

Variables aléatoires

Notations du chapitre — (Ω, \mathcal{F}, P) est un espace probabilisé fini.

I — Définitions

Définition 1.1 — Variable aléatoire réelle

On appelle **variable aléatoire réelle** (en abrégé *v.a.r.*) toute application de Ω dans \mathbb{R} .

Définition 1.2 — Support d'une variable aléatoire

Le **support** d'une variable aléatoire X est l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs atteintes par X .

La variable aléatoire X est **discrète** si $X(\Omega)$ est dénombrable.

La variable aléatoire X est **discrète finie** si $X(\Omega)$ est fini.

La variable aléatoire X est **continue** si $X(\Omega)$ est indénombrable (ex. : intervalle de \mathbb{R}).

Propriété 1.3 — Système complet d'évènements associé

Soit (Ω, \mathcal{F}) un espace probabilisable et X un *v.a.r.* finie de support $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_p\}$.

Alors $(X = x_1), (X = x_2), \dots, (X = x_p)$ est un *s.c.e.* : c'est le **système complet d'évènement associé à la variable aléatoire X**

Propriété 1.4 — Fonction d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire sur Ω et g est une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R}

Alors $g \circ X$ est une variable aléatoire, noté $g(X)$.

II — Loi de probabilité

Définition 2.1 — Loi de probabilité d'une variable aléatoire

On appelle **loi de probabilité** d'une variable aléatoire X la donnée de

- 1) l'ensemble $X(\Omega)$;
- 2) la valeur de $P(X = x)$ pour tout réel x dans $X(\Omega)$.

Théorème 2.2 — Définition de la loi d'une variable aléatoire

Soit $(p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$. Ces réels définissent la loi de probabilité d'une variable aléatoire si et seulement si

- 1) $\forall i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket, p_i > 0$;
- 2) $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

Définition 2.3 — Fonction de répartition d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire. La **fonction de répartition** de X est la fonction F_X définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = P(X \leq x)$$

Théorème 2.4 — Passage de la fonction de répartition à la loi de probabilité

Soit X une variable aléatoire finie. On note $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_p\}$ avec $x_1 < x_2 < \dots < x_p$.

Passage de la loi de probabilité à la fonction de répartition :

- 1) $\forall x \in]-\infty ; x_1[, F_X(x) = 0;$
- 2) $\forall i \in \llbracket 1 ; p-1 \rrbracket , \forall x \in [x_i ; x_{i+1}[, F_X(x) = \sum_{k=1}^i P(X = x_k).$
- 3) $\forall x \in [x_p ; +\infty[, F_X(x) = 1;$

Passage de la fonction de répartition à la loi de probabilité :

- 1) $P(X = x_1) = F_X(x_1);$
- 2) $\forall i \in \llbracket 2 ; p \rrbracket , P(X = x_i) = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1}).$

III — Espérance mathématique, valeurs typiques

Définition 3.1 — Espérance d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire dont l'ensemble des valeurs s'écrit $\{x_1, \dots, x_n\}$. L'espérance mathématique de X est le réel

$$E(X) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{k=1}^n x_k P(X = x_k)$$

On peut aussi écrire cette somme sous la forme

$$E(X) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x)$$

Propriété 3.2 — Soit X une variable aléatoire. Si $m = \min(X(\Omega))$ et $M = \max(X(\Omega))$, alors $E(X) \in [m ; M]$.

Corollaire 3.3 — En particulier, si X est une variable aléatoire positive, alors $E(X) \geq 0$.

Théorème 3.4 — Théorème de transfert

Soit X une variable aléatoire et g une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Alors

$$E(g(X)) = \sum_{k=1}^n g(x_k) P(X = x_k)$$

Propriété 3.5 — Linéarité de l'espérance – I

Soit X une variable aléatoire et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a $E(aX + b) = aE(X) + b$.

Propriété 3.6 — Linéarité de l'espérance – II

Soit X et Y deux variable aléatoire alors $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

Définition 3.7 — Soit $p \in \mathbb{N}$. Le moment d'ordre p de X est le réel $E(X^p)$.

Définition 3.8 — Variance d'une v.a.r.

