

LIMITES D'UNE FONCTION — CONTINUITÉ PONCTUELLE

I — PARTIES DE \mathbb{R} ET ORDRE

Définition 1.1 — Intervalle de \mathbb{R}

Un **intervalle** de \mathbb{R} est un ensemble d'une des formes suivantes (a et b étant deux réels tels que $a \leq b$)

$$\emptyset, \mathbb{R}, \{a\}, \\]a; b[,]a; b], [a; b[, [a; b], \\]a; +\infty[, [a; +\infty[,]-\infty; a[,]-\infty; a]$$

Propriété 1.2 — Un intervalle I de \mathbb{R} vérifie la propriété de continuité

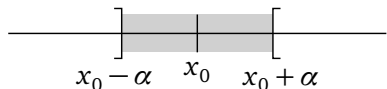
$$\forall (\alpha, \beta) \in I^2, \alpha < x < \beta \implies x \in I$$

Définition 1.3 — Segment de \mathbb{R}

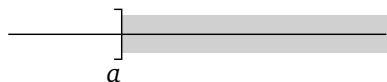
Un **segment** de \mathbb{R} est un intervalle $[a; b]$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2, a \leq b$.

Définition 1.4 — Voisinage

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Un **voisinage** de x_0 est un intervalle ouvert de la forme $]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[$ avec $\alpha > 0$.



Un **voisinage** de $+\infty$ est un intervalle ouvert de la forme $]a; +\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$.



II — LIMITES D'UNE FONCTION EN UN POINT

Notations du chapitre — Dans tout ce chapitre, \mathcal{D} est un **domaine** de \mathbb{R} , c'est-à-dire un intervalle de \mathbb{R} non vide et non réduit à un point, ou bien une réunion finie de tels intervalles de \mathbb{R} .

Définition 2.2 — Limite finie en un point

Soit f est une fonction de \mathcal{D} dans \mathbb{R} et x_0 un point ou une borne finie de \mathcal{D} . La fonction f **tend vers** ℓ en x_0 si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathcal{D} \cap]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[, |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Proposition 2.3 — Unicité de la limite

Soit f est une fonction de \mathcal{D} dans \mathbb{R} et x_0 un point ou une borne finie de \mathcal{D} . Si f tend vers ℓ en x_0 , alors il existe un seul réel ℓ vérifiant cette propriété.

Théorème & Définition 2.4 — Continuité ponctuelle

Soit f est une fonction de \mathcal{D} dans \mathbb{R} et x_0 un point de \mathcal{D} . Si f admet une limite en x_0 alors nécessairement cette limite est égale à $f(x_0)$. Dans ce cas, on dit que f **est continue** en x_0 .

Définition 2.5 — Limites infinies en un point fini

Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point ou une borne finie de \mathcal{D} . La fonction f **tend vers** $+\infty$ en x_0 si et seulement si

$$\forall M > 0, \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in \mathcal{D} \cap]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[, f(x) > M.$$

La fonction f **tend vers** $-\infty$ en x_0 si et seulement si $-f$ tend vers $+\infty$.

Définition 2.6 — Limite finie en $+\infty$

On suppose que \mathcal{D} contient un voisinage de $+\infty$. Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$.

La fonction f tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \quad x \in \mathcal{D} \cap]A; +\infty[\implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Définition 2.7 — Limite infinie en $+\infty$

On suppose que \mathcal{D} contient un voisinage de $+\infty$. Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$.

La fonction f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ si et seulement si

$$\forall M > 0, \exists A > 0 \quad x \in \mathcal{D} \cap]A; +\infty[\implies f(x) > M.$$

On définit de même les limites en $-\infty$. On prouve qu'il y a également unicité de la limite finie en $+\infty$ ou en $-\infty$.

Définition 2.8 — Limites par valeurs supérieures, inférieures

Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point ou une borne finie ou infinie de \mathcal{D} .

