

# MATRICES

**Notations du chapitre** — Dans tout ce chapitre,  $n$  et  $p$  sont deux entiers naturels non nuls.  $\mathbb{K}$  désigne l'ensemble  $\mathbb{R}$  ou l'ensemble  $\mathbb{C}$ .

## I — Ensemble des matrices

### Définition 1.1 — Matrice à $n$ lignes et $p$ colonnes

On appelle **matrice** à  $n$  lignes et  $p$  colonnes et à coefficients dans  $\mathbb{K}$  la donnée de  $n \times p$  éléments de  $\mathbb{K}$  disposés dans un tableau sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1p} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{np} \end{pmatrix}$$

On note aussi  $M = (m_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ . Dans la notation des coefficients  $m_{ij}$  de la matrice, l'indice  $i$  représente la ligne de la matrice et l'indice  $j$  la colonne de la matrice.

### Vocabulaire

- Une **matrice colonne** est une matrice qui n'a qu'une colonne.
- Une **matrice ligne** est une matrice qui n'a qu'une ligne.
- Une **matrice carrée** est une matrice qui a autant de ligne que de colonne. Ce nombre s'appelle l'**ordre** de la matrice. L'ensemble des matrices carrées d'ordre  $n$  est noté  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .
- Dans le cas des matrices carrées, les coefficients  $(m_{ii})_{1 \leq i \leq n}$  forment la **diagonale** de la matrice.
- Une matrice **triangulaire supérieure** est une matrice carrée dont les coefficients sous la diagonale sont tous nuls ( $m_{ij} = 0$  si  $i > j$ ).

L'ensemble des matrices triangulaires supérieures d'ordre  $n$  est noté  $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ .

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \cdots & m_{1n} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & \cdots & m_{2n} \\ 0 & 0 & m_{33} & \cdots & m_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}$$

- Une matrice **triangulaire inférieure** est une matrice carrée dont les coefficients au dessus de la diagonale sont tous nuls ( $m_{ij} = 0$  si  $i < j$ ). L'ensemble des matrices triangulaires inférieures d'ordre  $n$  est noté  $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ .

$$\begin{pmatrix} m_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & m_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}$$

- Les matrices dont les coefficients au-dessus et en dessous de la diagonale sont nuls sont les **matrices diagonales** ( $m_{ij} = 0$  si  $i \neq j$ ). L'ensemble des matrices diagonales d'ordre  $n$  est noté  $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ .

$$\begin{pmatrix} m_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}$$

– Enfin on appellera **matrice identité** la matrice

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

## II — Opérations sur les matrices

### Définition 2.1 — Transposée d'une matrice

Soit  $M = (m_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ . On appelle **transposée** de  $M$  et on note  ${}^tM$  la matrice de  $\mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$  égale à  $(m_{ji})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$

### Définition 2.2 — Matrice symétrique, antisymétrique

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On dit que

- $M$  est **symétrique** si et seulement si  ${}^tM = M$ . L'ensemble des matrices symétriques est noté  $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ .
- $M$  est **antisymétrique** si et seulement si  ${}^tM = -M$ . L'ensemble des matrices symétriques est noté  $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ .

### Définition 2.3 — Addition et produit par un scalaire

Soit  $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$  et  $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$  deux matrices de  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

- On appelle **produit** de  $A$  par  $\lambda$  et on note  $\lambda \cdot A$  la matrice  $C = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$  définie par

$$\forall i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket, \quad \forall j \in \llbracket 1 ; p \rrbracket, \quad c_{ij} = \lambda a_{ij}$$

– On appelle **somme** de  $A$  et de  $B$  et on note  $A + B$  la matrice  $D = (d_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$  définie par

$$\forall i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket, \quad \forall j \in \llbracket 1 ; p \rrbracket, \quad d_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

**Propriété 2.4** — L'addition de matrice est associative, commutative et possède un élément neutre (la matrice nulle  $O_{np} = (0)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ ).

