Vecteurs aléatoires

Notations du chapitre — *Dans tout ce chapitre,* $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ *est un espace probabilisé.*

I — Couple de variables aléatoires, lois

Définition 1.1 — Couple de variables aléatoires

On appelle ***couple de variables aléatoires réelles*** *la donnée de deux variables aléatoires* X *et* Y *sur le même espace probabilisé* $(\Omega, \mathscr{T}, P)$.

On parle aussi de ***vecteur aléatoire réel****, noté* (X, Y).

Définition 1.2 — Loi conjointe, lois marginales

Soit (X, Y) *un vecteur aléatoire. On note*

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \qquad \text{et} \qquad Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}.$$

- *On appelle* ***loi conjointe*** *de* X *et de* Y *la famille de réels*

$$\forall i \in [\![1 ; n]\!], \ \forall j \in [\![1 ; m]\!], \qquad P\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big)$$

- *On appelle* ***loi marginale*** *de* X *la loi de la variable aléatoire (et de même « loi marginale de* Y *»).*

Propriété 1.3 — Lien entre loi conjointe et loi marginale

D'après la formule des probabilités totales sur le système complet d'évènements $(Y = y_j)_{1 \leqslant j \leqslant m}$

$$\forall i \in [\![1 ; n]\!], \qquad P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} P(X = x_i \cap Y = y_j)$$

De même pour la loi marginale suivant Y

$$\forall j \in [\![1 ; m]\!], \qquad P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i \cap Y = y_j)$$

Propriété 1.4 — Somme des coefficients

Avec les notations précédentes

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} P\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} P(Y = y_j) = 1$$

II — Loi conditionnelle, indépendance de deux variables aléatoires

Définition 2.1 — Lois conditionnées

*Soit (X,Y) un vecteur aléatoire et $x \in X(\Omega)$ tel que $P(X=x) \neq 0$. On appelle **loi de Y conditionnée par l'évènement $(X=x)$**s la famille de réels*

$$\forall j \in [\![1\,;m]\!], \qquad P_{(X=x)}(Y=y_j) = \frac{P\big((X=x)\cap(Y=y_j)\big)}{P(X=x)}$$

*De même, on définit la **loi de X conditionnée par l'évènement $(Y=y)$** tel que $P(Y=y)\neq 0$.*

Définition 2.2 — Couple de variables aléatoires indépendantes

*On dit que deux variables aléatoires X et Y sont **indépendantes** si et seulement si*

$$\forall x \in X(\Omega),\ \ \forall y \in Y(\Omega), \qquad P(X=x\cap Y=y) = P(X=x)\times P(Y=y)$$

Propriété 2.3 — *Si deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes alors les lois de X conditionnées aux évènements $(Y=y)$ sont identiques à la loi de X (et de même pour Y).*

Propriété 2.4 — Fonctions de deux variables aléatoires indépendantes

Soit X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Alors les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

III — Fonction de deux variables aléatoires

Propriété 3.1 — *Soit (X,Y) un vecteur aléatoire, g une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $Z=g(X,Y)$. On note*

$$X(\Omega)=\{x_1,x_2,\dots,x_n\} \qquad \text{et} \qquad Y(\Omega)=\{y_1,y_2,\dots,y_m\}$$

Le support de Z est alors

$$Z(\Omega)=\Big\{g(x_i,y_j)\ ;\ i\in[\![1\,;n]\!], j\in[\![1\,;m]\!]\Big\}.$$

et la loi de Z est donnée par la formule

$$\forall z\in Z(\Omega), \qquad P(Z=z)=\sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ y\in Y(\Omega)\\ g(x,y)=z}} P(X=x\cap Y=y)$$

Si X et Y sont indépendantes, on a plus simplement

$$\forall z\in Z(\Omega), \quad P(Z=z)=\sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ y\in Y(\Omega)\\ g(x,y)=z}} P(X=x)\,P(Y=y)$$

Théorème 3.2 — Formule de transfert

Soit (X,Y) un vecteur aléatoire, g une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et $Z=g(X,Y)$.

$$E(Z)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} g(x_i,y_j)\,P(X=x_i\cap Y=y_j)$$

Théorème 3.3 — Linéarité de l'espérance
Soit (X, Y) un vecteur aléatoire et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y) \tag{I.1}$$

Proposition 3.4 — *Soit (X, Y) un vecteur aléatoire.*
Si X et Y sont indépendantes, alors $E(XY) = E(X) \times E(Y)$.