La fonction f tend vers ℓ par valeurs supérieures en x_0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ et si $f(x) \geq \ell$ sur un voisinage de x_0 . On note $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell^+$ ou bien $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell^+$.

La fonction f tend vers ℓ par valeurs inférieures quand x tend vers x_0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ et si $f(x) \leq \ell$ sur un voisinage de x_0 .

On note $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell^-$ ou bien $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell^-$.

Définition 2.9 — Limite à gauche en x_0

Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point de \mathcal{D} ou une borne supérieure finie de \mathcal{D} .

La fonction f admet une limite à gauche en x_0 si et seulement si la restriction de f à $\mathcal{D} \cap]-\infty; x_0[$ admet une limite en x_0 .

Cette limite est notée $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0, x < x_0} \ell$.

Définition 2.10 — Limite à droite en x_0

Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point de \mathcal{D} ou une borne inférieure finie de \mathcal{D} .

La fonction f admet une limite à droite en x_0 si et seulement si la restriction de f à $\mathcal{D} \cap]x_0; +\infty[$ admet une limite en x_0 . Cette limite est notée $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0, x > x_0} \ell$.

ℓ .

Ces limites peuvent être finies ou infinies.

Important! Aux bornes de \mathcal{D} , il est sous-entendu qu'on prend la limite à gauche ou à droite, selon les cas.

Définition 2.11 — Continuité à gauche, à droite

Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point de \mathcal{D} .

La fonction f est **continue à gauche** en x_0 si elle admet une limite à gauche en x_0 et que $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f = f(x_0)$.

Elle est **continue à droite** en x_0 si elle admet une limite à droite en x_0 et que $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f = f(x_0)$.

Proposition 2.12 — Lien entre limite, limites à gauche et à droite

Soit x_0 un point ou une borne de \mathcal{D} et $f : \mathcal{D} \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$.

La fonction f admet une limite en x_0 si et seulement si elle admet une limite à gauche et à droite en x_0 et que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) \quad \text{auquel cas} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$$

Proposition 2.13 — Lien entre continuité, limites à gauche et à droite

Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point à l'intérieur de \mathcal{D} .

La fonction f est continue en x_0 si et seulement si elle admet une limite à gauche et à droite en x_0 et que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$$

Théorème & Définition 2.14 — Prolongement par continuité

Soit x_0 un point de \mathcal{D} et $f : \mathcal{D} \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$.

Si f admet une limite en x_0 , alors il existe un unique prolongement \tilde{f} de f à $\mathcal{D} \cup \{x_0\}$ tel que \tilde{f} soit continue en x_0 .

On parle du **prolongement par continuité** de f en x_0 .

III — OPÉRATIONS SUR LES LIMITES

Théorème 3.1 — Opérations algébriques – Limites finies

Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 un point ou une borne éventuellement infinie de \mathcal{D} et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On suppose que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell$ et que $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell'$, avec ℓ et ℓ' deux réels.

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &\xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell + \ell' & f(x) \times g(x) &\xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell \times \ell' \\ \lambda f(x) &\xrightarrow{x \rightarrow x_0} \lambda \ell & \frac{1}{f(x)} &\xrightarrow{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\ell} \quad \text{si } \ell \neq 0 \end{aligned}$$

Ce théorème est également valable pour des limites à gauche et à droite.

Corollaire 3.2 — Opérations algébriques et continuité ponctuelle

Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 un point de \mathcal{D} et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si f et g sont continues en x_0 alors λf , $f + g$ et $f \times g$ sont continues en x_0 .

Si, de plus, $f(x_0) \neq 0$ alors $1/f$ est continue en x_0 .

Théorème 3.3 — Opérations algébriques – Limites infinies

Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point ou une borne éventuellement infinie de \mathcal{D} .

– Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$ alors $\frac{1}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$ et $-f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} -\infty$;

- si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0^+$ alors $\frac{1}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$;
- si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell$ et $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$ alors $f(x) + g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$;
- si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell > 0$ et $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$ alors $f(x) \times g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$;
- Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$ et $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$ alors $f(x) + g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$ et $f(x) \times g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$.

