Probabilités

I — Exemples d'expériences aléatoires

II — Univers – Évènements

Définition 2.1 — Expérience aléatoire — Univers
*Une expérience **aléatoire** est un protocole dont on ne pas prédire le résultat à l'avance..*
*La collection des résultats possibles de l'expérience s'appelle l'**univers** de l'expérience. On le note* $\boldsymbol{\Omega}$.

Définition 2.2 — Évènement aléatoire
*On appelle **événement aléatoire** tout sous-ensemble de* Ω.
Si $\omega \in \Omega$*, alors le singleton* $\{\omega\}$ *est appelé **événement élémentaire**.*

Langage probabiliste	Langage ensembliste
Résultat possible	ω, élément de Ω
Évènement	A, partie de Ω
Évènement élémentaire	$\{\omega\}$, singleton de Ω
Évènement certain	Ω
Évènement impossible	$\varnothing$
L'événement « A ne se produit pas »	$\overline{A}$
L'événement « A ou B »	$A \cup B$
L'événement « A et B »	$A \cap B$
A et B sont **incompatibles**	$A \cap B = \varnothing$
A **implique** B	$A \subset B$

Vocabulaire L'ensemble des événements s'appelle la **tribu** des événements. On note souvent $\mathscr{T}$ l'ensemble des événements. On qualifie $(\Omega, \mathscr{T})$ d'**espace probabilisable**.
Dans tout ce chapitre, et durant toute l'année, Ω est un ensemble fini et les événements sont les parties de Ω.

III — Probabilité

Définition 3.1 — Probabilité
*On appelle **probabilité** sur* $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ *toute application* P *de* $\mathscr{P}(\Omega)$ *dans* $[\,0\,;\,1\,]$ *telle que*

1) $P(\Omega) = 1$;
2) *si* A *et* B *sont deux événements incompatibles alors*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Vocabulaire Sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$, il est possible de définir une probabilité P. Le triplet $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ s'appelle un **espace probabilisé**.

Proposition 3.2 — Propriété d'une probabilité
Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé.

1) $P(\varnothing) = 0$
2) *Pour tout événement A, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$*
3) *Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont n événements deux à deux incompatibles alors*
$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$
4) *Si A et B sont deux événements et que A implique B ($A \subset B$) alors $P(A) \leqslant P(B)$ et $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$;*
5) *Si A et B sont deux événements alors*
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Vocabulaire Un événement A tel que $P(A) = 0$ est dit **quasi–impossible**. Un événement A tel que $P(A) = 1$ est dit **quasi–certain**.

Propriété 3.3 — *Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ un ensemble fini.*

1) *Soit P une probabilité sur Ω. Pour $i \in [\![0 ; n]\!]$ on note $p_i = P(\omega_i)$. Les réels p_i vérifient*
$$\forall i \in [\![1 ; n]\!], \qquad p_i \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$
2) *réciproquement si $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ est un n–uplet de réels positif et de somme 1, alors il existe une unique probabilité P sur Ω telle que $\forall i \in [\![0 ; n]\!]$ $p_i = P(\omega_i)$.*

Définition 3.4 — Équiprobabilité
Soit Ω un ensemble fini.
*On appelle **probabilité uniforme** ou **équiprobabilité** sur Ω l'unique probabilité qui a la même valeur pour tous les événements élémentaires.*

Dans ce cas, si A est un événement,
$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas où } A \text{ se réalise}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

IV — Probabilité conditionnelle

Définition 4.1 — Probabilité conditionnée à un événement
Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé, et A un événement tel que $P(A) \neq 0$.
*La **probabilité sachant que A est réalisé** est définie par*
$$\forall B \subset \Omega, \qquad P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Définition 4.2 — Couple d'événements indépendants
Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé.
*Deux événements A et B sont **indépendants** si et seulement si*
$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Définition 4.3 — Indépendance deux à deux, mutuelle
Soit A_1, A_2, ... A_n une suite de n événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$.
*Ces événements sont **mutuellement indépendants** si et seulement si*
$$\forall \{i_1, i_2, \dots, i_r\} \subset [\![1 ; n]\!], \qquad P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_r}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_r})$$

Propriété 4.4 — *Soit A_1, A_2, ... A_n une suite de n événements mutuellement indépendants. Soit $i \in [\![1 ; n-1]\!]$, B un événement pouvant s'écrire comme réunion ou intersection des A_j ou de leur contraire pour $1 \leqslant j \leqslant i$ et soit C un événement pouvant s'écrire comme réunion ou intersection des A_j ou de leur contraire pour $i+1 \leqslant j \leqslant n$.*
Alors B et C sont indépendants.

V — Trois formules essentielles

Théorème 5.1 — Formule des probabilités composées
Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé et soit $A_1, A_2, \dots, A_n$ une suite d'événements tels que $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_{n-1}) \neq 0$:

$$P\big(A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_n\big) = P_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_{n-1}}\big(A_n\big) \times P_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_{n-2}}\big(A_{n-1}\big) \times \cdots \times P_{A_1}\big(A_2\big) P\big(A_1\big)$$

Définition 5.2 — Système complet d'événements
*On appelle **système complet d'événement** un p–uplet d'événements $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ de probabilité non nulle, deux à deux disjoints et dont l'union est égale à Ω :*

- $\forall i \in [\![1 ; p]\!], \qquad P(A_i) \neq 0;$
- $\forall (i,j) \in [\![1 ; p]\!]^2, i \neq j \qquad A_i \cap A_j = \varnothing;$
- $\bigcup_{i=0}^{p} A_i = \Omega.$

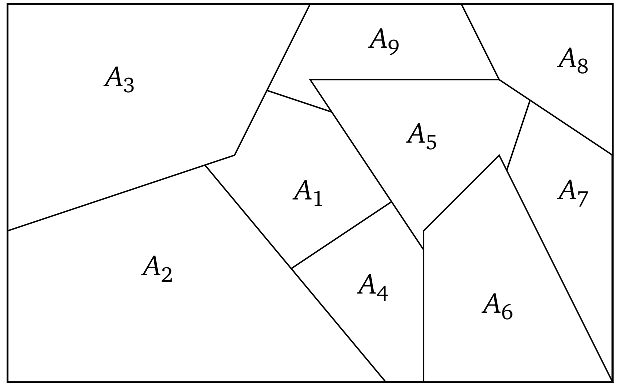

FIGURE I.1 — *Représentation d'un système complet d'événement.*

Théorème 5.3 — Formule des probabilités totales
Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé et soit $A_1, A_2, \dots, A_n$ un système complet d'événements.

$$\forall B \subset \Omega, \qquad P(B) = \sum_{k=1}^{n} P_{A_k}(B) P(A_k)$$

Théorème 5.4 — Formule de Bayes
Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé et soit A et B deux événements de probabilités non nulles. On a

$$P_A(B) = \frac{P(B)}{P(A)} P_B(A)$$