Suites numériques

I — Généralités

Définition 1.1 — Suite numérique
*On appelle **suite numérique** toute fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.*

Notations Soit $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$. On parle de la suite u. On note usuellement la suite u par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et le réel $u(n)$ par u_n.

L'ensemble des suites numériques se note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Une suite peut-être définie **à partir d'un certain rang**, auquel cas on note $(u_n)_{n\geqslant N}$.

II — Suites et ordre

Définition 2.1 — Suite majorée, minorée, bornée
Soit u une suite numérique. La suite u est

1) ***majorée** si et seulement si* $\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \leqslant M$;
2) ***minorée** si et seulement si* $\exists m \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \geqslant m$;
3) ***bornée** si et seulement si*

$$\begin{aligned} & \exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad m \leqslant u_n \leqslant M \\ \Longleftrightarrow \quad & \exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n| \leqslant M \end{aligned}$$

Définition 2.2 — Monotonie d'une suite
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. La suite u est

1) ***croissante** si et seulement si*

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, \qquad m \geqslant n \quad \Longrightarrow \quad u_m \geqslant u_n$$

2) ***strictement croissante** si et seulement si*

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, \qquad m > n \quad \Longrightarrow \quad u_m > u_n$$

3) ***décroissante** si et seulement si*

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, \qquad m \geqslant n \quad \Longrightarrow \quad u_m \leqslant u_n$$

4) ***strictement décroissante** si et seulement si*

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, \qquad m > n \quad \Longrightarrow \quad u_m < u_n$$

*Une suite est **monotone** si elle est soit croissante, soit décroissante.*

Propriété 2.3 — Caractérisation des suites croissantes
Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. La suite u est croissante si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} \geqslant u_n$$

Corollaire 2.4 — Caractérisation des suites décroissantes.
Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. La suite u est décroissante si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \geqslant u_{n+1}$$

Définition 2.5 — Suites constantes
*Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **constante** si et seulement si*

$$\exists a \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = a$$

*Une suite constante à partir d'un certain rang est dite **stationnaire**.*

Propriété 2.6 — *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante si et seulement si*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = u_n$$

III — Suites convergentes

Définition 3.1 — Convergence d'une suite
Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que u converge si il existe un réel ℓ tel que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \qquad n \in [\![N_\varepsilon \,;\, +\infty [\![\quad \Longrightarrow \quad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Théorème 3.2 — Unicité de la limite
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente. Alors il existe une unique réel ℓ telle que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. On l'appelle limite *de u et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou encore $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.*

Définition 3.3 — Suite tendant vers $\pm\infty$
Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

*La suite u **diverge vers $+\infty$** si et seulement si*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists N_A \in \mathbb{N}, \qquad n \geqslant N_A \quad \Longrightarrow \quad u_n \geqslant A$$

*La suite u **diverge vers $-\infty$** ssi $-u$ diverge vers $+\infty$.*

Théorème 3.4 — Suites extraites
Soit u une suite numérique. Si les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une limite commune ℓ alors la suite u est convergente et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

IV — Convergence et ordre

Théorème 4.1 — *Soit u une suite convergente. Alors u est bornée.*

Propriété 4.2 — *Soit u une suite convergente, de limite $\ell > 0$.*

La suite u est strictement positive à partir d'un certain rang.

Propriété 4.3 — *Soit u une suite convergente, de limite $\ell < 0$.*

La suite u est strictement négative à partir d'un certain rang.

Théorème 4.4 — Passage à la limite dans une inégalité
Soit u une suite convergente de limite ℓ.

On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n > 0.$

Alors $\quad \ell \geqslant 0.$

Corollaire 4.5 — *Soit u une suite convergente de limite ℓ. On suppose qu'il existe deux réels a et b tels que* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a < u_n < b$.
Alors $a \leqslant \ell \leqslant b$.

Corollaire 4.6 — *Si u et v sont deux suites convergentes de limites respectives ℓ et ℓ' et si* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n < v_n$.
Alors $\ell \leqslant \ell'$.

Théorème 4.7 — **Théorème d'encadrement**
Soit u, v et w trois suites telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$$

Si v et w sont convergentes et de même limite ℓ alors u est convergente de limite ℓ.