En modifiant le signe de f et/ou de g , on traite le cas des limites $-\infty$, etc.
Tous les autres cas relèvent de ce qu'on appelle les « formes indéterminées ».

$$\begin{aligned} \ll \frac{0}{0} \gg &= \ll \infty - \infty \gg & \ll \frac{\infty}{\infty} \gg &= \ll 1^\infty \gg \\ &= \ll \infty \times 0 \gg & & \end{aligned}$$

Théorème 3.4 — Composée

Soit $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D}_g \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions numériques et x_0 un point ou une borne éventuellement infinie de \mathcal{D}_g ,

On suppose que f admet une limite (finie ou infinie) ℓ en x_0 , ℓ est un point ou une borne éventuellement infinie de \mathcal{D}_f et que g admet une limite ℓ' en ℓ .

Dans ce cas $g \circ f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell'$.

Corollaire 3.5 — Continuité d'une composée

Soit $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D}_g \rightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point de \mathcal{D}_f .

On suppose que f est continue en x_0 , que $f(x_0) \in \mathcal{D}_g$ et que g est continue en $f(x_0)$.

Alors $g \circ f$ est continue en x_0 .

Théorème 3.6 — Limite de fonction et de suite

Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point de \mathcal{D} ou une borne de \mathcal{D} . Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_0.$$

Si f tend vers ℓ en x_0 alors $f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

IV — LIMITES ET ORDRE

Proposition 4.1 — Si f admet une limite finie en x_0 alors f est bornée sur un voisinage de x_0 .

Proposition 4.2 — Si f admet une limite strictement positive en x_0 alors f est strictement positive sur un voisinage de x_0 .

Corollaire 4.3 — Si f admet une limite strictement négative en x_0 alors f est négative sur un voisinage de x_0 .

Corollaire 4.4 — Si f admet une limite finie non nulle en x_0 alors f est non nulle sur un voisinage de x_0 .

Proposition 4.5 — Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point ou une borne finie ou infinie de \mathcal{D} . On suppose que f admet une limite en x_0 .

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad f(x) > a \implies \lim_{x_0} f \geq a$$

Corollaire 4.6 — Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, soit x_0 un point ou une borne finie ou infinie de \mathcal{D} .

Si f et g admettent toutes deux une limite en x_0 , et si

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad f(x) < g(x)$$

alors

$$\lim_{x_0} f < \lim_{x_0} g$$

Théorème 4.7 — Théorème d'encadrement

Soit f , u et v trois fonctions définies sur \mathcal{D} et x_0 un point ou une borne finie ou infinie de \mathcal{D} .

Si $\forall x \in \mathcal{D} \setminus \{x_0\}, \quad u(x) < f(x) < v(x)$

si u et v admettent une limite en x_0

et si $\lim_{x_0} u = \lim_{x_0} v$

alors f admet une limite en x_0

et $\lim_{x_0} f = \lim_{x_0} u = \lim_{x_0} v$

Théorème 4.8 — Théorème de minoration/majoration

Soit x_0 un point de \mathcal{D} , ou une borne finie ou infinie de \mathcal{D} . Soit f et g deux fonctions définies sur \mathcal{D} telles que

$$\forall x \in \mathcal{D} \setminus \{x_0\}, \quad f(x) < g(x)$$

Si $\lim_{x_0} f = +\infty$ alors $\lim_{x_0} g = +\infty$.

Si $\lim_{x_0} g = -\infty$ alors $\lim_{x_0} f = -\infty$.

Théorème 4.9 — Soit f est une fonction monotone sur un intervalle $]a ; b[$, avec éventuellement a et b infinis.

Alors f admet une limite (finie ou infinie) en a et en b .

Corollaire 4.10 — Si f est une fonction monotone sur un intervalle I alors f admet une limite finie à gauche et à droite en tout point de I .