], n\delta t + \frac{1}{2} \delta t\right) \end{aligned}$$

L'écart au point $n\delta t$ entre cette solution approchée et la solution exacte est alors de l'ordre de $n \times (\delta t)^3$. Nous avons donc là une méthode d'ordre 2 plus précise que la méthode d'Euler.

1. *É.d. d'ordre 2* Implémenter un schéma prédicteur-correcteur explicite qui approche numériquement l'équation du pendule

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\sin(y) \quad y(0) = y_0 \quad y'(0) = 0$$

On implémentera une fonction `PredicteurCorrecteur(y0, v0, T, N)` qui renverra la liste des valeurs de y entre 0 et T .

Vous justifierez votre choix de T .

2. *Recherche de la pseudo-période* On appelle pics d'une liste L les valeurs de la liste qui sont plus grandes que leurs deux voisins immédiats. La « période » de la liste est alors définie comme la distance moyenne entre deux indices de pics.
 - a) Écrire une fonction `periode(L)` qui renvoie une valeur approchée de la période d'une liste L passée par paramètre.
 - b) En déduire une estimation de la période T de la trajectoire du pendule. Représenter le graphe de T en fonction de la position initiale y_0 et commenter.

3 — Étude d'un modèle numérique

EXERCICE 4 MODÈLE PROIES-PRÉDATEURS DE LOTKA-VOLETRRA

Les équations de Lotka-Volterra sont utilisées pour décrire la dynamique de systèmes biologiques dans lesquels une population de « prédateurs » et de « proies » interagissent.

Alfred Lotka propose ces équations en 1920, en se basant sur un modèle de population plante/herbivore. Vito Volterra les étudie indépendamment en 1926 et compare leur solution à des relevés de pêche en mer Adriatique.

Elles modélisent un éco-système avec une population x_1 de « proies » et une population x_2 de « prédateurs ». Elles s'écrivent

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t)(\alpha - \beta x_2(t)) \\ x_2'(t) = -x_2(t)(\gamma - \delta x_1(t)) \end{cases}$$

1. En considérant le cas $\beta = \delta = 0$, donnez une interprétation des constantes α et γ . Cela vous semble-t-il réaliste?
2. Donnez une interprétation des constantes β et δ .
3. Implémenter une méthode de résolution approchée de ces équations et représenter graphiquement des solutions.
On prendra $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $\gamma = 1.5$ et $\delta = 0.5$. De plus $x_1(0) = 1$ et $x_2(0) = 0.5$ en unités arbitraires.
4. Ce système d'équations est utilisé comme modèle pour la dynamique du lynx et du lièvre des neiges. On dispose pour cela du relevé des achats de peaux par la Compagnie de la baie d'Hudson, tout au long du XIX^{ème} siècle. On admet que ces relevés reflètent l'évolution des populations de ces deux espèces.

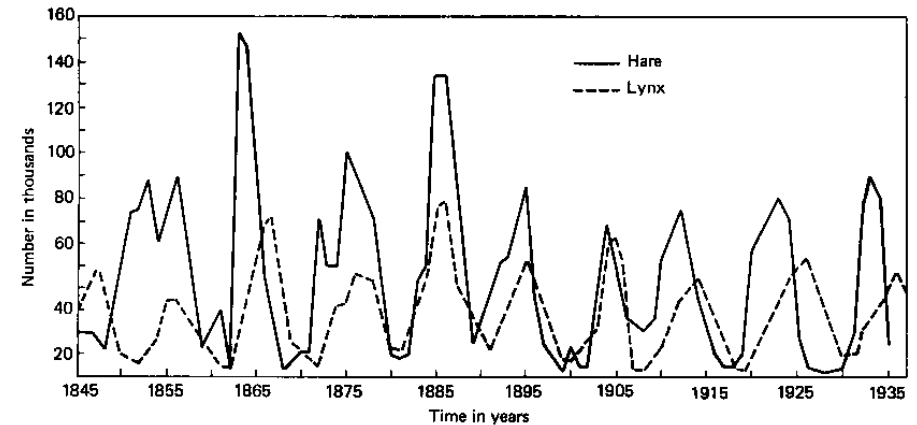


Figure 9-3. Changes in the abundance of the lynx and the snowshoe hare, as indicated by the number of pelts received by the Hudson's Bay Company. This is a classic case of cyclic oscillation in population density. (Redrawn from MacLulich 1937.)

- En quoi les résultats que vous avez obtenu s'accordent-ils avec ces données statistiques?
5. En utilisant plusieurs conditions initiales, représenter le diagramme de phase, c'est-à-dire la courbe d'équations $(x_1(t), x_2(t))$. Déterminer empiriquement les coordonnées du point d'équilibre, c'est-à-dire la valeur de (x_1, x_2) pour lesquels le système n'évolue pas. Confirmez votre résultat par un calcul exact.