Les polynômes

Notations du chapitre — *Dans ce chapitre* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

On note par convention $x \mapsto x^0$ *la fonction constante égale à* 1.

I — Fonctions polynômes

Définition 1.1 — Fonction polynôme

On appelle ***monôme*** *» ou* ***fonction monôme*** *toute fonction de* $\mathbb{K}$ *dans* $\mathbb{K}$ *de la forme* $x \mapsto x^n$ *avec* $n \in \mathbb{N}$.

La fonction P *est une* ***fonction polynôme*** *(ou simplement un* ***polynôme****) à coefficients dans* $\mathbb{K}$ *si et seulement si*

$$\exists n \in \mathbb{N}, \quad \exists (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}, \qquad \forall x \in \mathbb{K}, \qquad P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

Proposition 1.2 — Coefficients du polynôme nul

Les coefficients du polynôme nul sont tous nuls.

Corollaire 1.3 — Base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$

La famille de fonctions polynômes $(x \to 1, x \to x, x \to x^2, \dots, x \to x^n)$ *est libre.*

Cette famille étant une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[x]$*, c'est donc une base de* $\mathbb{K}_n[x]$.

Théorème 1.4 — Théorème fondamental sur les polynômes

Deux fonctions polynômes sont égales sur $\mathbb{K}$ *si et seulement si leurs coefficients sont égaux.*

Vocabulaire et notations

- Les réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ s'appellent les **coefficients du polynôme** P.
- La fonction constante nulle est un polynôme : le **polynôme nul**.
- L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}[x]$ (ou $\mathbb{K}[X]$ selon la manière dont on note l'inconnue).
- Un polynôme P qui s'écrit de la forme précédente est dit « **de degré inférieur ou égal à** n ». L'ensemble de ces polynômes est noté $\mathbb{K}_n[x]$

II — Opérations sur les polynômes

Propriété 2.1 — Opérations sur les polynômes

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $(P, Q) \in (\mathbb{K}[x])^2$.

- *les fonctions* $P + Q$ *et* λP *sont des fonctions polynômes ;*
- *la fonction* $P \times Q$ *est une fonction polynôme ;*
- *la fonction* $P \circ Q$ *est une fonction polynôme.*

Corollaire 2.2 — *Les ensembles* $\mathbb{K}[x]$ *et* $\mathbb{K}_n[x]$ *sont deux sous-espaces vectoriels de l'ensemble des fonctions de* $\mathbb{K}$ *dans* $\mathbb{K}$.

Propriété 2.3 — Polynôme dérivé

Soit $P \in \mathbb{K}[x]$, P non nul, s'écrivant

$$\forall x \in \mathbb{K}, \qquad P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

avec $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$.

*Le **polynôme dérivé** du polynôme P est la fonction*

$$\forall x \in \mathbb{K}, \qquad P'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1}$$

Propriété 2.4 — Propriété de la dérivation de polynômes

Soient P et Q deux fonctions polynômes et $\lambda \in \mathbb{K}$

1) $(P+Q)' = P' + Q'$;
2) $(\lambda P)' = \lambda P'$;
3) $(P \times Q)' = P'Q + Q'P$.
4) $(P \circ Q)' = Q' \times P' \circ Q$.

Théorème 2.5 — Formule de Taylor sur les polynômes

Soit $P \in \mathbb{K}[x]$, P non nul, et n le degré de P. Alors

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Corollaire 2.6 — *D'ailleurs, en fait,*

$$\forall a \in \mathbb{K}, \ \forall x \in \mathbb{K}, \quad P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

III — Degré

Définition 3.1 — Degré d'un polynôme non nul

Soit P un polynôme non nul s'écrivant

$$\forall x \in \mathbb{K}, \qquad P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

avec $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$.

*L'ensemble des entiers $\{k \in \mathbb{N} \ \text{ tel que } \ a_k \neq 0\}$ admet un plus grand élément : c'est le **degré** du polynôme P.*

- *a_n est alors **le coefficient de plus haut degré** de P ;*
- *$a_n x^n$ son **le monôme de plus haut degré** de P.*

Si P est le polynôme nul, on définit par convention son degré comme étant $-\infty$.

Propriété 3.2 — Degré et combinaison linéaire de polynômes

Soit P et Q deux fonctions polynômes.

