

# Limites d'une fonction — Continuité ponctuelle

## I — Parties de $\mathbb{R}$ et ordre

### Définition 1.1 — Intervalle de $\mathbb{R}$

Un *intervalle* de  $\mathbb{R}$  est un ensemble d'une des formes suivantes ( $a$  et  $b$  étant deux réels tels que  $a \leq b$ )

$$\emptyset, \mathbb{R}, \{a\}, \\ ]a; b[, ]a; b], [a; b[, [a; b], \\ ]a; +\infty[, [a; +\infty[, ]-\infty; a[, ]-\infty; a]$$

**Propriété 1.2** — Un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  vérifie la propriété de continuité

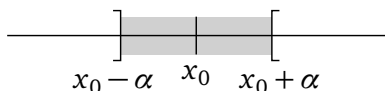
$$\forall (\alpha, \beta) \in I^2, \quad \alpha < x < \beta \implies x \in I$$

### Définition 1.3 — Segment de $\mathbb{R}$

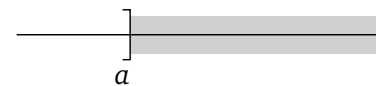
Un *segment* de  $\mathbb{R}$  est un intervalle  $[a; b]$  avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^2, a \leq b$ .

### Définition 1.4 — Voisinage

Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Un *voisinage* de  $x_0$  est un intervalle ouvert de la forme  $]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[$  avec  $\alpha > 0$ .



Un *voisinage* de  $+\infty$  est un intervalle ouvert de la forme  $]a; +\infty[$  avec  $a \in \mathbb{R}$ .



## II — Limites d'une fonction en un point

**Notations du chapitre** — Dans tout ce chapitre,  $\mathcal{D}$  est un **domaine** de  $\mathbb{R}$ , c'est-à-dire un intervalle de  $\mathbb{R}$  non vide et non réduit à un point, ou bien une réunion finie de tels intervalles de  $\mathbb{R}$ .

### Définition 2.2 — Limite finie en un point

Soit  $f$  est une fonction de  $\mathcal{D}$  dans  $\mathbb{R}$  et  $x_0$  un point ou une borne finie de  $\mathcal{D}$ . La fonction  $f$  **tend vers**  $\ell$  en  $x_0$  si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in \mathcal{D} \cap ]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[, \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

### Proposition 2.3 — Unicité de la limite

Soit  $f$  est une fonction de  $\mathcal{D}$  dans  $\mathbb{R}$  et  $x_0$  un point ou une borne finie de  $\mathcal{D}$ . Si  $f$  tend vers  $\ell$  en  $x_0$ , alors il existe un seul réel  $\ell$  vérifiant cette propriété.

### Théorème & Définition 2.4 — Continuité ponctuelle

Soit  $f$  est une fonction de  $\mathcal{D}$  dans  $\mathbb{R}$  et  $x_0$  un point de  $\mathcal{D}$ . Si  $f$  admet une limite en  $x_0$  alors nécessairement cette limite est égale à  $f(x_0)$ . Dans ce cas, on dit que  $f$  est **continue** en  $x_0$ .

**Définition 2.5 — Limites infinies en un point fini**

Soit  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $x_0$  un point ou une borne finie de  $\mathcal{D}$ .

La fonction  $f$  tend vers  $+\infty$  en  $x_0$  si et seulement si

$$\forall M > 0, \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in \mathcal{D} \cap ]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[, \quad f(x) > M.$$

La fonction  $f$  tend vers  $-\infty$  en  $x_0$  si et seulement si  $-f$  tend vers  $+\infty$ .

**Définition 2.6 — Limite finie en  $+\infty$** 

On suppose que  $\mathcal{D}$  contient un voisinage de  $+\infty$ . Soit  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ .

La fonction  $f$  tend vers  $\ell \in \mathbb{R}$  en  $+\infty$  si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \quad x \in \mathcal{D} \cap ]A; +\infty[ \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

**Définition 2.7 — Limite infinie en  $+\infty$** 

On suppose que  $\mathcal{D}$  contient un voisinage de  $+\infty$ . Soit  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ .

