

# Suites numériques

## I — Généralités

### Définition 1.1 — Suite numérique

On appelle **suite numérique** toute fonction de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{R}$ .

*Notations* Soit  $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . On parle de la suite  $u$ . On note usuellement la suite  $u$  par  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et le réel  $u(n)$  par  $u_n$ .

L'ensemble des suites numériques se note  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

Une suite peut-être définie à partir d'un certain rang, auquel cas on note  $(u_n)_{n \geq N}$ .

## II — Suites et ordre

### Définition 2.1 — Suite majorée, minorée, bornée

Soit  $u$  une suite numérique. La suite  $u$  est

1) **majorée** si et seulement si  $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M;$

2) **minorée** si et seulement si  $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m;$

3) **bornée** si et seulement si

$$\begin{aligned} & \exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n \leq M \\ \iff & \exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M \end{aligned}$$

### Définition 2.2 — Monotonie d'une suite

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite numérique. La suite  $u$  est

1) **croissante** si et seulement si

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, m \geq n \implies u_m \geq u_n$$

2) **strictement croissante** si et seulement si

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, m > n \implies u_m > u_n$$

3) **décroissante** si et seulement si

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, m \geq n \implies u_m \leq u_n$$

4) **strictement décroissante** si et seulement si

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, m > n \implies u_m < u_n$$

Une suite est **monotone** si elle est soit croissante, soit décroissante.

### Propriété 2.3 — Caractérisation des suites croissantes

Soit  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . La suite  $u$  est croissante si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$$

**Corollaire 2.4 — Caractérisation des suites décroissantes.**

Soit  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . La suite  $u$  est décroissante si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq u_{n+1}$$

**Définition 2.5 — Suites constantes**

Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **constante** si et seulement si

$$\exists a \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a$$

Une suite constante à partir d'un certain rang est dite **stationnaire**.

**Propriété 2.6** — Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n$$

### III — Suites convergentes

**Définition 3.1 — Convergence d'une suite**

Soit  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . On dit que  $u$  converge si il existe un réel  $\ell$  tel que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad n \in \llbracket N_\varepsilon ; +\infty \llbracket \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

**Théorème 3.2 — Unicité de la limite**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite convergente. Alors il existe une unique réel  $\ell$  telle que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell$ . On l'appelle limite de  $u$  et on note  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$  ou encore  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ .

**Définition 3.3 — Suite tendant vers  $\pm\infty$**

Soit  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

La suite  $u$  **diverge vers  $+\infty$**  si et seulement si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists N_A \in \mathbb{N}, \quad n \geq N_A \implies u_n \geq A$$

La suite  $u$  **diverge vers  $-\infty$**  ssi  $-u$  diverge vers  $+\infty$ .

**Théorème 3.4 — Suites extraites**

Soit  $u$  une suite numérique. Si les suites  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  convergent vers une limite commune  $\ell$  alors la suite  $u$  est convergente et  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ .

### IV — Convergence et ordre

**Théorème 4.1** — Soit  $u$  une suite convergente. Alors  $u$  est bornée.

**Propriété 4.2** — Soit  $u$  une suite convergente, de limite  $\ell > 0$ .

La suite  $u$  est strictement positive à partir d'un certain rang.

**Propriété 4.3** — Soit  $u$  une suite convergente, de limite  $\ell < 0$ .

La suite  $u$  est strictement négative à partir d'un certain rang.

**Théorème 4.4 — Passage à la limite dans une inégalité**

Soit  $u$  une suite convergente de limite  $\ell$ .

On suppose que  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0$ .

Alors  $\ell \geq 0$ .

**Corollaire 4.5** — Soit  $u$  une suite convergente de limite  $\ell$ . On suppose qu'il existe deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $\forall n \in \mathbb{N}, a < u_n < b$ .  
Alors  $a \leq \ell \leq b$ .

**Corollaire 4.6** — Si  $u$  et  $v$  sont deux suites convergentes de limites respectives  $\ell$  et  $\ell'$  et si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < v_n$ .  
Alors  $\ell \leq \ell'$ .

**Théorème 4.7 — Théorème d'encadrement**

Soit  $u, v$  et  $w$  trois suites telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq u_n \leq w_n$$

Si  $v$  et  $w$  sont convergentes et de même limite  $\ell$  alors  $u$  est convergente de limite  $\ell$ .

**Corollaire 4.8** — Soit  $u$  et  $v$  deux suites réelles.

Si  $v$  converge vers 0 et si  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq v_n$  alors  $u$  converge vers 0.

**Théorème 4.9 — Théorème de comparaison**

Soit  $u$  et  $v$  deux suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$$

- 1) Si  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ , alors  $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ .
- 2) Si  $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$ , alors  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$ .

