

# VARIABLES ALÉATOIRES

Notations du chapitre —  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  est un espace probabilisé fini.

## I — Définitions

### Définition 1.1 — Variable aléatoire réelle

On appelle **variable aléatoire réelle** (en abrégé v.a.r.) toute application de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$ .

### Définition 1.2 — Support d'une variable aléatoire

Le **support** d'une variable aléatoire  $X$  est l'ensemble  $X(\Omega)$  des valeurs atteintes par  $X$ .

La variable aléatoire  $X$  est **discrète** si  $X(\Omega)$  est dénombrable.

La variable aléatoire  $X$  est **discrète finie** si  $X(\Omega)$  est fini.

La variable aléatoire  $X$  est **continue** si  $X(\Omega)$  est indénombrable.

### Propriété 1.3 — Système complet d'évènements associé

Soit  $(\Omega, \mathcal{F})$  un espace probabilisable et  $X$  un v.a.r. finie de support  $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_p\}$ .

Alors  $(X = x_1), (X = x_2), \dots, (X = x_p)$  est un s.c.e. : c'est le **système complet d'évènements associé à la variable aléatoire  $X$**

### Propriété 1.4 — Fonction d'une variable aléatoire

Soit  $X$  une variable aléatoire sur  $\Omega$  et  $g$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$

Alors  $g \circ X$  est une variable aléatoire, noté  $g(X)$ .

## II — Loi de probabilité

### Définition 2.1 — Loi de probabilité d'une variable aléatoire

On appelle **loi de probabilité** d'une variable aléatoire  $X$  la donnée de

- 1) l'ensemble  $X(\Omega)$ ;
- 2) la valeur de  $P(X = x)$  pour tout réel  $x$  dans  $X(\Omega)$ .

### Théorème 2.2 — Définition de la loi d'une variable aléatoire

Soit  $(p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ . Ces réels définissent la loi de probabilité d'une variable aléatoire si et seulement si

- 1)  $\forall i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket, p_i > 0$ ;
- 2)  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ .

### Définition 2.3 — Fonction de répartition d'une variable aléatoire

Soit  $X$  une variable aléatoire. La **fonction de répartition** de  $X$  est la fonction  $F_X$  définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) \stackrel{\text{def}}{=} P(X \leq x)$$

### Propriété 2.4 — Propriété de la fonction de répartition

De façon générale, la fonction de répartition d'une variable aléatoire est une fonction croissante, de limites 0 en  $-\infty$  et 1 en  $+\infty$ .

Dans le cas d'une variable aléatoire discrète finie, la fonction de répartition est une fonction en escalier.

**Théorème 2.5 — Passage de la fonction de répartition à la loi de probabilité**

Soit  $X$  une variable aléatoire finie. On note  $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_p\}$  avec  $x_1 < x_2 < \dots < x_p$ . Passage de la loi de probabilité à la fonction de répartition :

- 1)  $\forall x \in ]-\infty ; x_1[ , F_X(x) = 0;$
- 2)  $\forall i \in \llbracket 1 ; p-1 \rrbracket , \forall x \in [x_i ; x_{i+1}[ , F_X(x) = \sum_{k=1}^i P(X = x_k).$
- 3)  $\forall x \in [x_p ; +\infty[ , F_X(x) = 1;$

Passage de la fonction de répartition à la loi de probabilité :

- 1)  $P(X = x_1) = F_X(x_1);$
- 2)  $\forall i \in \llbracket 2 ; p \rrbracket , P(X = x_i) = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1}).$

**III — Espérance mathématique, valeurs typiques**

**Définition 3.1 — Espérance d'une variable aléatoire**

Soit  $X$  une variable aléatoire dont l'ensemble des valeurs s'écrit  $\{x_1, \dots, x_n\}$ . L'espérance mathématique de  $X$  est le réel

$$E(X) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{k=1}^n x_k P(X = x_k)$$

On peut aussi écrire cette somme sous la forme

$$E(X) \stackrel{\text{déf.}}{=} \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x)$$

**Propriété 3.2 —** Soit  $X$  une variable aléatoire. Si  $m = \min(X(\Omega))$  et  $M = \max(X(\Omega))$ , alors  $E(X) \in [m ; M]$ .

**Corollaire 3.3 —** En particulier, si  $X$  est une variable aléatoire positive, alors  $E(X) \geq 0$ .

**Théorème 3.4 — Théorème de transfert**

Soit  $X$  une variable aléatoire et  $g$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Alors

$$E(g(X)) = \sum_{k=1}^n g(x_k) P(X = x_k)$$

**Propriété 3.5 — Linéarité de l'espérance - I**

Soit  $X$  une variable aléatoire et  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . On a  $E(aX + b) = a E(X) + b$ .

**Propriété 3.6 — Linéarité de l'espérance - II**

Soit  $X$  et  $Y$  deux variable aléatoire alors  $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ .

**Définition 3.7 —** Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Le **moment d'ordre  $p$**  de  $X$  est le réel  $E(X^p)$ .

**Définition 3.8 — Variance d'une v.a.r.**

Soit  $X$  une variable aléatoire. La **variance** de  $X$  est définie par

$$V(X) \stackrel{\text{def.}}{=} E((X - E(X))^2)$$

On appelle **écart-type** de  $X$  le réel  $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ .

