Probabilités

I — Exemples d'expériences aléatoires

II — Univers – Évènements

Définition 2.1 — Expérience aléatoire — Univers

*Une expérience **aléatoire** est un protocole dont on ne pas prédire le résultat à l'avance..*

*La collection des résultats possibles de l'expérience s'appelle l'**univers** de l'expérience. On le note* Ω.

Définition 2.2 — Évènement aléatoire

*On appelle **évènement aléatoire** tout sous-ensemble de* Ω.

Si $\omega \in \Omega$*, alors le singleton* $\{\omega\}$ *est appelé **évènement élémentaire**.*

Langage probabiliste	Langage ensembliste
Résultat possible	ω, élément de Ω
Évènement	A, partie de Ω
Évènement élémentaire	$\{\omega\}$, singleton de Ω
Évènement certain	Ω
Évènement impossible	$\varnothing$
L'évènement « A ne se produit pas »	$\overline{A}$
L'évènement « A ou B »	$A \cup B$
L'évènement « A et B »	$A \cap B$
A et B sont **incompatibles**	$A \cap B = \varnothing$
A **implique** B	$A \subset B$

Vocabulaire L'ensemble des évènements s'appelle la **tribu** des évènements. On note souvent $\mathscr{T}$ l'ensemble des évènements. On qualifie $(\Omega, \mathscr{T})$ d'**espace probabilisable**.

Dans tout ce chapitre, et durant toute l'année, Ω est un ensemble fini et les évènements sont les parties de Ω.

III — Probabilité

Définition 3.1 — Probabilité

*On appelle **probabilité** sur* $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ *toute application* P *de* $\mathscr{P}(\Omega)$ *dans* $[\,0\,;\,1\,]$ *telle que*

1) $P(\Omega) = 1$;
2) *si* A *et* B *sont deux évènements incompatibles alors*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Vocabulaire Sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$, il est possible de définir une probabilité P. Le triplet $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ s'appelle un **espace probabilisé**.

Proposition 3.2 — Propriété d'une probabilité

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ *un espace probabilisé.*

1) $P(\varnothing) = 0$
2) *Pour tout évènement* A, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

3) Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont n évènements deux à deux incompatibles alors

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

4) Si A et B sont deux évènements et que A implique B ($A \subset B$) alors $P(A) \leqslant P(B)$ et $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$;

5) Si A et B sont deux évènements alors

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Vocabulaire Un évènement A tel que $P(A) = 0$ est dit **quasi–impossible**. Un évènement A tel que $P(A) = 1$ est dit **quasi–certain**.

Propriété 3.3 — *Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ un ensemble fini.*

1) Soit P une probabilité sur Ω. Pour $i \in [\![0 ; n]\!]$ on note $p_i = P(\omega_i)$. Les réels p_i vérifient

$$\forall i \in [\![1 ; n]\!], \qquad p_i \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

2) réciproquement si $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ est un n–uplet de réels positif et de somme 1, alors il existe une unique probabilité P sur Ω telle que $\forall i \in [\![0 ; n]\!] \quad p_i = P(\omega_i)$.

Définition 3.4 — Équiprobabilité

Soit Ω un ensemble fini.

*On appelle **probabilité uniforme** ou **équiprobabilité** sur Ω l'unique probabilité qui a la même valeur pour tous les évènements élémentaires.*

Dans ce cas, si A est un évènement,

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas où } A \text{ se réalise}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

IV — Probabilité conditionnelle

Définition 4.1 — Probabilité conditionnée à un évènement

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé, et A un évènement telle que $P(A) \neq 0$.

*La **probabilité sachant que A est réalisé** est définie par*

$$\forall B \subset \Omega, \qquad P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Définition 4.2 — Couple d'évènements indépendants

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé.

*Deux évènements A et B sont **indépendants** si et seulement si*

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Définition 4.3 — Indépendance deux à deux, mutuelle

*Soit A_1, A_2, ... A_n une suite de n évènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$. Ces évènements sont **mutuellement indépendants** si et seulement si*

$$\forall \{i_1, i_2, \dots, i_r\} \subset [\![1 ; n]\!], \qquad P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_r}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_r})$$

Propriété 4.4 — *Soit A_1, A_2, ... A_n une suite de n évènements mutuellement indépendants. Soit $i \in [\![1 ; n-1]\!]$, B un évènement pouvant s'écrire comme réunion ou intersection des A_j ou de leur contraire pour $1 \leqslant j \leqslant i$ et soit C un évènement pouvant s'écrire comme réunion ou intersection des A_j ou de leur contraire pour $i+1 \leqslant j \leqslant n$.*

Alors B et C sont indépendants.

V — Trois formules essentielles

Théorème 5.1 — Formule des probabilités composées

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé et soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ une suite d'évènements tels que $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_{n-1}) \neq 0$:

$$P\big(A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_n\big) = P_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_{n-1}}\big(A_n\big) \times P_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_{n-2}}\big(A_{n-1}\big) \times \cdots \times P_{A_1}\big(A_2\big)\, P\big(A_1\big)$$

Définition 5.2 — Système complet d'évènements

*On appelle **système complet d'évènement** un p–uplet d'évènements $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ de probabilité non nulle, deux à deux disjoints et dont l'union est égale à Ω :*

- $\forall i \in [\![1 \,;\, p]\!], \qquad P(A_i) \neq 0$;
- $\forall (i,j) \in [\![1 \,;\, p]\!]^2, i \neq j \qquad A_i \cap A_j = \varnothing$;
- $\bigcup_{i=0}^{p} A_i = \Omega$.

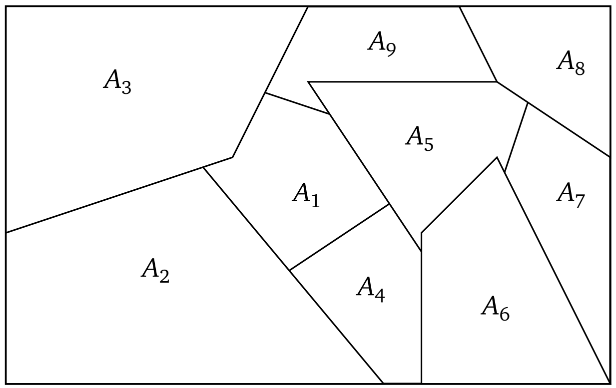

FIGURE I.1 — *Représentation d'un système complet d'évènement.*

Théorème 5.3 — Formule des probabilités totales

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé et soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ un système complet d'évènements.

$$\forall B \subset \Omega, \qquad P(B) = \sum_{k=1}^{n} P_{A_k}(B) P(A_k)$$

Théorème 5.4 — Formule de Bayes

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé et soit A et B deux évènements de probabilités non nulles. On a

$$P_A(B) = \frac{P(B)}{P(A)} P_B(A)$$