- *Si* $\mathrm{d}^\circ(P) \neq \mathrm{d}^\circ(Q)$ *alors* $\quad \mathrm{d}^\circ(P+Q) = \sup(\mathrm{d}^\circ(P), \mathrm{d}^\circ(Q))$
- *dans le cas général* $\quad \mathrm{d}^\circ(P+Q) \leqslant \sup(\mathrm{d}^\circ(P), \mathrm{d}^\circ(Q))$
- *pour* $\lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0$ $\quad \mathrm{d}^\circ(\lambda P) = \mathrm{d}^\circ(P)$
- *dans le cas général* $\quad \mathrm{d}^\circ(P \times Q) = \mathrm{d}^\circ(P) + \mathrm{d}^\circ(Q)$
- *dans le cas général* $\quad \mathrm{d}^\circ(P(Q)) = \mathrm{d}^\circ(P) \times \mathrm{d}^\circ(Q)$.

Corollaire 3.3 — Intégrité de l'ensemble des polynômes

Soit P et Q deux fonctions polynômes.

Si, pour tout x de $\mathbb{K}$ on a $P(x) \times Q(x) = 0$ alors $P = 0$ ou $Q = 0$.

Corollaire 3.4 — « Simplification » par un polynôme non nul

Soit P, Q_1 et Q_2 trois fonction polynômes.

Si $PQ_1 = PQ_2$ et si P n'est pas le polynôme nul alors $Q_1 = Q_2$.

Propriété 3.5 — Degré du polynôme dérivé

Si P est une fonction polynôme non constante, alors $\mathrm{d}^\circ(P') = \mathrm{d}^\circ(P) - 1$.

Si P est constant alors P' est nul.

IV — Racines

Définition 4.1 — Racine d'un polynôme

*Soit $P \in \mathbb{K}[x]$. On appelle **racine** du polynôme P tout $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $P(\alpha) = 0$.*

Théorème 4.2 — Théorème de d'Alembert

Soit $P \in \mathbb{C}[x]$ un polynôme non constant.

Le polynôme P admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Théorème 4.3 — Factorisation et racine

Soit $P \in \mathbb{K}[x]$ et α une racine de P. Il existe un polynôme Q tel que :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \qquad P(x) = (x - \alpha) \times Q(x)$$

*Le polynôme P est dit **factorisable** par $(x - \alpha)$.*

Corollaire 4.4 — Cas de plusieurs racines

Soit $P \in \mathbb{K}[x]$ et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ p racines distinctes de P.

Le polynôme P est factorisable par $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_p)$.

Théorème 4.5 — Nombre de racines d'un polynôme de degré n.

Soit $P \in \mathbb{K}[x]$ un polynôme non nul de degré inférieur ou égal à n.

Le polynôme P admet au plus n racines distinctes.

Corollaire 4.6 — *Soit $n \in \mathbb{N}$ et P un polynôme de degré inférieur ou égal à n.*

Si P possède au moins $n+1$ racines distinctes alors P est le polynôme nul.

Corollaire 4.7 — *Deux fonctions polynômes sont égales en un nombre infini de points de $\mathbb{K}$ si et seulement si leurs coefficients sont égaux.*

Définition 4.8 — Ordre de multiplicité d'une racine

Soit $P \in \mathbb{K}[x]$, P non nul.

1. *α est **racine d'ordre au moins r** de P si et seulement si P est factorisable par $(x - \alpha)^r$.*
2. *α est **racine d'ordre r** si et seulement si P est factorisable par $(x - \alpha)^r$ mais pas par $(x - \alpha)^{r+1}$. L'entier r est **l'ordre de multiplicité de la racine α**.*
3. *La racine α est **racine multiple** si son ordre de multiplicité est au moins 2, **racine simple** sinon.*

Proposition 4.9 — Ordre de multiplicité et factorisation

Soit P un polynôme et α une racine de P d'ordre de multiplicité r. Il existe un polynôme R tel que

$$R(\alpha) \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{K}, \qquad P(x) = (x - \alpha)^r R(x)$$

Théorème 4.10 — Ordre de multiplicité et dérivé d'un polynôme

Soit $P \in \mathbb{K}[x]$, P non nul et $\alpha \in \mathbb{K}$.

Le scalaire α est racine d'ordre r de P si et seulement si

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = P''(\alpha) = \cdots = P^{(r-1)}(\alpha) = 0 \qquad \text{et} \qquad P^{(k)}(\alpha) \neq 0$$

Corollaire 4.11 — Cas des racines simples

Soit P un polynôme et α une de ses racines. Alors α est racine simple de P si et seulement si $P'(\alpha) \neq 0$.