Corollaire 4.8 — *Soit u et v deux suites réelles.*
Si v converge vers 0 et si $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant v_n$ *alors u converge vers 0.*

Théorème 4.9 — **Théorème de comparaison**
Soit u et v deux suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \leqslant v_n$$

1) *Si* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, *alors* $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
2) *Si* $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$, *alors* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.

Théorème 4.10 — **Propriété fondamentale de $\mathbb{R}$**
Toute suite croissante et majorée converge.

Attention ! Un majorant quelconque de u n'est pas nécessairement la limite de u, comme on peut le voir avec la suite $(1-1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, majorée par 2 et convergente vers 1.

Corollaire 4.11 — *Toute suite décroissante et minorée converge.*

De plus $\qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant u_n \leqslant u_0$

Propriété 4.12 — *Soit u est une suite croissante et majorée.*

On a $\qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_0 \leqslant u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Théorème 4.13 — *Toute suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.*

Corollaire 4.14 — *Toute suite décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.*

Définition 4.15 — **Suites adjacentes**
On dit que deux suites u et v sont ***adjacentes*** *si elles sont monotones, de monotonies contraires et si $u-v$ converge vers 0.*

Théorème 4.16 — **Convergence des suites adjacentes**
Soit u et v sont deux suites adjacentes.
Elles sont convergentes et de même limite ℓ. De plus, si u est croissante et v décroissante, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \ell \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n$$

V — Opérations usuelles

Définition 5.1 — Opérations algébriques sur les suites

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques et λ un réel.

1) *Si $\lambda \in \mathbb{R}$, le* ***produit*** *de u par λ est la suite $\lambda u \overset{\text{déf.}}{=} (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*
2) *La* ***somme*** *de u et de v est la suite $u + v \overset{\text{déf.}}{=} (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$*
3) *Le* ***produit*** *de u et de v est la suite $u \times v \overset{\text{déf.}}{=} (u_n \times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$*
4) *Si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0$, alors l'****inverse*** *de u est la suite $(1/u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Une propriété sur une suite peut être vérifiée **à partir d'un certain rang**. Par exemple une suite u peut être non nulle à partir d'un certain rang, ce qui signifie

$$\exists N \in \mathbb{N}, \qquad n \geqslant N \Longrightarrow u_n \neq 0$$

Dans ce cas la suite $1/u$ est définie « à partir d'un certain rang ».

Théorème 5.2 — Linéarité de la convergence

Soit u une suite convergeant vers ℓ et v une suite convergeant vers ℓ'.

Alors la suite $u + v$ est convergente et $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell + \ell'$.

De plus, si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors la suite λu est convergente et $\lambda u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda \times \ell$.

Théorème 5.3 — Produit de deux suites convergentes

Soit u une suite convergeant vers ℓ et v une suite convergeant vers ℓ'.

La suite $u \times v$ est convergente et $u \times v \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \times \ell'$.

Notez que les deux théorèmes précédents prouvent que la suite est convergente *et* donne sa limite.

Corollaire 5.4 — *Soit $p \in \mathbb{N}$ et u une suite de limite finie ℓ.*

La suite u^p est convergente de limite ℓ^p.

Théorème 5.5 — *Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}_+^*$.*

Les suites $u + v$ et $u \times v$ divergent vers $+\infty$.

On en déduit facilement le cas où u diverge vers $-\infty$ ou v converge vers $\ell \in \mathbb{R}_*$.

Théorème 5.6 — *Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Alors les suites $u + v$ et $u \times v$ divergent vers $+\infty$.*

On en déduit facilement le cas où u diverge vers $-\infty$ ou v diverge vers $-\infty$. Tous les autres cas relèvent de « formes indéterminées ». Ils se résument en deux cas « $\infty - \infty$ » et « $0 \times \infty$ ».

Théorème 5.7 — Composée d'une suite et d'une fonction continue

Soit u une suite convergeant vers ℓ et f une fonction définie sur un voisinage de ℓ et continue en ℓ. Alors la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et de limite $f(\ell)$.

Corollaire 5.8 — *Si u est une suite convergeant vers ℓ avec $\ell \neq 0$.*

Alors la suite $1/u$ est convergente et $1/u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1/\ell$,

Théorème 5.9 — Cas des limites infinies

Soit u une suite convergeant vers ℓ, avec ℓ finie ou infinie, et f une fonction définie sur un voisinage de ℓ et admettant une limite finie ou infinie ℓ' en ℓ.

Alors la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, de limite ℓ'.

