

LES POLYNÔMES

Notations du chapitre — Dans ce chapitre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .
On note par convention $x \mapsto x^0$ la fonction constante égale à 1.

I — Fonctions polynômes

Définition 1.1 — Fonction polynôme

On appelle **monôme** ou **fonction monôme** toute fonction de \mathbb{K} dans \mathbb{K} de la forme $x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

La fonction P est une **fonction polynôme** (ou simplement un **polynôme**) à coefficients dans \mathbb{K} si et seulement si

$$\exists n \in \mathbb{N}, \quad \exists (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}, \\ \forall x \in \mathbb{K}, \quad P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

Proposition 1.2 — Coefficients du polynôme nul

Les coefficients du polynôme nul sont tous nuls.

Corollaire 1.3 — Base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$

La famille de fonctions polynômes $(x \mapsto 1, x \mapsto x, x \mapsto x^2, \dots, x \mapsto x^n)$ est libre.
Cette famille étant une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[x]$, c'est donc une base de $\mathbb{K}_n[x]$.

Théorème 1.4 — Théorème fondamental sur les polynômes

Deux fonctions polynômes sont égales sur \mathbb{K} si et seulement si leurs coefficients sont égaux.

Vocabulaire et notations

- Les réels a_0, a_1, \dots, a_n s'appellent les **coefficients du polynôme** P .
- La fonction constante nulle est un polynôme : le **polynôme nul**.
- L'ensemble des polynômes à coefficients dans \mathbb{K} est noté $\mathbb{K}[x]$ (ou $\mathbb{K}[X]$ selon la manière dont on note l'inconnue).
- Un polynôme P qui s'écrit de la forme précédente est dit « **de degré inférieur ou égal à n** ». L'ensemble de ces polynômes est noté $\mathbb{K}_n[x]$

II — Opérations sur les polynômes

Propriété 2.1 — Opérations sur les polynômes

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $(P, Q) \in (\mathbb{K}[x])^2$.

- les fonctions $P + Q$ et λP sont des fonctions polynômes;
- la fonction $P \times Q$ est une fonction polynôme;
- la fonction $P \circ Q$ est une fonction polynôme.

Corollaire 2.2 — Les ensembles $\mathbb{K}[x]$ et $\mathbb{K}_n[x]$ sont deux sous-espaces vectoriels de l'ensemble des fonctions de \mathbb{K} dans \mathbb{K} .

Propriété 2.3 — Polynôme dérivé

Soit $P \in \mathbb{K}[x]$, P non nul, s'écrivant

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

avec $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$.

Le **polynôme dérivé** du polynôme P est la fonction

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad P'(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1}$$

Propriété 2.4 — Propriété de la dérivation de polynômes

Soient P et Q deux fonctions polynômes et $\lambda \in \mathbb{K}$

- | | |
|----------------------------------|--|
| 1) $(P + Q)' = P' + Q'$; | 3) $(P \times Q)' = P'Q + Q'P$. |
| 2) $(\lambda P)' = \lambda P'$; | 4) $(P \circ Q)' = Q' \times P' \circ Q$. |

Théorème 2.5 — Formule de Taylor sur les polynômes

Soit $P \in \mathbb{K}[x]$, P non nul, et n le degré de P . Alors

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Corollaire 2.6 — D'ailleurs, en fait,

$$\forall a \in \mathbb{K}, \quad \forall x \in \mathbb{K}, \quad P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

III — Degré

Définition 3.1 — Degré d'un polynôme non nul

Soit P un polynôme non nul s'écrivant

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

avec $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$.

L'ensemble des entiers $\{k \in \mathbb{N} \text{ tel que } a_k \neq 0\}$ admet un plus grand élément : c'est le **degré** du polynôme P .

- a_n est alors le **coefficient de plus haut degré** de P ;
- a_nx^n son le **monôme de plus haut degré** de P .

Si P est le polynôme nul, on définit par convention son degré comme étant $-\infty$.

Propriété 3.2 — Degré et combinaison linéaire de polynômes

Soit P et Q deux fonctions polynômes.