Soit X une variable aléatoire. La variance de X est définie par

$$V(X) \stackrel{\text{déf.}}{=} E((X - E(X))^2)$$

On appelle écart-type de X le réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Propriété 3.9 — Cas de la variance nulle

Soit X une variable aléatoire.

On a $V(X) = 0$ si et seulement si X est une v.a.r. certaine, égale dans ce cas à $E(X)$.

Théorème 3.10 — Théorème de König-Huygens

Soit X une variable aléatoire.

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Propriété 3.11 — Soit X une variable aléatoire et a et b deux réels.

- $V(X + b) = V(X)$ et $\sigma(X + b) = \sigma(X)$ (invariance par translation);
- $V(aX) = a^2 V(X)$ et $\sigma(aX) = |a| \sigma(X)$;

Théorème 3.12 — Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

IV — Lois usuelles**Définition 4.1 — Loi uniforme**

Soit n un entier naturel non nul.

On dit qu'une variable aléatoire X suit **la loi uniforme** sur $[[1; n]]$ si et seulement si

- 1) $X(\Omega) = [[1; n]]$;
- 2) $\forall k \in [[1; n]], P(X = k) = \frac{1}{n}$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{U}(1, n)$.

Situation type On tire un nombre au hasard entre 1 et n sans favoriser un résultat par rapport à un autre. La variable aléatoire X est alors le résultat obtenu.

Espérance, variance On a vu que

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

Définition 4.2 — Loi de Bernoulli

Soit $p \in]0 ; 1[$. Une variable aléatoire X suit la **loi de Bernoulli de paramètre p** si et seulement si

- $X(\Omega) = (0, 1)$;
- $P(X = 1) = p$ (et donc $P(X = 0) = 1 - p = q$).

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1, p)$. La variable aléatoire X est qualifiée de **variable aléatoire de Bernoulli**.

Situation type Toute expérience a deux issues : on attribue arbitrairement la valeur 1 à un « succès » et la valeur 0 à un « échec ». Par exemple le lancer d'une pièce de monnaie (1 = obtention d'un pile), naissance d'un enfant (1 = naissance d'une fille), etc.

Espérance, variance Par un calcul simple : $E(X) = p$; $V(X) = pq$.

Notez que pour $p = 1$ (ou $p = 0$) la variable X est certaine, égale à 1 (ou à 0).

Définition 4.3 — Variable indicatrice

Soit A un évènement. On associe à A la variable X_A définie par

$$\forall \omega \in \Omega, \quad X_A(\omega) = 1 \quad \text{si } \omega \in A \quad \text{et} \quad X_A(\omega) = 0 \quad \text{sinon}$$

La variable aléatoire X_A est la **variable indicatrice** de l'évènement A .

Propriété 4.4 — Soit A un évènement et X_A sa variable indicatrice. On a

$$E(X_A) = P(X_A = 1) = P(A)$$

Définition 4.5 — Loi binomiale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0 ; 1[$. Une variable aléatoire X suit la **loi binomiale de paramètres n et p** si et seulement si

- $X(\Omega) = \llbracket 0 ; n \rrbracket$;
- $\forall k \in \llbracket 0 ; n \rrbracket, \quad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

Situation type Une succession de n expériences de type succès-échec *indépendantes*. On suppose qu'à chaque expérience la probabilité de succès est *constante* égale à p .

La variable aléatoire X est le nombre de succès observés.

Espérance et variance $E(X) = np$ et $V(X) = npq$.

Définition 4.6 — Loi hypergéométrique

Soit $N \in \mathbb{N}^*$, $n \in \llbracket 0 ; N \rrbracket$ et $p \in]0 ; 1[$. Une variable aléatoire X suit la **loi hypergéométrique de paramètres N , n et p** si et seulement si

- $X(\Omega) = \llbracket \max(0, n - b) ; \min(n, a) \rrbracket$;
- $\forall k \in \llbracket 0 ; n \rrbracket, \quad P(X = k) = \frac{\binom{Np}{k} \binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}$.

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N, n, p)$.

Situation type Une urne contient a boules blanches et b boules noires. On tire une poignée de n boules dans l'urne. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches dans la poignée.

Espérance et variance $E(X) = \frac{an}{N} = np$ et $V(X) = \frac{npq(N-n)}{N-1}$.