

Nombres réels

I — Ensembles de nombres

Définition 1.1 — Nombres réels

On appelle \mathbb{R} l'ensemble des nombres rationnels \mathbb{Q} auquel on adjoint toutes les limites des suites convergentes de rationnels.

II — Addition et multiplication

Proposition 2.1 — Propriétés de l'addition et de la multiplication

– elle sont **associatives** (et peuvent donc être notée sans parenthèses)

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad (x + y) + z = x + (y + z) \\ \text{et} \quad (xy)z = x(yz)$$

– elle sont **commutatives**

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x + y = y + x \quad \text{et} \quad xy = yx$$

– elles possèdent chacune un **élément neutre**

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x + 0 = x \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad x \times 1 = x$$

– chaque élément de \mathbb{R} possède un **opposé**

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists x' \in \mathbb{R}, \quad x + x' = 0$$

(cet opposé est unique, il est noté $-x$);
– chaque élément de \mathbb{R}^* possède un **inverse**

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \exists x^* \in \mathbb{R}, \quad x \times x^* = 1$$

(cet inverse est unique, il est noté $1/x$);
– la multiplication est **distributive** sur l'addition

$$\forall (a, x, y) \in \mathbb{R}^3, \quad a \times (x + y) = a \times x + a \times y$$

III — Notation puissance

Définition 3.1 — Puissances entières positives

On note

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{N}, \quad x^n = 1 \times \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}}$$

Théorème 3.2 — Propriété caractéristique de la notation puissance

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall (n, m) \in \mathbb{N}^2 \quad x^n x^m = x^{n+m}$$

Propriété 3.3 —

- 1) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ $(x^n)^m = x^{nm} = (x^m)^n$.
- 2) Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$ $(xy)^n = x^n y^n$.

Définition 3.4 — Puissances entières négatives

Soit $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note

$$x^{-1} = 1/x \quad \text{et} \quad x^{-n} = (x^{-1})^n$$

Théorème 3.5 — Propriété caractéristique de la notation puissance

Pour $(x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2$ et $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$ on a

$$x^{n+m} = x^n x^m \quad (x^n)^m = x^{nm} \quad (xy)^n = x^n y^n$$

IV — Relation d'ordre**Proposition 4.1 — Propriété de la relation d'ordre dans \mathbb{R}**

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

- 1) si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a + c \leq b + d$ (addition terme à terme);
- 2) si $a \leq b$ et $0 \leq c$ alors $ac \leq bc$.
- 3) si $a \leq b$ et $c \leq 0$ alors $bc \leq ac$.
- 4) si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$ alors $0 \leq ac \leq bd$ (multiplication terme à terme d'inégalités positives).
- 5) $0 \leq a \leq b \implies a^2 \leq b^2$ (croissance de $x \mapsto x^2$ sur \mathbb{R}_+);
- 6) $a \leq b \leq 0 \implies a^2 \geq b^2$ (décroissance de $x \mapsto x^2$ sur \mathbb{R}_-).

Définition 4.2 — Minorant, majorant

Soit E une partie de \mathbb{R} .

On dit que $m \in \mathbb{R}$ est un **minorant** de E si et seulement si $\forall x \in E, m \leq x$.

On dit que $M \in \mathbb{R}$ est un **majorant** de E si et seulement si $\forall x \in E, M \geq x$.

Définition 4.3 — Plus petit élément, plus grand élément

Soit E une partie de \mathbb{R} .

On dit que x_0 est le **plus petit élément** de E si et seulement si

$$x_0 \in E, \quad \text{et} \quad \forall x \in E, \quad x_0 \leq x$$

On le note alors $\min(E)$.

On dit que x_0 est le **plus grand élément** de E si et seulement si

$$x_0 \in E, \quad \text{et} \quad \forall x \in E, \quad x_0 \geq x$$

On le note alors $\max(E)$.

Définition 4.4 — Borne supérieure, borne inférieure

Si l'ensemble des majorants de E admet un plus petit élément, on dit que c'est la **borne supérieure** de E . Notation : $\sup(E)$.

Si l'ensemble des minorants de E admet un plus grand élément, on dit que c'est la **borne inférieure** de E . Notation : $\inf(E)$.

V — Partie entière

Théorème 5.1 — Soit $x \in \mathbb{R}$. L'ensemble $]x - 1 ; x]$ contient un unique entier. On l'appelle **partie entière de x** et on le note $\lfloor x \rfloor$.

On retiendra que $\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier vérifiant l'une des inégalités

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \iff \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

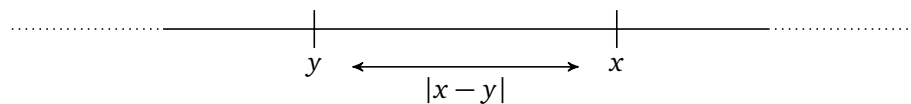
VI — Valeur absolue

Définition 6.1 — Valeur absolue

La fonction **valeur absolue** est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} |x| \stackrel{\text{déf.}}{=} x & \text{si } x \geq 0 \\ |x| \stackrel{\text{déf.}}{=} -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Si x et y sont deux réels, $|x - y|$ s'interprète comme la distance, sur la droite réelle, entre x et y .



Propriété 6.2 — Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$

- $|x| \geq 0$;
- $|x| = 0 \iff x = 0$;
- $|x| = |-x|$
- $|xy| = |x||y|$ et $|x^n| = |x|^n$;
- $|x|^2 = x^2$ et donc $\sqrt{x^2} = |x|$;
- $|1/y| = 1/|y|$ et $|x/y| = |x|/|y|$;

Théorème 6.3 — Inégalités et valeur absolue

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

- $|x| \leq y \iff -y \leq x \leq y$;
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \leq |x|$
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |x + y| \leq |x| + |y|$ (inégalité triangulaire);
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |x - y| \leq |x| + |y|$;