Limites d'une fonction — Continuité ponctuelle

I — Parties de $\mathbb{R}$ et ordre

Définition 1.1 — Intervalle de $\mathbb{R}$

*Un **intervalle** de $\mathbb{R}$ est un ensemble d'une des formes suivantes $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$*

$$\varnothing, \quad \mathbb{R},$$
$$]\,a\,;b\,[, \quad]\,a\,;b\,], \quad [\,a\,;b\,[, \quad [\,a\,;b\,],$$
$$\{a\}, \quad]\,a\,;+\infty\,[, \quad [\,a\,;+\infty\,[, \quad]-\infty\,;a\,[, \quad]-\infty\,;a\,]$$

Propriété 1.2 — *Un intervalle I de $\mathbb{R}$ vérifie la propriété de continuité*

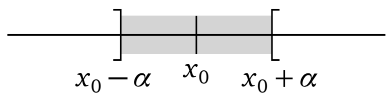
$$\forall(\alpha,\beta)\in I^2, \quad \alpha < x < \beta \Longrightarrow x \in I$$

Définition 1.3 — Segment de $\mathbb{R}$

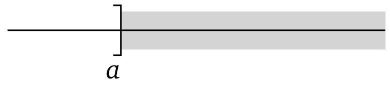
*Un **segment** de $\mathbb{R}$ est un intervalle de la forme $[\,a\,;\,b\,]$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $a<b$.*

Définition 1.4 — Voisinage

*Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Un **voisinage de x_0** est un intervalle ouvert de la forme $]x_0-\alpha\,;x_0+\alpha[$ avec $\alpha>0$.*



*Un **voisinage de $+\infty$** est un intervalle ouvert de la forme $]a\,;+\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$.*



II — Limites d'une fonction en un point

Notations du chapitre — *Dans tout ce chapitre, $\mathscr{D}$ est un **domaine** de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point, ou bien une réunion finie de tels intervalles de $\mathbb{R}$.*

Définition 2.2 — Limite finie en un point

Soit f est une fonction de $\mathscr{D}$ dans $\mathbb{R}$ et x_0 un point ou une borne finie de $\mathscr{D}$.

*La fonction **f tend vers ℓ** en x_0 si et seulement si*

$$\forall\varepsilon>0, \quad \exists\alpha>0, \quad \forall x\in\mathscr{D}\cap\,]x_0-\alpha\,;x_0+\alpha\,[, \quad |f(x)-\ell|<\varepsilon$$

Proposition 2.3 — Unicité de la limite

Soit f est une fonction de $\mathscr{D}$ dans $\mathbb{R}$ et x_0 un point ou une borne finie de $\mathscr{D}$.

Si f tend vers ℓ en x_0, alors il existe un seul réel ℓ vérifiant cette propriété.

Théorème & Définition 2.4 — Continuité ponctuelle

Soit f est une fonction de $\mathscr{D}$ dans $\mathbb{R}$ et x_0 un point de $\mathscr{D}$.

*Si f admet une limite en x_0 alors nécessairement cette limite est égale à $f(x_0)$. Dans ce cas, on dit que **f est continue en x_0**.*

Définition 2.5 — Limites infinies en un point fini

Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point ou une borne finie de $\mathscr{D}$.

*La fonction **f tend vers $+\infty$ en x_0** si et seulement si*

$$\forall M > 0, \quad \exists \alpha > 0 \qquad \forall x \in \mathscr{D} \cap \,]x_0 - \alpha\,;\, x_0 + \alpha[\,, \quad f(x) > M.$$

*La fonction **f tend vers $-\infty$ en x_0** si et seulement si $-f$ tend vers $+\infty$.*

Définition 2.6 — Limite finie en $+\infty$

On suppose que $\mathscr{D}$ contient un voisinage de $+\infty$. Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$.

*La fonction **f tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$** si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A > 0, \qquad x \in \mathscr{D} \cap \,]A\,;\,+\infty[\; \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Définition 2.7 — Limite infinie en $+\infty$

On suppose que $\mathscr{D}$ contient un voisinage de $+\infty$. Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$.

*La fonction **f tend vers $+\infty$ en $+\infty$** si et seulement si*

$$\forall M > 0, \quad \exists A > 0 \qquad x \in \mathscr{D} \cap \,]A\,;\,+\infty[\; \Longrightarrow f(x) > M.$$

On définit de même les limites en $-\infty$. Notez qu'il y a également unicité de la limite finie en $+\infty$ ou en $-\infty$.

