Système d'équations linéaires

Notations du chapitre — *Dans ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*
*On appelle les éléments de $\mathbb{K}$ des **scalaires**.*
n et p sont deux entiers naturels non nuls.

I — Définitions et vocabulaire

Définition 1.1 — Équation linéaire
*Une **équation linéaire à p inconnues** est une équation de la forme*

$$(E) \qquad a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_px_p = b$$

- *où $(a_1, a_2, \ldots, a_p) \in \mathbb{K}^p$ sont les **coefficients** de l'équation ;*
- *$b \in \mathbb{K}$ est le **second membre** de l'équation ;*
- *et $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ sont les **inconnues**.*

Vocabulaire
- Tout élément $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{K}^p$ vérifiant cette équation est une **solution** de l'équation.
- L'équation est dite **homogène** lorque $b = 0$. L'**équation homogène associée à *(E)*** est l'équation
  $$(E_0) \qquad a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_px_p = 0$$

Définition 1.2 — Système d'équations linéaires
*Un **système de n équations linéaires à p inconnues** est la donnée de n équations linéaires de la forme*

$$(\Sigma) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \cdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ip}x_p = b_i \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

*où les scalaires $\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ sont les **coefficients**, les scalaires $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ forment **le second membre** et les $\left(x_j\right)_{1\leqslant j\leqslant n}$ sont les **inconnues** du système.*

Vocabulaire
- Une **solution du système (Σ)** est un élément $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ de $\mathbb{K}^p$ vérifiant simultanément toutes les équations $L_1, L_2, \ldots, L_n$.
- Le système (Σ) est homogène si et seulement si $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$, c'est-à-dire si le second membre est nul. Le **système homogène associé à (Σ)** est le système (Σ') obtenu en annulant le second membre de (Σ).
- Le système est **carré** si et seulement si $n = p$ (autant d'inconnues que d'équations).

Définition 1.3 — Systèmes équivalents
*Soit (Σ_1) et (Σ_2) deux systèmes d'équations linéaires à p inconnues. Les systèmes (Σ_1) et (Σ_2) sont **équivalents** si et seulement si ils admettent le même ensemble de solution.*

II — Systèmes échelonnés

Définition 2.1 — Inconnues principales et auxiliaires – pivots
Soit une équation linéaire à p inconnues

$$(E) \qquad a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_px_p = b$$

*On appelle **inconnue principale** de l'équation l'inconnue de plus petit indice dont le coefficient est non nul. Ce coefficient s'appelle le **pivot** de l'équation et les autres inconnues sont les **inconnues auxiliaires**.*

Définition 2.2 — Système échelonné
*Un système de n équations à p inconnues est **échelonné** si et seulement si l'indice de l'inconnue principale augmente strictement d'une ligne à l'autre. Les coefficients des dernières équations peuvent éventuellement être tous nuls.*
*Si l'indice de l'inconnue principale diminue d'exactement une unité à chaque équation, le système est **triangulaire**.*

Résolution des systèmes échelonnés Trois cas de figures se présentent :

1. Si il y a une ligne de la forme « $0 = b_j$ » avec $b_j \neq 0$, alors le système ne peut pas avoir de solutions : il est dit **incompatible**.
2. Sinon le système est **compatible**. On peut le résoudre par la **méthode de la remontée**. Dans chaque équation, en partant de la dernière, on exprime l'inconnue principale en fonction du second membre et d'éventuelles inconnues auxiliaires.
   (a) S'il y a au moins une variable auxiliaire, celle-ci varie librement dans $\mathbb{K}$ et le système admet donc un nombre infini de solutions : il est dit **indéterminé**.
   (b) Si il n'y a pas de variable auxiliaire, alors toutes les inconnues reçoivent une unique valeur. Le système admet donc une unique solution : il est dit **déterminé**.

III — Méthode de résolution : pivot de Gauss

Les **opérations élémentaires** sont les suivantes :

- **Permuter deux lignes ($L_i \longleftrightarrow L_j$).** L'opération réciproque est elle même.
- Changer l'ordre des lignes (pas de notation). On peut montrer que cette opération est une succession de permutation de deux lignes.
- **Multiplier une ligne par une constante non nulle ($L_i \leftarrow \alpha L_i$ avec $\alpha \neq 0$).** L'opération réciproque est alors $L_i \leftarrow \frac{1}{\alpha} L_i$.
- Additionner deux lignes ($L_i \leftarrow L_i + L_j$). La réciproque est $L_i \leftarrow L_i - L_j$.
- **Additionner à une ligne une autre ligne multipliée par une constante ($L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$).** L'opération réciproque est $L_i \leftarrow L_i - \beta L_j$.
- Additionner à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes. Cela revient à faire plusieurs opérations du type précédent.
- **Supprimer une équation « $0 = 0$ ».**
- Supprimer une équation présente en double.
- Supprimer une équation qui est une combinaison linéaire des autres.

Les opérations en gras sont les opération élémentaires à proprement parler ; les autres sont des enchaînements « sûrs » d'une ou plusieurs opérations élémentaires.
La méthode du pivot de Gauss permet, par une succession d'opérations élémentaires, de transformer une système de p équations à n inconnues (Σ) en système échelonné équivalent.

Élimination de x_1 Si x_1 n'apparaît dans aucune équation, cette étape est terminée et on passe à la suivante. Sinon

On sélectionne une équation contenant x_1 et on l'amène en premier dans le système.

À l'aide de L_1, on élimine x_1 dans les autres équations L_2, L_3, ..., jusqu'à L_n avec des opérations du types $L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_1$. On prend garde à prendre $\alpha \neq 0$.

On obtient ainsi un système où seule L_1 contient l'inconnue x_1.

Élimination de x_2 *On ne touche plus aux lignes contenant x_1 dans la suite de la méthode.* Si x_2 n'apparaît dans aucune équation restante, cette étape est terminée et on passe à la suivante. Sinon

On sélectionne une équation contenant x_2 et on l'amène en second dans le système.

À l'aide de L_2, on élimine x_2 dans les autres équations avec des opérations du types $L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_2$. On prend garde à prendre $\alpha \neq 0$.

etc. et ainsi de suite. On élimine successivement les inconnues x_1, x_2, etc. jusqu'à x_p en « gelant » progressivement les premières lignes du système.

La méthode s'arrête nécessairement sur un système échelonnée.

Théorème 3.1 — *Quelque soit les opérations effectuées dans la méthode du pivot de Gauss, le nombre de pivots dans le système échelonné obtenu est constant : c'est le* ***rang*** *du système* (Σ).

Systèmes carrés Un système carré qui ne possède qu'une seule solution s'appelle un **système de Cramer**.

Systèmes triangulaires Ce sont les systèmes carrés échelonnés. Ils ont la forme générale

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots = \cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Attention ! Les coefficients diagonaux a_{11}, a_{22}, etc. sont éventuellement nuls.

Théorème 3.2 — *Un système triangulaire est un système de Cramer si et seulement si il n'a aucun zéro sur la diagonale.*