**Théorème 4.10 — Propriété fondamentale de  $\mathbb{R}$**

Toute suite croissante et majorée converge.

*Attention !* Un majorant quelconque de  $u$  n'est pas nécessairement la limite de  $u$ , comme on peut le voir avec la suite  $(1 - 1/n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , majorée par 2 et convergente vers 1.

**Corollaire 4.11** — Toute suite décroissante et minorée converge.

De plus  $\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq u_n \leq u_0$

**Propriété 4.12** — Soit  $u$  est une suite croissante et majorée.

On a  $\forall n \in \mathbb{N}, u_0 \leq u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

**Théorème 4.13** — Toute suite croissante et non majorée diverge vers  $+\infty$ .

**Corollaire 4.14** — Toute suite décroissante et non minorée diverge vers  $-\infty$ .

#### Définition 4.15 — Suites adjacentes

On dit que deux suites  $u$  et  $v$  sont **adjacentes** si elles sont monotones, de monotonies contraires et si  $u - v$  converge vers 0.

#### Théorème 4.16 — Convergence des suites adjacentes

Soit  $u$  et  $v$  sont deux suites adjacentes.

Elles sont convergentes et de même limite  $\ell$ . De plus, si  $u$  est croissante et  $v$  décroissante, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq u_{n+1} \leq \ell \leq v_{n+1} \leq v_n$$

## V — Opérations usuelles

#### Définition 5.1 — Opérations algébriques sur les suites

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites numériques et  $\lambda$  un réel.

- 1) Si  $\lambda \in \mathbb{R}$ , le **produit** de  $u$  par  $\lambda$  est la suite  $\lambda u \stackrel{\text{déf.}}{=} (\lambda u_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- 2) La **somme** de  $u$  et de  $v$  est la suite  $u + v \stackrel{\text{déf.}}{=} (u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- 3) Le **produit** de  $u$  et de  $v$  est la suite  $u \times v \stackrel{\text{déf.}}{=} (u_n \times v_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- 4) Si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0$ , alors l'**inverse** de  $u$  est la suite  $(1/u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Une propriété sur une suite peut être vérifiée à **partir d'un certain rang**. Par exemple une suite  $u$  peut être non nulle à partir d'un certain rang, ce qui signifie

$$\exists N \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \implies u_n \neq 0$$

Dans ce cas la suite  $1/u$  est définie « à partir d'un certain rang ».

#### Théorème 5.2 — Linéarité de la convergence

Soit  $u$  une suite convergeant vers  $\ell$  et  $v$  une suite convergeant vers  $\ell'$ .

Alors la suite  $u + v$  est convergente et  $u_n + v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell + \ell'$ .

De plus, si  $\lambda \in \mathbb{R}$  alors la suite  $\lambda u$  est convergente et  $\lambda u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \lambda \times \ell$ .

#### Théorème 5.3 — Produit de deux suites convergentes

Soit  $u$  une suite convergeant vers  $\ell$  et  $v$  une suite convergeant vers  $\ell'$ .

La suite  $u \times v$  est convergente et  $u \times v \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \times \ell'$ .

Notez que les deux théorèmes précédents prouvent que la suite est convergente et donne sa limite.

#### Corollaire 5.4 — Soit $p \in \mathbb{N}$ et $u$ une suite de limite finie $\ell$ .

La suite  $u^p$  est convergente de limite  $\ell^p$ .

**Théorème 5.5** — Soit  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  telle que  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$  et  $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  telle que  $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$  avec  $\ell \in \mathbb{R}_+^*$ .

Les suites  $u + v$  et  $u \times v$  divergent vers  $+\infty$ .

On en déduit facilement le cas où  $u$  diverge vers  $-\infty$  ou  $v$  converge vers  $\ell \in \mathbb{R}_+^*$ .

**Théorème 5.6** — Soit  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  telle que  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$  et  $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  telle que  $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ . Alors les suites  $u + v$  et  $u \times v$  divergent vers  $+\infty$ .

On en déduit facilement le cas où  $u$  diverge vers  $-\infty$  ou  $v$  diverge vers  $-\infty$ . Tous les autres cas relèvent de « formes indéterminées ». Ils se résument en deux cas «  $\infty - \infty$  » et «  $0 \times \infty$  ».

**Théorème 5.7 — Composée d'une suite et d'une fonction continue**

Soit  $u$  une suite convergeant vers  $\ell$  et  $f$  une fonction définie sur un voisinage de  $\ell$  et continue en  $\ell$ . Alors la suite  $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente et de limite  $f(\ell)$ .

