Nombres réels

I — Ensembles de nombres

Définition 1.1 — Nombres réels
On appelle $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ auquel on adjoint toutes les limites des suites convergentes de rationnels.

Théorème 1.2 — Propriété fondamentale de $\mathbb{R}$
Toute suite croissante et majorée de réels converge.

II — Addition et multiplication

Proposition 2.1 — Propriétés de l'addition et de la multiplication de réels

– *elle sont **associatives** (et peuvent donc être notée sans parenthèses)*

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \qquad (x+y)+z = x+(y+z) \qquad \textit{et} \qquad (xy)z = x(yz)$$

– *elle sont **commutatives***

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad x+y = y+x \qquad \textit{et} \qquad xy = yx$$

– *elles possèdent chacune un **élément neutre***

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x+0 = x \qquad \textit{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad x \times 1 = x$$

– *chaque élément de $\mathbb{R}$ possède un **opposé***

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists x' \in \mathbb{R}, \qquad x + x' = 0$$

(cet opposé est unique, il est noté $-x$) ;

– *chaque élément de $\mathbb{R}^*$ possède un **inverse***

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \exists x^* \in \mathbb{R}, \qquad x \times x^* = 1$$

(cet inverse est unique, il est noté $1/x$) ;

– *la multiplication est **distributive** sur l'addition*

$$\forall (a,x,y) \in \mathbb{R}^3, \qquad a \times (x+y) = a \times x + a \times y$$

III — Notation puissance

Définition 3.1 — Puissances entières positives
On note

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{N}, \qquad x^n = 1 \times \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}}$$

Théorème 3.2 — Propriété caractéristique de la notation puissance

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall (n,m) \in \mathbb{N}^2 \qquad x^n x^m = x^{n+m}$$

Propriété 3.3 —

1) *Pour* $x \in \mathbb{R}$ *et* $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ $\quad (x^n)^m = x^{nm} = (x^m)^n$.
2) *Pour* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *et* $n \in \mathbb{N}$ $\quad (xy)^n = x^n y^n$.

Définition 3.4 — Puissances entières négatives

Soit $x \in \mathbb{R}^*$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$. *On note*

$$x^{-1} = 1/x \qquad \text{et} \qquad x^{-n} = (x^{-1})^n$$

Théorème 3.5 — Propriété caractéristique de la notation puissance

Pour $(x,y) \in (\mathbb{R}^*)^2$ *et* $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$ *on a*

$$x^{n+m} = x^n x^m \qquad (x^n)^m = x^{nm} \qquad (xy)^n = x^n y^n$$

IV — Relation d'ordre

Proposition 4.1 — Propriété de la relation d'ordre dans $\mathbb{R}$

Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$.

1) *si* $a \leqslant b$ *et* $c \leqslant d$ *alors* $a + c \leqslant b + d$ *(addition terme à terme) ;*
2) *si* $a \leqslant b$ *et* $0 \leqslant c$ *alors* $ac \leqslant bc$.
3) *si* $a \leqslant b$ *et* $c \leqslant 0$ *alors* $bc \leqslant ac$.
4) *si* $0 \leqslant a \leqslant b$ *et* $0 \leqslant c \leqslant d$ *alors* $0 \leqslant ac \leqslant bd$ *(multiplication terme à terme d'inégalités* positives*)*.
5) $0 \leqslant a \leqslant b \implies a^2 \leqslant b^2$ *(croissance de* $x \mapsto x^2$ *sur* $\mathbb{R}_+$*) ;*
6) $a \leqslant b \leqslant 0 \implies a^2 \geqslant b^2$ *(décroissance de* $x \mapsto x^2$ *sur* $\mathbb{R}_-$*)*.

Définition 4.2 — Minorant, majorant

Soit E *une partie de* $\mathbb{R}$.

On dit que $m \in \mathbb{R}$ *est un* ***minorant*** *de* E *si et seulement si* $\quad \forall x \in E, \quad m \leqslant x$.

On dit que $M \in \mathbb{R}$ *est un* ***majorant*** *de* E *si et seulement si* $\quad \forall x \in E, \quad M \geqslant x$.

Définition 4.3 — Plus petit élément, plus grand élément

Soit E *une partie de* $\mathbb{R}$.

On dit que x_0 *est le* ***plus petit élément*** *de* E *si et seulement si*

$$x_0 \in E, \qquad \text{et} \qquad \forall x \in E, \qquad x_0 \leqslant x$$

On le note alors $\min(E)$.

On dit que x_0 *est le* ***plus grand élément*** *de* E *si et seulement si*

$$x_0 \in E, \qquad \text{et} \qquad \forall x \in E, \qquad x_0 \geqslant x$$

On le note alors $\max(E)$.

Définition 4.4 — Borne supérieure, borne inférieure

Si l'ensemble des majorants de E *admet un plus petit élément, on dit que c'est la* ***borne supérieure*** *de* E. *Notation :* $\sup(E)$.

Si l'ensemble des minorants de E *admet un plus grand élément, on dit que c'est la* ***borne inférieure*** *de* E. *Notation :* $\inf(E)$.

V — Partie entière

Théorème 5.1 — *Soit $x \in \mathbb{R}$. L'ensemble $]\,x-1\,;\,x\,]$ contient un unique entier. On l'appelle* ***partie entière de x*** *et on le note $\lfloor x \rfloor$.*

On retiendra que $\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier vérifiant l'une des inégalités

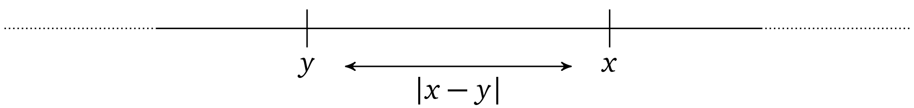
$$x-1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x \quad \Longleftrightarrow \quad \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$$

VI — Valeur absolue

Définition 6.1 — Valeur absolue
La fonction ***valeur absolue*** *est définie par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \begin{cases} |x| \overset{\text{déf.}}{=} x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ |x| \overset{\text{déf.}}{=} -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Si x et y sont deux réels, $|x-y|$ s'interprète comme la distance, sur la droite réelle, entre x et y.



Propriété 6.2 — *Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$*

- $|x| \geqslant 0$;
- $|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;
- $|x| = |-x|$
- $|xy| = |x|\,|y|$ *et* $|x^n| = |x|^n$;
- $|x|^2 = x^2$ *et donc* $\sqrt{x^2} = |x|$;
- $|1/y| = 1/|y|$ *et* $|x/y| = |x|/|y|$;

Théorème 6.3 — Inégalités et valeur absolue
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

- $|x| \leqslant y \Longleftrightarrow -y \leqslant x \leqslant y$;
- $\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x \leqslant |x|$
- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad |x+y| \leqslant |x| + |y|$ *(inégalité triangulaire);*
- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad |x-y| \leqslant |x| + |y|$;