**Propriété 2.5** — Soit  $A$  et  $B$  deux matrices et  $\lambda$  et  $\mu$  deux scalaires

- $\lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda \times \mu) \cdot A = \mu \cdot (\lambda \cdot A)$
- $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$
- $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$

**Propriété 2.6** — Soit  $A$  et  $B$  deux matrices et  $\lambda$  un scalaire :

- ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$
- ${}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA$

### Définition 2.7 — Produit d'une matrice ligne par une matrice colonne

Soit  $L \in \mathcal{M}_{1,q}(\mathbb{K})$  et  $C \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K})$ . Par définition, le produit  $L \times C$  est la matrice de  $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$  définie par

$$LC = (l_{11}c_{11} + l_{12}c_{21} + \cdots + l_{1q}c_{q1})$$

**Définition 2.8 — Produit de deux matrices**

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ . Par définition, le produit  $A \times B$  est la matrice de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  dont le coefficient à la  $i$ -ième ligne et à la  $j$ -ième colonne est le produit de la  $i$ -ième ligne de  $A$  par la  $j$ -ième colonne de  $B$ .

$$AB = \left( \sum_{k=1}^q a_{ik} b_{kj} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

**Propriété 2.9** — Le produit matriciel est associatif :  $(AB)C = A(BC)$ .

**Propriété 2.10** —

- 1)  $\forall A \in \mathcal{M}_{nq}(\mathbb{K}), \forall (B, C) \in (\mathcal{M}_{qp}(\mathbb{K}))^2, \quad A(B + C) = AB + AC$
- 2)  $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_{nq}(\mathbb{K}))^2, \forall C \in \mathcal{M}_{qp}(\mathbb{K}), \quad (A + B)C = AC + BC$
- 3)  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (A, B) \in (\mathcal{M}_{nq}(\mathbb{K}))^2, \quad \lambda(AB) = A(\lambda B)$
- 4)  $\forall A \in \mathcal{M}_{nq}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{qp}(\mathbb{K}), \quad {}^t(AB) = {}^tB {}^tA$

**III — Cas des matrices carrées**

**Propriété 3.1** — La multiplication de matrice est une opération interne de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , associative et admettant un élément neutre ( $I_n$ ).

**Propriété 3.2** — Soit  $T$  et  $U$  deux matrices triangulaires supérieures. Alors  $TU$  est une matrice triangulaire supérieure.

**Propriété 3.3** — Soit  $D$  et  $\Delta$  deux matrices diagonales. On a

$$D\Delta =$$

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \delta_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \delta_n \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} d_1\delta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2\delta_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n\delta_n \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$$

**Définition 3.4 — Puissances de matrices**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $k \in \mathbb{N}$ . Par définition

$$A^k = I_n \times \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ fois}}$$

**Propriété 3.5** — Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), (i, j) \in \mathbb{N}^2$

$$A^i A^j = A^{i+j} = A^{i+j} = A^i A^j$$

**Propriété 3.6** — Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), k \in \mathbb{N}^2, \quad {}^t(A^k) = ({}^tA)^k$ .

**Propriété 3.7** — Soit  $k \in \mathbb{N}$  et  $D$  une matrice diagonale. On a

$$D^k = \begin{pmatrix} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n^k \end{pmatrix}$$

**Théorème 3.8** — **Binôme de Newton pour les matrices**

Soit  $A$  et  $B$  deux matrices telles que  $AB = BA$  et  $m \in \mathbb{N}$ .

$$(A + B)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} A^k B^{m-k}$$

## IV — Matrices inversibles

**Définition 4.1** — **Matrice inversible**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On dit que  $A$  est **inversible** si et seulement si il existe une matrice  $B$  telle que  $AB = I_n$  et  $BA = I_n$ .

Dans ce cas,  $B$  est unique : on l'appelle **l'inverse** de  $A$  et on la note  $B = A^{-1}$ .

On note l'ensemble des matrices inversibles  $GL_n(\mathbb{K})$ .

**Propriété 4.2** — **Cas des matrices diagonales**

Une matrice diagonale est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont non nuls. On a alors

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/d_n \end{pmatrix}$$

**Propriété 4.3** — **Critère de non-inversibilité**

Soit  $M$  une matrice carrée. S'il existe une matrice non nulle  $N$  telle que  $MN = O$  ou  $NM = O$  alors  $M$  n'est pas inversible.

**Propriété 4.4** — **Produit de deux matrices inversibles**

Soit  $A$  et  $B$  deux matrices inversibles d'ordre  $n$ .

Alors  $AB$  est inversible et  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

**Propriété 4.5** — **Transposée d'une matrice inversible**

Soit  $A$  une matrice inversible d'ordre  $n$ . Alors  ${}^tA$  est inversible et  $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ .

**Théorème 4.6** — La matrice carrée  $A$  est inversible si et seulement si pour toute matrice  $B$ , le système  $AX = B$  est un système de Cramer.

**Corollaire 4.7** — **Cas des matrices triangulaires**

Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont non nuls.