Définition 2.8 — Limites par valeurs supérieures, inférieures

$f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, x_0 un point ou une borne finie ou infinie de $\mathscr{D}$.

*La fonction **f tend vers ℓ par valeurs supérieures en x_0** si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et si $f(x) \geqslant \ell$ sur un voisinage de x_0. On note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell^+$ ou bien $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell^+$.*

*La fonction **f tend vers ℓ par valeurs inférieures quand x tend vers x_0** si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et si $f(x) < \ell$ sur un voisinage de x_0.*

On note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell^-$ ou bien $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell^-$.

Définition 2.9 — Limite à gauche en x_0

Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point ou une borne supérieure de $\mathscr{D}$.

La fonction f admet une limite à gauche en x_0 si et seulement si la restriction de f à $\mathscr{D} \cap \,]-\infty\,;\,x_0[$ admet une limite en x_0.

Cette limite est notée $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \ell$ ou $f(x) \xrightarrow[\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}]{} \ell$.

Définition 2.10 — Limite à droite en x_0

Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point ou une borne inférieure de $\mathscr{D}$.

La fonction f admet une limite à droite en x_0 si et seulement si la restriction de f à $\mathscr{D} \cap \,]x_0\,;\,+\infty[$ admet une limite en x_0. Cette limite est notée $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \ell$ ou $f(x) \xrightarrow[\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}]{} \ell$.

Ces limites peuvent être finies ou infinies. **Important !** Aux bornes de $\mathscr{D}$, il est sous-entendu qu'on prend la limite à gauche ou à droite, selon les cas.

Définition 2.11 — Continuité à gauche, à droite

Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point de $\mathscr{D}$.

*La fonction f est **continue...***

- ***...à gauche en x_0** si elle admet une limite à gauche en x_0 et que $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f = f(x_0)$;*
- ***...à droite en x_0** si elle admet une limite à droite en x_0 et que $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f = f(x_0)$;*

Proposition 2.12 — Lien entre limite, limites à gauche et à droite

Soit x_0 un point ou une borne de $\mathscr{D}$ et $f : \mathscr{D} \setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$.

La fonction f admet une limite en x_0 si et seulement si elle admet une limite à gauche et à droite en x_0 et que

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) \quad \textit{auquel cas} \quad \lim_{x \to x_0} f(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$$

Proposition 2.13 — Lien entre continuité, limites à gauche et à droite

Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point à l'intérieur de $\mathscr{D}$.

La fonction f est continue en x_0 si et seulement si elle admet une limite à gauche et à droite en x_0 et que

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$$

Théorème & Définition 2.14 — Prolongement par continuité

Soit x_0 un point de $\mathscr{D}$ et $f : \mathscr{D} \setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Si f admet une limite en x_0, alors il existe un unique prolongement $\tilde{f}$ de f à $\mathscr{D} \cup \{x_0\}$ tel que $\tilde{f}$ soit continue en x_0.

*On parle du **prolongement par continuité** de f en x_0.*

III — Opérations sur les limites

Théorème 3.1 — Opérations algébriques – Limites finies

Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, x_0 un point ou une borne éventuellement infinie de $\mathscr{D}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On suppose que $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell$ et que $g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell'$, avec ℓ et ℓ' deux réels.

$$f(x) + g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell + \ell' \qquad f(x) \times g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell \times \ell'$$

$$\lambda f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \lambda \ell \qquad \frac{1}{f(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} \frac{1}{\ell} \quad \text{si } \ell \neq 0$$

Ce théorème est également valable pour des limites à gauche et à droite.

Corollaire 3.2 — Opérations algébriques et continuité ponctuelle

Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, x_0 un point de $\mathscr{D}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si f et g sont continues en x_0 alors λf, $f + g$ et $f \times g$ sont continues en x_0.

Si, de plus, $f(x_0) \neq 0$ alors $1/f$ est continue en x_0.

Théorème 3.3 — Opérations algébriques – Limites infinies

Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point ou une borne éventuellement infinie de $\mathscr{D}$.

- *Si $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty$ alors $\dfrac{1}{f(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$ et $-f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} -\infty$;*
- *si $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0^+$ alors $\dfrac{1}{f(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty$;*
- *si $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell$ et $g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty$ alors $f(x) + g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty$;*
- *si $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell > 0$ et $g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty$ alors $f(x) \times g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty$*

– *Si* $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty$ *et* $g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty$ *alors* $f(x)+g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty$ *et* $f(x)\times g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty$.

En modifiant le signe de f et/ou de g, on traite le cas des limites $-\infty$, etc.