IV — Covariance, coefficient de corrélation linéaire

Définition 4.1 — Covariance de deux variables aléatoires
Soit X et Y deux variables aléatoires.
On appelle ***covariance*** *de X et Y le réel*

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(X, Y) &= E\Big[\big(X - E(X)\big) \times \big(Y - E(Y)\big)\Big] \\ &= E(XY) - E(X)\,E(Y)\end{aligned}$$

Théorème 4.2 — Covariance de deux variables aléatoires indépendantes
Si X et Y sont deux variables indépendantes, alors leur covariance est nulle.

Attention ! La réciproque est fausse !

Propriété 4.3 — Propriétés de la covariance
Soit X, Y, X_1 et X_2 des variables aléatoires et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$
- $\mathrm{cov}(X, X) = V(X)$
- $\mathrm{cov}(X, Y) = \mathrm{cov}(Y, X)$
- $\mathrm{cov}(aX, bY) = ab\,\mathrm{cov}(Y, X)$
- $\mathrm{cov}(X_1 + X_2, Y) = \mathrm{cov}(X_1, Y) + \mathrm{cov}(X_2, Y)$

Propriété 4.4 — Propriétés de la Variance
Soit X et Y deux variables aléatoires et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$
- $V(aX + bY) = a^2V(X) + b^2V(Y) + 2ab\,\mathrm{cov}(X, Y)$
- $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\,\mathrm{cov}(X, Y)$
- $V(X - Y) = V(X) + V(Y) - 2\,\mathrm{cov}(X, Y)$
- $\mathrm{cov}(X, Y) = \dfrac{1}{4}\big(V(X + Y) - V(X - Y)\big)$

V — Généralisation au cas de n variables aléatoires

Définition 5.1 — Vecteur aléatoire — n variables
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, \dots, X_n$ n variables aléatoires.
On appelle ***vecteur aléatoire*** *le n–uplet de variables aléatoires $(X_1, X_2, \dots, X_n)$.*

Théorème 5.2 — Linéarité de l'espérance — n variables
Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire, et $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$:

$$E(a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n) = a_1E(X_1) + a_2E(X_2) + \dots + a_nE(X_n)$$

Définition 5.3 — Indépendance mutuelle de plusieurs variables aléatoires

On dit que les n variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont ***mutuellement indépendantes*** *si et seulement si*

$$\begin{aligned}\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega),\\ P(X_1 = x_1 \cap X_2 = x_2 \cap \cdots \cap X_n = x_n)\\ = P(X_1 = x_1) \times P(X_2 = x_2) \times \cdots \times P(X_n = x_n)\end{aligned}$$

Propriété 5.4 — *Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors toute sous-famille de $X_1, X_2, \dots, X_n$ l'est aussi.*

Propriété 5.5 —

Soit $X_1, X_2, \dots, X_n$ n variables aléatoires mutuellement indépendantes, soit $p in [\![1 ; n]\!]$ et $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^{n-p} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Les variables aléatoires $f(X_1, X_2, \cdots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \cdots X_n)$ sont indépendantes.

Propriété 5.6 —

Soit $X_1, X_2, \dots, X_n$ n variables aléatoires mutuellement indépendantes, soit u_1, u_2, ..., u_n des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Les variables aléatoires $u_1(X_1)$, $u_2(X_2)$, ... $u_n(X_n)$ sont mutuellement indépendantes.

Théorème 5.7 — Variance de la somme de variables aléatoires mutuellement indépendantes

Si les n variables $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors

$$V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)$$