Corollaire 5.10 — *Si u est une suite convergeant vers 0 et positive à partir d'un certain rang alors la suite $1/u$ diverge vers $+\infty$.*

Corollaire 5.11 — *Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pm\infty$.*
La suite $1/u$ est définie à partir d'un certain rang et $1/u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

VI — Suites usuelles

Définition 6.1 — Suite géométrique
*Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **géométrique** si et seulement si il existe un réel q tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = qu_n$$

*Le réel q est appellé la **raison** de la suite géométrique.*

Théorème 6.2 — Expression d'une suite géométrique
Soit une suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison q. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = q^n u_0$$

Si u est géométrique à partir du rang $i \in \mathbb{N}$ alors

$$\forall n \in [\![i \,;\, +\infty [\![, \qquad u_n = q^{n-i} u_i$$

Définition 6.3 — Suite arithmético-géométrique
*Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **arithmético-géométrique** si et seulement si il existe deux réels a et b tels que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = au_n + b$$

*Le réel a est la **raison** de la suite.*

Théorème 6.4 — Expression d'une suite arithmético-géométrique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $a \in \mathbb{R}$, avec $a \neq 1$.
Il existe un réel ℓ tel que la suite $(u_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = a^n(u_0 - \ell) + \ell$$

*On a $\ell = b/(1-a)$, le **point fixe** de la suite.*

Lorsqu'une suite arithmético-géométrique est définie à partir du rang $i \in \mathbb{N}$, on a

$$\forall n \in [\![i \ ; +\infty [\![, \qquad u_n = a^{n-i}(u_i - \ell) + \ell$$

Définition 6.5 — Suite récurrente linéaire d'ordre 2

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente linéaire d'ordre 2 si et seulement si il existe deux réels a et b tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} = a\, u_{n+1} + b\, u_n$$

Théorème 6.6 — Expression en fonction de n

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 vérifiant

$$(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

On pose $X^2 = aX + b$ l'équation caractéristique de la suite et Δ le dicriminant de cette équation.

- *Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux racines réelles λ_1 et λ_2.*
  Il existe alors deux réels α et β tels que

  $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha\, \lambda_1^n + \beta\, \lambda_2^n$$

  On détermine α et β à l'aide des valeurs initiales u_0 et u_1.
- *Si $\Delta = 0$, l'équation admet une racine réelle λ unique.*
  Il existe alors deux réels α et β tels que

  $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = (\alpha n + \beta)\, \lambda^n$$

  On détermine α et β à l'aide des valeurs initiales u_0 et u_1.
- *Si $\Delta < 0$, l'équation admet deux racines complexes conjuguées $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$.*
  Il existe alors deux réels A et B tels que

  $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = A\, \rho^n \cos(n\theta) + B\, \rho^n \sin(n\theta)$$

  On détermine A et B à l'aide des valeurs initiales u_0 et u_1.

VII — Comparaisons lorsque n tend vers $+\infty$

Définition 7.1 — Suite négligeable devant une autre

On dit que la suite u est ***négligeable*** *devant la suite v si et seulement si* $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

On note alors « $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ *».*

Propriété 7.2 — Prépondérants classiques en $+\infty$, suites de limite infinie

$$\begin{aligned}
\text{si} \quad \alpha > 0 \quad &\text{alors} \quad \ln(n) = \mathrm{o}(n^\alpha)\\
\text{si} \quad \alpha < \beta \quad &\text{alors} \quad n^\alpha = \mathrm{o}(n^\beta)\\
\text{si} \quad \beta > 0 \ \text{ et } \ q > 1 \quad &\text{alors} \quad n^\beta = \mathrm{o}(q^n)\\
\text{si} \quad 1 < q_1 < q_2 \quad &\text{alors} \quad q_1^n = \mathrm{o}(q_2^n)\\
\text{si} \quad q > 1 \quad &\text{alors} \quad q^n = \mathrm{o}(n!)
\end{aligned}$$

Propriété 7.3 — Prépondérants classiques en $+\infty$, suites de limite nulle

$$\begin{aligned}
\text{si} \quad q_1 < q_2 < 1 \quad &\text{alors} \quad q_1^n = \mathrm{o}(q_2^n)\\
\text{si} \quad \alpha > 0 \ \text{ et } \ q < 1 \quad &\text{alors} \quad q^n = \mathrm{o}(n^\alpha)\\
\text{si} \quad \alpha > \beta \quad &\text{alors} \quad n^\alpha = \mathrm{o}(n^\beta)
\end{aligned}$$