**Corollaire 5.8 —** Si  $u$  est une suite convergeant vers  $\ell$  avec  $\ell \neq 0$ .

Alors la suite  $1/u$  est convergente et  $1/u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1/\ell$ ,

**Théorème 5.9 — Cas des limites infinies**

Soit  $u$  une suite convergeant vers  $\ell$ , avec  $\ell$  finie ou infinie, et  $f$  une fonction définie sur un voisinage de  $\ell$  et admettant une limite finie ou infinie  $\ell'$  en  $\ell$ .

Alors la suite  $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente, de limite  $\ell'$ .

**Corollaire 5.10 —** Si  $u$  est une suite convergeant vers 0 et positive à partir d'un certain rang alors la suite  $1/u$  diverge vers  $+\infty$ .**Corollaire 5.11 —** Soit  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  telle que  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \pm\infty$ .

La suite  $1/u$  est définie à partir d'un certain rang et  $1/u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

**VI — Suites usuelles****Définition 6.1 — Suite géométrique**

Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **géométrique** si et seulement si il existe un réel  $q$  tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = qu_n$$

Le réel  $q$  est appelé la **raison** de la suite géométrique.

**Théorème 6.2 — Expression d'une suite géométrique**

Soit une suite géométrique  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de raison  $q$ . On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = q^n u_0$$

Si  $u$  est géométrique à partir du rang  $i \in \mathbb{N}$  alors

$$\forall n \in \llbracket i ; +\infty \llbracket, \quad u_n = q^{n-i} u_i$$

**Définition 6.3 — Suite arithmético-géométrique**

Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **arithmético-géométrique** si et seulement si il existe deux réels  $a$  et  $b$  tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b$$

**Théorème 6.4 — Expression d'une suite arithmético-géométrique**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite géométrique de raison  $a \in \mathbb{R}$ , avec  $a \neq 1$ .

Il existe un réel  $\ell$  tel que la suite  $(u_n - \ell)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique de raison  $a$  et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a^n(u_0 - \ell) + \ell$$

On a  $\ell = b/(1 - a)$ , le **point fixe** de la suite.

Lorsqu'une suite arithmético-géométrique est définie à partir du rang  $i \in \mathbb{N}$ , on a

$$\forall n \in \llbracket i ; +\infty \llbracket, \quad u_n = a^{n-i}(u_i - \ell) + \ell$$

**Définition 6.5 — Suite récurrente linéaire d'ordre 2**

Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est récurrente linéaire d'ordre 2 si et seulement si il existe deux réels  $a$  et  $b$  tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$$

**Théorème 6.6 — Expression en fonction de  $n$** 

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 vérifiant

$$(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$$

On pose  $X^2 = aX + b$  l'équation caractéristique de la suite et  $\Delta$  le discriminant de cette équation.

- Si  $\Delta > 0$ , l'équation admet deux racines réelles  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ .

Il existe alors deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha \lambda_1^n + \beta \lambda_2^n$$

On détermine  $\alpha$  et  $\beta$  à l'aide des valeurs initiales  $u_0$  et  $u_1$ .

- Si  $\Delta = 0$ , l'équation admet une racine réelle  $\lambda$  unique.

Il existe alors deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\alpha n + \beta) \lambda^n$$

On détermine  $\alpha$  et  $\beta$  à l'aide des valeurs initiales  $u_0$  et  $u_1$ .

- Si  $\Delta < 0$ , l'équation admet deux racines complexes conjuguées  $\rho e^{i\theta}$  et  $\rho e^{-i\theta}$ .

Il existe alors deux réels  $A$  et  $B$  tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = A \rho^n \cos(n\theta) + B \rho^n \sin(n\theta)$$

On détermine  $A$  et  $B$  à l'aide des valeurs initiales  $u_0$  et  $u_1$ .

Autre forme : il existe alors deux réels  $A$  et  $\varphi$  tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = A \rho^n \cos(n\theta + \varphi)$$

On détermine  $A$  et  $\varphi$  à l'aide des valeurs initiales  $u_0$  et  $u_1$ .

## VII — Comparaisons lorsque $n$ tend vers $+\infty$

### Définition 7.1 — Suite négligeable devant une autre

On dit que la suite  $u$  est **négligeable** devant la suite  $v$  si et seulement si  $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

On note alors «  $u_n = o(v_n)$  ».