Tous les autres cas relèvent de ce qu'on appelle les « formes indéterminées ».

$$\text{« } \infty - \infty \text{ »} \qquad \text{« } 1^{\infty} \text{ »}.$$
$$\text{« } \frac{0}{0} \text{ »} = \text{« } \infty \times 0 \text{ »} = \text{« } \frac{\infty}{\infty} \text{ »}$$

Théorème 3.4 — Composée

Soit $f : \mathscr{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $g : \mathscr{D}_g \longrightarrow \mathbb{R}$ *deux fonctions numériques et* x_0 *un point ou une borne éventuellement infinie de* $\mathscr{D}_f$*,*

On suppose que f *admet une limite (finie ou infinie)* ℓ *en* x_0*,* ℓ *est un point ou une borne éventuellement infinie de* $\mathscr{D}_g$ *et que* g *admet une limite* ℓ' *en* ℓ*.*

Dans ce cas $g\circ f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell'$.

Corollaire 3.5 — Continuité d'une composée

Soit $f : \mathscr{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $g : \mathscr{D}_g \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* x_0 *un point de* $\mathscr{D}_f$*.*

On suppose que f *est continue en* x_0*, que* $f(x_0) \in \mathscr{D}_g$ *et que* g *est continue en* $f(x_0)$*. Alors* $g\circ f$ *est continue en* x_0*.*

Théorème 3.6 — Limite de fonction et de suite

Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* x_0 *un point de* $\mathscr{D}$ *ou une borne de* $\mathscr{D}$*. Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{D}^{\mathbb{N}}$ *telle que* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_0$.

Si f *tend vers* ℓ *en* x_0 *alors* $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

IV — Limites et ordre

Proposition 4.1 — *Si* f *admet une limite finie en* x_0 *alors* f *est bornée* sur un voisinage de x_0.

Proposition 4.2 — *Si* f *admet une limite strictement positive en* x_0 *alors* f *est strictement positive* sur un voisinage de x_0.

Corollaire 4.3 — *Si* f *admet une limite strictement négative en* x_0 *alors* f *est négative* sur un voisinage de x_0.

Corollaire 4.4 — *Si* f *admet une limite finie non nulle en* x_0 *alors* f *est non nulle* sur un voisinage de x_0.

Proposition 4.5 — *Soit* $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* x_0 *un point ou une borne finie ou infinie de* $\mathscr{D}$*. On suppose que* f *admet une limite en* x_0*.*

$$\forall x \in \mathscr{D}, \qquad f(x) > a \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x_0} f \geqslant a$$

Corollaire 4.6 — *Soit* $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $g : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$*, soit* x_0 *un point ou une borne finie ou infinie de* $\mathscr{D}$*.*

Si f *et* g *admettent toutes deux une limite en* x_0*, et si*

$$\forall x \in \mathscr{D}, \qquad f(x) < g(x)$$

alors

$$\lim_{x_0} f < \lim_{x_0} g$$

Théorème 4.7 — Théorème d'encadrement

Soit f, u et v trois fonctions définies sur $\mathscr{D}$ et x_0 un point ou une borne finie ou infinie de $\mathscr{D}$.

Si	$\forall x \in \mathscr{D} \setminus \{x_0\}, \qquad u(x) < f(x) < v(x)$
si	u *et* v *admettent une limite en* x_0
et si	$\lim\limits_{x_0} u = \lim\limits_{x_0} v$
alors	f *admet une limite en* x_0
et	$\lim\limits_{x_0} f = \lim\limits_{x_0} u = \lim\limits_{x_0} v$

Théorème 4.8 — Théorème de minoration/majoration

Soit x_0 un point de $\mathscr{D}$, ou une borne finie ou infinie de $\mathscr{D}$. Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathscr{D}$ telles que

$$\forall x \in \mathscr{D} \setminus \{x_0\}, \qquad f(x) < g(x)$$

$$\textit{Si} \quad \lim_{x_0} f = +\infty \quad \textit{alors} \quad \lim_{x_0} g = +\infty.$$
$$\textit{Si} \quad \lim_{x_0} g = -\infty \quad \textit{alors} \quad \lim_{x_0} f = -\infty.$$

Théorème 4.9 — *Soit f est une fonction monotone sur un intervalle $]\,a\,;\,b\,[$, avec éventuellement a et b infinis.*

Alors f admet une limite (finie ou infinie) en a et en b.

Corollaire 4.10 — *Si f est une fonction monotone sur un intervalle I alors f admet une limite finie à gauche et à droite en tout point de I.*