

# Système d'équations linéaires

**Notations du chapitre** — Dans ce chapitre,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ; on appelle les éléments de  $\mathbb{K}$  des *scalaires*.  
 $n$  et  $p$  sont deux entiers naturels non nuls.

## I — Définitions et vocabulaire

### Définition 1.1 — Équation linéaire

Une *équation linéaire à  $p$  inconnues* est une équation de la forme

$$(E) \quad a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_px_p = b$$

- où  $(a_1, a_2, \dots, a_p) \in \mathbb{K}^p$  sont les **coefficients** de l'équation;
- $b \in \mathbb{K}$  est le **second membre** de l'équation;
- et  $(x_1, x_2, \dots, x_p)$  sont les **inconnues**.

### Vocabulaire

- Tout élément  $(x_1, x_2, \dots, x_p)$  de  $\mathbb{K}^p$  vérifiant cette équation est une **solution** de l'équation.
- L'équation est dite **homogène** lorsque  $b = 0$ . L'**équation homogène associée** à  $(E)$  est l'équation

$$(E_0) \quad a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_px_p = 0$$

### Définition 1.2 — Système d'équations linéaires

Un *système de  $n$  équations linéaires à  $p$  inconnues* est la donnée de  $n$  équations linéaires de la forme

$$(\Sigma) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ip}x_p = b_i \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

où les scalaires  $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$  sont les **coefficients**, les scalaires  $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$  forment le **second membre** et les  $(x_j)_{1 \leq j \leq p}$  sont les **inconnues** du système.

### Vocabulaire

- Une **solution du système**  $(\Sigma)$  est un élément  $(x_1, x_2, \dots, x_p)$  de  $\mathbb{K}^p$  vérifiant simultanément toutes les équations  $L_1, L_2, \dots, L_n$ .
- Le système  $(\Sigma)$  est homogène si et seulement si  $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$ , c'est-à-dire si le second membre est nul. Le **système homogène associé** à  $(\Sigma)$  est le système  $(\Sigma')$  obtenu en annulant le second membre de  $(\Sigma)$ .
- Le système est **carré** si et seulement si  $n = p$  (autant d'inconnues que d'équations).

### Définition 1.3 — Systèmes équivalents

Soit  $(\Sigma_1)$  et  $(\Sigma_2)$  deux systèmes d'équations linéaires à  $p$  inconnues. Les systèmes  $(\Sigma_1)$  et  $(\Sigma_2)$  sont **équivalents** si et seulement si ils admettent le même ensemble de solution.

## II — Systèmes échelonnés

### Définition 2.1 — Inconnues principales et auxiliaires – pivots

Soit une équation linéaire à  $p$  inconnues

$$(E) \quad a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_px_p = b$$

On appelle **inconnue principale** de l'équation l'inconnue de plus petit indice dont le coefficient est non nul. Ce coefficient s'appelle le **pivot** de l'équation et les autres inconnues sont les **inconnues auxiliaires**.

### Définition 2.2 — Système échelonné

Un système de  $n$  équations à  $p$  inconnues est **échelonné** si et seulement si l'indice de l'inconnue principale augmente strictement d'une ligne à l'autre. Les coefficients des dernières équations peuvent éventuellement être tous nuls.

Si l'indice de l'inconnue principale diminue d'exactly une unité à chaque équation, le système est **triangulaire**.

Résolution des systèmes échelonnés Trois cas de figures se présentent :

1. Si il y a une ligne de la forme «  $0 = b_j$  » avec  $b_j \neq 0$ , alors le système ne peut pas avoir de solutions : il est dit **incompatible**.
2. Sinon le système est **compatible**. On peut le résoudre par la **méthode de la remontée**. Dans chaque équation, en partant de la dernière, on exprime l'inconnue principale en fonction du second membre et d'éventuelles inconnues auxiliaires.
  - (a) S'il y a au moins une variable auxiliaire, celle-ci varie librement dans  $\mathbb{K}$  et le système admet donc un nombre infini de solutions : il est dit **indéterminé**.