Propriété 7.4 — Calcul avec des o

- *Transitivité : si* $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ *et* $v_n = \mathrm{o}(w_n)$ *alors* $u_n = \mathrm{o}(w_n)$*;*
- *Somme : si* $u_n = \mathrm{o}(w_n)$ *et* $v_n = \mathrm{o}(w_n)$ *alors* $u_n + v_n = \mathrm{o}(w_n)$*;*
- *Produit par un scalaire : si* $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ *et si* $\alpha \in \mathbb{R}^*$ *alors* $\alpha\, u_n = \mathrm{o}(v_n)$*;*
- *Produit : si* $u_n = \mathrm{o}(w_n)$ *alors* $u_n v_n = \mathrm{o}(v_n w_n)$*;*
- *Produit : si* $u_n = \mathrm{o}(w_n)$ *et* $v_n = \mathrm{o}(x_n)$ *alors* $u_n v_n = \mathrm{o}(w_n x_n)$*.*

Définition 7.5 — Suites équivalentes

Soit u et v deux suites telles que u/v *et* v/u *soient définies à partir d'un certain rang.*

Les suites u et v sont ***équivalentes*** *si et seulement si* $\dfrac{u}{v} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$*, ce que l'on note «* $u_n \sim v_n$ *».*

Remarque I.1 En particulier, il est impossible d'avoir $u_n \sim 0$!

On suppose dans la suite du cours que u/v et v/u sont définies à partir d'un certain rang.

Propriété 7.6 — Caractérisation de l'équivalence

$$u_n = v_n + \mathrm{o}(v_n) \quad \Longleftrightarrow \quad u_n \sim v_n$$

Théorème 7.7 — Convergence de suites équivalentes

Si $u_n \sim v_n$ *et si* $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ *alors* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ *(la limite* l *peut éventuellement être infinie).*

Attention ! La réciproque est fausse ! Par exemple 2^n et n ont la même limite en $+\infty$ mais ne sont pas équivalentes.

La notion d'équivalents est donc plus fine que la notion de limite. Elle permet de classer les suites ayant la même limite en différentes catégories selon la façon dont elles tendent vers cette limite.

Proposition 7.8 — Calcul avec des équivalents

1) *Transitivité : si* $u_n \sim v_n$ *et si* $v_n \sim w_n$ *alors* $u_n \sim w_n$ *;*
2) *Produit : si* $u_n \sim w_n$ *et si* $v_n \sim x_n$ *alors* $u_n v_n \sim w_n x_n$*;*
3) *Inverse : si* $u_n \sim v_n$ *alors* $1/u_n \sim 1/v_n$ (sous réserve d'existence)*;*
4) *Puissance : si* $u_n \sim v_n$ *alors* $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$ (sous réserve d'existence)*;*
5) *Signe : si* $u_n \sim v_n$ *et si* u_n *est de signe constant à partir d'un certain rang alors u et v sont de même signe à partir d'un certain rang.*

Théorème 7.9 — Composition avec des fonctions usuelles

Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de limite nulle. On a*

$$\begin{aligned}
\sin(\varepsilon_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \varepsilon_n &\iff \sin(\varepsilon_n) = \varepsilon_n + \mathrm{o}(\varepsilon_n)\\
\cos(\varepsilon_n) - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2}\varepsilon_n^2 &\iff \cos(\varepsilon_n) - 1 = -\frac{1}{2}\varepsilon_n^2 + \mathrm{o}(\varepsilon_n^2)\\
\tan(\varepsilon_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \varepsilon_n &\iff \tan(\varepsilon_n) = \varepsilon_n + \mathrm{o}(\varepsilon_n)\\
\ln(1+\varepsilon_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \varepsilon_n &\iff \ln(1+\varepsilon_n) = \varepsilon_n + \mathrm{o}(\varepsilon_n)\\
\mathrm{e}^{\varepsilon_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \varepsilon_n &\iff \mathrm{e}^{\varepsilon_n} - 1 = \varepsilon_n + \mathrm{o}(\varepsilon_n)\\
(1+\varepsilon_n)^\alpha - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha\varepsilon_n &\iff (1+\varepsilon_n)^\alpha - 1 = \alpha\varepsilon_n + \mathrm{o}(\varepsilon_n)
\end{aligned}$$