### Propriété 7.2 — Prépondérants en $+\infty$ , suites de limite infinie

si  $\alpha > 0$  alors  $\ln(n) = o(n^\alpha)$

si  $\alpha < \beta$  alors  $n^\alpha = o(n^\beta)$

si  $\beta > 0$  et  $q > 1$  alors  $n^\beta = o(q^n)$

si  $1 < q_1 < q_2$  alors  $q_1^n = o(q_2^n)$

si  $q > 1$  alors  $q^n = o(n!)$

### Propriété 7.3 — Prépondérants en $+\infty$ , suites de limite nulle

si  $q_1 < q_2 < 1$  alors  $q_1^n = o(q_2^n)$

si  $\alpha > 0$  et  $q < 1$  alors  $q^n = o(n^\alpha)$

si  $\alpha > \beta$  alors  $n^\alpha = o(n^\beta)$

### Propriété 7.4 — Calcul avec des $o$

- *Transitivité* : si  $u_n = o(v_n)$  et  $v_n = o(w_n)$  alors  $u_n = o(w_n)$ ;
- *Somme* : si  $u_n = o(w_n)$  et  $v_n = o(w_n)$  alors  $u_n + v_n = o(w_n)$ ;
- *Produit par un scalaire* : si  $u_n = o(v_n)$  et si  $\alpha \in \mathbb{R}^*$  alors  $\alpha u_n = o(v_n)$ ;
- *Produit* : si  $u_n = o(w_n)$  alors  $u_n v_n = o(v_n w_n)$ ;
- *Produit* : si  $u_n = o(w_n)$  et  $v_n = o(x_n)$  alors  $u_n v_n = o(w_n x_n)$ .

### Définition 7.5 — Suites équivalentes

Soit  $u$  et  $v$  deux suites telles que  $u/v$  et  $v/u$  soient définies à partir d'un certain rang.

Les suites  $u$  et  $v$  sont **équivalentes** si et seulement si  $\frac{u}{v} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ , ce que l'on note «  $u_n \sim v_n$  ».

**Remarque I.1** En particulier, il est impossible d'avoir  $u_n \sim 0$ !

On suppose dans la suite du cours que  $u/v$  et  $v/u$  sont définies à partir d'un certain rang.

### Propriété 7.6 — Caractérisation de l'équivalence

$$u_n = v_n + o(v_n) \iff u_n \sim v_n$$

### Théorème 7.7 — Convergence de suites équivalentes

Si  $u_n \sim v_n$  et si  $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$  alors  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$  (la limite  $\ell$  peut éventuellement être infinie).

*Attention !* La réciproque est fautive ! Par exemple  $2^n$  et  $n$  ont la même limite en  $+\infty$  mais ne sont pas équivalentes.

La notion d'équivalents est donc plus fine que la notion de limite. Elle permet de classer les suites ayant la même limite en différentes catégories selon la façon dont elles tendent vers cette limite.

### Proposition 7.8 — Calcul avec des équivalents

- 1) *Transitivité* : si  $u_n \sim v_n$  et si  $v_n \sim w_n$  alors  $u_n \sim w_n$ ;
- 2) *Produit* : si  $u_n \sim w_n$  et si  $v_n \sim x_n$  alors  $u_n v_n \sim w_n x_n$ ;

- 3) *Inverse* : si  $u_n \sim v_n$  alors  $1/u_n \sim 1/v_n$  (sous réserve d'existence);
- 4) *Puissance* : si  $u_n \sim v_n$  alors  $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$  (sous réserve d'existence);
- 5) *Signe* : si  $u_n \sim v_n$  et si  $u_n$  est de signe constant à partir d'un certain rang alors  $u$  et  $v$  sont de même signe à partir d'un certain rang.

### **Théorème 7.9 — Composition avec des fonctions usuelles**

Soit  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de limite nulle. On a

$$\sin(\varepsilon_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \varepsilon_n \iff \sin(\varepsilon_n) = \varepsilon_n + o(\varepsilon_n)$$

$$\cos(\varepsilon_n) - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2}\varepsilon_n^2 \iff \cos(\varepsilon_n) - 1 = -\frac{1}{2}\varepsilon_n^2 + o(\varepsilon_n^2)$$

$$\tan(\varepsilon_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \varepsilon_n \iff \tan(\varepsilon_n) = \varepsilon_n + o(\varepsilon_n)$$

$$\ln(1 + \varepsilon_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \varepsilon_n \iff \ln(1 + \varepsilon_n) = \varepsilon_n + o(\varepsilon_n)$$

$$e^{\varepsilon_n} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \varepsilon_n \iff e^{\varepsilon_n} - 1 = \varepsilon_n + o(\varepsilon_n)$$

$$(1 + \varepsilon_n)^\alpha - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha \varepsilon_n \iff (1 + \varepsilon_n)^\alpha - 1 = \alpha \varepsilon_n + o(\varepsilon_n)$$