- Si $d^\circ(P) \neq d^\circ(Q)$ alors $d^\circ(P + Q) = \sup(d^\circ(P), d^\circ(Q))$
- dans le cas général $d^\circ(P + Q) \leq \sup(d^\circ(P), d^\circ(Q))$
- pour $\lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0$ $d^\circ(\lambda P) = d^\circ(P)$
- dans le cas général $d^\circ(P \times Q) = d^\circ(P) + d^\circ(Q)$
- dans le cas général $d^\circ(P(Q)) = d^\circ(P) \times d^\circ(Q)$.

Corollaire 3.3 — Intégrité de l'ensemble des polynômes

Soit P et Q deux fonctions polynômes.

Si, pour tout x de \mathbb{K} on a $P(x) \times Q(x) = 0$ alors $P = 0$ ou $Q = 0$.

Corollaire 3.4 — « Simplification » par un polynôme non nul

Soit P, Q_1 et Q_2 trois fonction polynômes.

Si $PQ_1 = PQ_2$ et si P n'est pas le polynôme nul alors $Q_1 = Q_2$.

Propriété 3.5 — Degré du polynôme dérivé

Si P est une fonction polynôme non constante, alors $d^\circ(P') = d^\circ(P) - 1$.

Si P est constant alors P' est nul.

IV — Racines

Définition 4.1 — Racine d'un polynôme

Soit $P \in \mathbb{K}[x]$. On appelle **racine** du polynôme P tout $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $P(\alpha) = 0$.

Théorème 4.2 — Théorème de d'Alembert

Soit $P \in \mathbb{C}[x]$ un polynôme non constant.

Le polynôme P admet au moins une racine dans \mathbb{C} .

Théorème 4.3 — Factorisation et racine

Soit $P \in \mathbb{K}[x]$ et α une racine de P . Il existe un polynôme Q tel que :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad P(x) = (x - \alpha) \times Q(x)$$

Le polynôme P est dit **factorisable** par $(x - \alpha)$.

Corollaire 4.4 — Cas de plusieurs racines

Soit $P \in \mathbb{K}[x]$ et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ p racines distinctes de P .

Le polynôme P est factorisable par $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_p)$.

Théorème 4.5 — Nombre de racines d'un polynôme de degré n .

Soit $P \in \mathbb{K}[x]$ un polynôme non nul de degré inférieur ou égal à n .

Le polynôme P admet au plus n racines distinctes.

Corollaire 4.6 — Soit $n \in \mathbb{N}$ et P un polynôme de degré inférieur ou égal à n .

Si P possède au moins $n + 1$ racines distinctes alors P est le polynôme nul.

Corollaire 4.7 — Deux fonctions polynômes sont égales en un nombre infini de points de \mathbb{K} si et seulement si leurs coefficients sont égaux.

Définition 4.8 — Ordre de multiplicité d'une racine

Soit $P \in \mathbb{K}[x]$, P non nul.

- α est **racine d'ordre au moins r** de P si et seulement si P est factorisable par $(x - \alpha)^r$.
- α est **racine d'ordre r** si et seulement si P est factorisable par $(x - \alpha)^r$ mais pas par $(x - \alpha)^{r+1}$. L'entier r est l'**ordre de multiplicité de la racine α** .
- La racine α est **racine multiple** si son ordre de multiplicité est au moins 2, **racine simple** sinon.

Proposition 4.9 — Ordre de multiplicité et factorisation

Soit P un polynôme et α une racine de P d'ordre de multiplicité r . Il existe un polynôme R tel que

$$R(\alpha) \neq 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{K}, \quad P(x) = (x - \alpha)^r R(x)$$

Théorème 4.10 — Ordre de multiplicité et dérivé d'un polynôme

Soit $P \in \mathbb{K}[x]$, P non nul et $\alpha \in \mathbb{K}$.

Le scalaire α est racine d'ordre r de P si et seulement si

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = P''(\alpha) = \dots = P^{(r-1)}(\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(k)}(\alpha) \neq 0$$

Corollaire 4.11 — Cas des racines simples

Soit P un polynôme et α une de ses racines. Alors α est racine simple de P si et seulement si $P'(\alpha) \neq 0$.