**Propriété 3.9 — Cas de la variance nulle**

Soit  $X$  une variable aléatoire.

On a  $V(X) = 0$  si et seulement si  $X$  est une v.a.r. certaine, égale dans ce cas à  $E(X)$ .

**Théorème 3.10 — Théorème de König-Huygens**

Soit  $X$  une variable aléatoire.

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

**Propriété 3.11** — Soit  $X$  une variable aléatoire et  $a$  et  $b$  deux réels.

- $V(X + b) = V(X)$  et  $\sigma(X + b) = \sigma(X)$  (invariance par translation);
- $V(aX) = a^2 V(X)$  et  $\sigma(aX) = |a| \sigma(X)$ ;

**Théorème 3.12 — Inégalité de Bienaymé-Tchebychev**

Soit  $X$  une variable aléatoire d'espérance  $E(X)$  et de variance  $V(X)$ . Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$  on a

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

## IV — Lois usuelles

**Définition 4.1 — Loi uniforme**

Soit  $n$  un entier naturel non nul.

On dit qu'une variable aléatoire  $X$  suit **la loi uniforme** sur  $\llbracket 1 ; n \rrbracket$  si et seulement si

$$1) \quad X(\Omega) = \llbracket 1 ; n \rrbracket;$$

$$2) \quad \forall k \in \llbracket 1 ; n \rrbracket, \quad P(X = k) = \frac{1}{n}$$

On note alors  $X \hookrightarrow \mathcal{U}(1, n)$ .

*Situation type* On tire un nombre au hasard entre 1 et  $n$  sans favoriser un résultat par rapport à un autre. La variable aléatoire  $X$  est alors le résultat obtenu.

*Espérance, variance* On a vu que

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

**Définition 4.2 — Loi de Bernoulli**

Soit  $p \in ]0 ; 1[$ . Une variable aléatoire  $X$  suit la **loi de Bernoulli de paramètre  $p$**  si et seulement si

- $X(\Omega) = \{0, 1\}$ ;
- $P(X = 1) = p$  (et donc  $P(X = 0) = 1 - p = q$ ).

On note alors  $X \longleftrightarrow \mathcal{B}(1, p)$ . La variable aléatoire  $X$  est qualifiée de **variable aléatoire de Bernoulli**.

*Situation type* Toute expérience a deux issues : on attribue arbitrairement la valeur 1 à un « succès » et la valeur 0 à un « échec ». Par exemple le lancer d'une pièce de monnaie (1 = obtention d'un pile), naissance d'un enfant (1 = naissance d'une fille), etc.

*Espérance, variance* Par un calcul simple :  $E(X) = p$  ;  $V(X) = pq$ .

Notez que pour  $p = 1$  (ou  $p = 0$ ) la variable  $X$  est certaine, égale à 1 (ou à 0).

**Définition 4.3 — Variable indicatrice**

Soit  $A$  un évènement. On associe à  $A$  la variable  $X_A$  définie par

$$\forall \omega \in \Omega, \quad X_A(\omega) = 1 \text{ si } \omega \in A \quad \text{et} \quad X_A(\omega) = 0 \text{ sinon}$$

La variable aléatoire  $X_A$  est la **variable indicatrice** de l'évènement  $A$ .

**Propriété 4.4** — Soit  $A$  un évènement et  $X_A$  sa variable indicatrice. On a

$$E(X_A) = P(X_A = 1) = P(A)$$

**Définition 4.5 — Loi binomiale**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in ]0 ; 1[$ . Une variable aléatoire  $X$  suit la **loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$**  si et seulement si

- $X(\Omega) = \llbracket 0 ; n \rrbracket$ ;
- $\forall k \in \llbracket 0 ; n \rrbracket, \quad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ .

On note alors  $X \longleftrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ .

*Situation type* Une succession de  $n$  expériences de type succès-échec *indépendantes*. On suppose qu'à chaque expérience la probabilité de succès est *constante* égale à  $p$ .

La variable aléatoire  $X$  est le nombre de succès observés.

*Espérance et variance*  $E(X) = np$  et  $V(X) = npq$ .

**Définition 4.6 — Loi hypergéométrique**

Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ ,  $n \in \llbracket 0 ; N \rrbracket$  et  $p \in ]0 ; 1[$ . Une variable aléatoire  $X$  suit la **loi hypergéométrique de paramètres  $N$ ,  $n$  et  $p$**  si et seulement si

- $X(\Omega) = \llbracket \max(0, n - N(1 - p)) ; \min(n, Np) \rrbracket$ ;
- $\forall k \in X(\Omega), \quad P(X = k) = \frac{\binom{Np}{k} \binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ .

On note alors  $X \longleftrightarrow \mathcal{H}(N, n, p)$ .

*Situation type* Une urne contient  $a$  boules blanches et  $b$  boules noires. On tire une poignée de  $n$  boules dans l'urne. On appelle  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches dans la poignée.

*Espérance et variance*  $E(X) = \frac{an}{N} = np$  et  $V(X) = \frac{npq(N-n)}{N-1}$ .