- (b) Si il n'y a pas de variable auxiliaire, alors toutes les inconnues reçoivent une unique valeur. Le système admet donc une unique solution : il est dit **déterminé**.

## III — Méthode de résolution : pivot de Gauss

Les **opérations élémentaires** sont les suivantes :

- **Permuter deux lignes** ( $L_i \leftrightarrow L_j$ ). L'opération réciproque est elle même.
- **Changer l'ordre des lignes** (pas de notation). On peut montrer que cette opération est une succession de permutation de deux lignes.
- **Multiplier une ligne par une constante non nulle** ( $L_i \leftarrow \alpha L_i$  avec  $\alpha \neq 0$ ). L'opération réciproque est alors  $L_i \leftarrow \frac{1}{\alpha} L_i$ .
- **Additionner deux lignes** ( $L_i \leftarrow L_i + L_j$ ). La réciproque est  $L_i \leftarrow L_i - L_j$ .
- **Additionner à une ligne une autre ligne multipliée par une constante** ( $L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$ ). L'opération réciproque est  $L_i \leftarrow L_i - \beta L_j$ .
- **Additionner à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes**. Cela revient à faire plusieurs opérations du type précédent.
- **Supprimer une équation «  $0 = 0$  »**.
- **Supprimer une équation présente en double**.
- **Supprimer une équation qui est une combinaison linéaire des autres**.

Les opérations en gras sont les opérations élémentaires à proprement parler ; les autres sont des enchaînements « sûrs » d'une ou plusieurs opérations élémentaires.

La méthode du pivot de Gauss permet, par une succession d'opérations élémentaires, de transformer un système de  $p$  équations à  $n$  inconnues ( $\Sigma$ ) en système échelonné équivalent.

**Élimination de  $x_1$**  Si  $x_1$  n'apparaît dans aucune équation, cette étape est terminée et on passe à la suivante. Sinon

On sélectionne une équation contenant  $x_1$  et on l'amène en premier dans le système.

À l'aide de  $L_1$ , on élimine  $x_1$  dans les autres équations  $L_2, L_3, \dots$ , jusqu'à  $L_n$  avec des opérations du types  $L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_1$ . On prend garde à prendre  $\alpha \neq 0$ .

On obtient ainsi un système où seule  $L_1$  contient l'inconnue  $x_1$ .

**Élimination de  $x_2$**  On ne touche plus aux lignes contenant  $x_1$  dans la suite de la méthode. Si  $x_2$  n'apparaît dans aucune équation restante, cette étape est terminée et on passe à la suivante. Sinon

On sélectionne une équation contenant  $x_2$  et on l'amène en second dans le système.

À l'aide de  $L_2$ , on élimine  $x_2$  dans les autres équations avec des opérations du types  $L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_2$ . On prend garde à prendre  $\alpha \neq 0$ .

**etc.** et ainsi de suite. On élimine successivement les inconnues  $x_1, x_2$ , etc. jusqu'à  $x_p$  en « gelant » progressivement les premières lignes du système.

La méthode s'arrête nécessairement sur un système échelonné.

**Théorème 3.1** — *Quelque soit les opérations effectuées dans la méthode du pivot de Gauss, le nombre de pivots dans le système échelonné obtenu est constant : c'est le rang du système ( $\Sigma$ ).*

**Système homogène** Un système homogène possède toujours au moins une solution, à savoir  $x_1 = \dots = x_p = 0$ ; il est donc toujours compatible.

**Système carré** Un système carré qui ne possède qu'une seule solution s'appelle un **système de Cramer**.

**Système de Cramer** Un système carré qui ne possède qu'une seule solution s'appelle un **système de Cramer**.

**Système triangulaire** C'est un système carré de la forme

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots = \dots \\ a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

**Attention !** Les coefficients diagonaux  $a_{11}, a_{22}$ , etc. sont éventuellement nuls.

**Attention !** Un système triangulaire n'est pas nécessairement échelonné.

**Théorème 3.2** — *Un système triangulaire est un système de Cramer si et seulement si il n'a aucun zéro sur la diagonale.*

