Variables aléatoires

Notations du chapitre — *$(\Omega, \mathscr{T}, P)$ est un espace probabilisé fini.*

I — Définitions

Définition 1.1 — Variable aléatoire réelle
*On appelle **variable aléatoire réelle** (en abrégé v.a.r.) toute application de Ω dans $\mathbb{R}$.*

Définition 1.2 — Support d'une variable aléatoire
*Le **support** d'une variable aléatoire X est l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs atteintes par X.*
*La variable aléatoire X est **discrète** si $X(\Omega)$ est dénombrable.*
*La variable aléatoire X est **discrète finie** si $X(\Omega)$ est fini.*
*La variable aléatoire X est **continue** si $X(\Omega)$ est indénombrable.*

Propriété 1.3 — Système complet d'évènements associé
Soit $(\Omega, \mathscr{T})$ un espace probabilisable et X un v.a.r. finie de support $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_p\}$.
*Alors $(X = x_1)$, $(X = x_2)$, ..., $(X = x_p)$ est un s.c.e. : c'est le **système complet d'évènements associé à la variable aléatoire X***

Propriété 1.4 — Fonction d'une variable aléatoire
Soit X une variable aléatoire sur Ω et g une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
Alors $g \circ X$ est une variable aléatoire, noté $g(X)$.

II — Loi de probabilité

Définition 2.1 — Loi de probabilité d'une variable aléatoire
*On appelle **loi de probabilité** d'une variable aléatoire X la donnée de*

1) *l'ensemble $X(\Omega)$;*
2) *la valeur de $P(X = x)$ pour tout réel x dans $X(\Omega)$.*

Théorème 2.2 — Définition de la loi d'une variable aléatoire
Soit $(p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$. Ces réels définissent la loi de probabilité d'une variable aléatoire si et seulement si

1) $\forall i \in [\![1\,;n]\!], \quad p_i > 0;$
2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$

Définition 2.3 — Fonction de répartition d'une variable aléatoire
*Soit X une variable aléatoire. La **fonction de répartition** de X est la fonction F_X définie par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) \overset{\text{déf.}}{=} P(X \leqslant x)$$

Propriété 2.4 — Propriété de la fonction de répartition
La fonction de répartition d'une variable aléatoire est une fonction croissante, de limites 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$.

Dans le cas d'une variable aléatoire discrète finie, la fonction de répartition est une fonction en escalier.

Théorème 2.5 — Passage de la fonction de répartition à la loi de probabilité
Soit X une variable aléatoire finie. On note $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_p\}$ avec $x_1 < x_2 < \dots < x_p$. Passage de la loi de probabilité à la fonction de répartition :

1) $\forall x \in]-\infty\,;x_1[,\quad F_X(x) = 0$;
2) $\forall i \in [\![1\,;p-1]\!],\ \forall x \in [x_i\,;x_{i+1}[,\quad F_X(x) = \sum_{k=1}^{i} P(X = x_k)$.
3) $\forall x \in [x_p\,;+\infty[,\quad F_X(x) = 1$;

Passage de la fonction de répartition à la loi de probabilité :

1) $P(X = x_1) = F_X(x_1)$;
2) $\forall i \in [\![2\,;p]\!],\quad P(X = x_i) = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1})$.

III — Espérance mathématique, valeurs typiques

Définition 3.1 — Espérance d'une variable aléatoire
*Soit X une variable aléatoire dont l'ensemble des valeurs s'écrit $\{x_1, \cdots, x_n\}$. L'**espérance mathématique de X** est le réel*

$$\mathrm{E}(X) \overset{\text{déf.}}{=} \sum_{k=1}^{n} x_k\, P(X = x_k)$$

On peut aussi écrire cette somme sous la forme

$$\mathrm{E}(X) \overset{\text{déf.}}{=} \sum_{x \in X(\Omega)} x\, P(X = x)$$

Propriété 3.2 — *Soit X une variable aléatoire. Si $m = \min(X(\Omega))$ et $M = \max(X(\Omega))$, alors $\mathrm{E}(X) \in [\,m\,;M\,]$.*

Corollaire 3.3 — *En particulier, si X est une variable aléatoire positive, alors $\mathrm{E}(X) \geqslant 0$.*

Théorème 3.4 — Théorème de transfert
Soit X une variable aléatoire et g une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors

$$\mathrm{E}\big(g(X)\big) = \sum_{k=1}^{n} g(x_k)\, P(X = x_k)$$

Propriété 3.5 — Linéarité de l'espérance – I
Soit X une variable aléatoire et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a $\mathrm{E}(aX + b) = a\,\mathrm{E}(X) + b$.

Propriété 3.6 — Linéarité de l'espérance – II
Soit X et Y deux variable aléatoire alors $\mathrm{E}(X + Y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)$.

Définition 3.7 — *Soit $p \in \mathbb{N}$. Le **moment d'ordre p** de X est le réel $\mathrm{E}(X^p)$.*

Définition 3.8 — Variance d'une v.a.r.
*Soit X une variable aléatoire. La **variance** de X est définie par*

$$\mathrm{V}(X) \overset{\text{déf.}}{=} \mathrm{E}\big((X - \mathrm{E}(X))^2\big)$$

*On appelle **écart-type** de X le réel $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{V}(X)}$.*

Propriété 3.9 — Cas de la variance nulle
Soit X une variable aléatoire.
On a $\mathrm{V}(X)=0$ si et seulement si X est une v.a.r. certaine, égale dans ce cas à $\mathrm{E}(X)$.

Théorème 3.10 — Théorème de König-Huygens
Soit X une variable aléatoire.

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}(X)^2$$

Propriété 3.11 — *Soit X une variable aléatoire et a et b deux réels.*

- $\mathrm{V}(X+b)=\mathrm{V}(X)$ *et* $\sigma(X+b)=\sigma(X)$ *(invariance par translation) ;*
- $\mathrm{V}(aX)=a^2\,\mathrm{V}(X)$ *et* $\sigma(aX)=|a|\,\sigma(X)$*;*

Théorème 3.12 — Inégalité de Bienaymé-Tchebychev
Soit X une variable aléatoire d'espérance $\mathrm{E}(X)$ et de variance $\mathrm{V}(X)$. Alors, pour tout $\varepsilon>0$ on a

$$P\big(\,|X-\mathrm{E}(X)|\geqslant\varepsilon\big)\leqslant\frac{\mathrm{V}(X)}{\varepsilon^2}$$

IV — Lois usuelles

Définition 4.1 — Loi uniforme
Soit n un entier naturel non nul.
On dit qu'une variable aléatoire X suit ***la loi uniforme*** *sur $[\![\,1\,;\,n\,]\!]$ si et seulement si*

1) $X(\Omega)=[\![\,1\,;\,n\,]\!]$;
2) $\forall k\in[\![\,1\,;\,n\,]\!],\quad P(X=k)=\dfrac{1}{n}$

On note alors $\boldsymbol{X\hookrightarrow\mathscr{U}(1,n)}$.

Situation type On tire un nombre au hasard entre 1 et n sans favoriser un résultat par rapport à un autre. La variable aléatoire X est alors le résultat obtenu.

Espérance, variance On a vu que

$$\mathrm{E}(X)=\frac{n+1}{2}\qquad\text{et}\qquad V(X)=\frac{n^2-1}{12}$$

Définition 4.2 — Loi de Bernoulli
Soit $p \in]0\,;1[$. Une variable aléatoire X suit la ***loi de Bernoulli de paramètre p*** *si et seulement si*
- $X(\Omega) = \{0, 1\}$;
- $P(X = 1) = p$ *(et donc* $P(X = 0) = 1 - p = q$*).*

On note alors $\boldsymbol{X \hookrightarrow \mathscr{B}(1, p)}$*. La variable aléatoire X est qualifiée de* ***variable aléatoire de Bernoulli****.*

Situation type Toute expérience a deux issues : on attribue arbitrairement la valeur 1 à un « succès » et la valeur 0 à un « échec ». Par exemple le lancer d'une pièce de monnaie (1 = obtention d'un pile), naissance d'un enfant (1 = naissance d'une fille), etc.

Espérance, variance Par un calcul simple : $\mathrm{E}(X) = p$; $V(X) = pq$.
Notez que pour $p = 1$ (ou $p = 0$) la variable X est certaine, égale à 1 (ou à 0).

Définition 4.3 — Variable indicatrice
Soit A un évènement. On associe à A la variable X_A définie par

$$\forall \omega \in \Omega, \qquad X_A(\omega) = 1 \quad \textit{si} \quad \omega \in A \qquad \textit{et} \qquad X_A(\omega) = 0 \quad \textit{sinon}$$

La variable aléatoire X_A est la ***variable indicatrice*** *de l'évènement A.*

Propriété 4.4 — *Soit A un évènement et X_A sa variable indicatrice. On a*

$$\mathrm{E}(X_A) = P(X_A = 1) = P(A)$$

Définition 4.5 — Loi binomiale
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0\,;1[$. Une variable aléatoire X suit ***la loi binomiale de paramètres n et p*** *si et seulement si*
- $X(\Omega) = [\![\, 0\,; n \,]\!]$;
- $\forall k \in [\![\, 0\,; n \,]\!], \quad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

On note alors $\boldsymbol{X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)}$*.*

Situation type Une succession de n expériences de type succès-échec *indépendantes*. On suppose qu'à chaque expérience la probabilité de succès est *constante* égale à p.
La variable aléatoire X est le nombre de succès observés.

Espérance et variance $\mathrm{E}(X) = np$ et $V(X) = npq$.

Définition 4.6 — Loi hypergéométrique
Soit $N \in \mathbb{N}^*$, $n \in [\![\, 0\,; N \,]\!]$ et $p \in]0\,;1[$. Une variable aléatoire X suit ***la loi hypergéométrique de paramètres N, n et p*** *si et seulement si*
- $X(\Omega) = [\![\, \max(0, n - N(1-p))\ ;\ \min(n, Np) \,]\!]$;
- $\forall k \in X(\Omega), \quad P(X = k) = \dfrac{\binom{Np}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}$.

On note alors $\boldsymbol{X \hookrightarrow \mathscr{H}(N, n, p)}$*.*

Situation type Une urne contient a boules blanches et b boules noires. On tire une poignée de n boules dans l'urne. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches dans la poignée.

Espérance et variance $\mathrm{E}(X) = \dfrac{an}{N} = np$ et $V(X) = \dfrac{npq(N-n)}{N-1}$.