La fonction  $f$  tend vers  $+\infty$  en  $+\infty$  si et seulement si

$$\forall M > 0, \exists A > 0 \quad x \in \mathcal{D} \cap ]A; +\infty[ \implies f(x) > M.$$

On définit de même les limites en  $-\infty$ . On prouve qu'il y a également unicité de la limite finie en  $+\infty$  ou en  $-\infty$ .

**Définition 2.8 — Limites par valeurs supérieures, inférieures**

Soit  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $x_0$  un point ou une borne finie ou infinie de  $\mathcal{D}$ .

La fonction  $f$  tend vers  $\ell$  par valeurs supérieures en  $x_0$  si et seulement si

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$  et si  $f(x) \geq \ell$  sur un voisinage de  $x_0$ . On note  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell^+$  ou bien  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell^+$ .

La fonction  $f$  tend vers  $\ell$  par valeurs inférieures quand  $x$  tend vers  $x_0$  si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$  et si  $f(x) \leq \ell$  sur un voisinage de  $x_0$ .

On note  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell^-$  ou bien  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell^-$ .

**Définition 2.9 — Limite à gauche en  $x_0$** 

Soit  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $x_0$  un point de  $\mathcal{D}$  ou une borne supérieure finie de  $\mathcal{D}$ .

La fonction  $f$  admet une **limite à gauche en  $x_0$**  si et seulement si la restriction de  $f$  à  $\mathcal{D} \cap ]-\infty; x_0[$  admet une limite en  $x_0$ .

Cette limite est notée  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x)$  ou  $f(x) \xrightarrow[\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}]{} \ell$ .

**Définition 2.10 — Limite à droite en  $x_0$** 

Soit  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $x_0$  un point de  $\mathcal{D}$  ou une borne inférieure finie de  $\mathcal{D}$ .

La fonction  $f$  admet une **limite à droite en  $x_0$**  si et seulement si la restriction de  $f$  à  $\mathcal{D} \cap ]x_0; +\infty[$  admet une limite en  $x_0$ . Cette limite est notée  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$  ou

$f(x) \xrightarrow[\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}]{} \ell$ .

Ces limites peuvent être finies ou infinies.

**Important!** Aux bornes de  $\mathcal{D}$ , il est sous-entendu qu'on prend la limite à gauche ou à droite, selon les cas.

**Définition 2.11 — Continuité à gauche, à droite**

Soit  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $x_0$  un point de  $\mathcal{D}$ .

La fonction  $f$  est **continue à gauche en  $x_0$**  si elle admet une limite à gauche en  $x_0$  et que  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f = f(x_0)$ .

Elle est **continue à droite** en  $x_0$  si elle admet une limite à droite en  $x_0$  et que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f = f(x_0).$$

**Proposition 2.12 — Lien entre limite, limites à gauche et à droite**

Soit  $x_0$  un point ou une borne de  $\mathcal{D}$  et  $f : \mathcal{D} \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ .

La fonction  $f$  admet une limite en  $x_0$  si et seulement si elle admet une limite à gauche et une limite à droite en  $x_0$  et que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) \quad \text{auquel cas} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

Ces limites peuvent être finie ou infinie.

**Proposition 2.13 — Lien entre continuité, limites à gauche et à droite**

Soit  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $x_0$  un point à l'intérieur de  $\mathcal{D}$ .

La fonction  $f$  est continue en  $x_0$  si et seulement si elle admet une limite à gauche et à droite en  $x_0$  et que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$$

**Théorème & Définition 2.14 — Prolongement par continuité**

Soit  $x_0$  un point de  $\mathcal{D}$  et  $f : \mathcal{D} \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Si  $f$  admet une limite finie en  $x_0$ , alors il existe un unique prolongement  $\tilde{f}$  de  $f$  à  $\mathcal{D} \cup \{x_0\}$  tel que  $\tilde{f}$  soit continue en  $x_0$ .

On parle du **prolongement par continuité** de  $f$  en  $x_0$ .

### III — Opérations sur les limites

**Théorème 3.1 — Opérations algébriques – Limites finies**

Soit  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0$  un point ou une borne finie ou infinie de  $\mathcal{D}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

On suppose que  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell$  et que  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell'$ , avec  $\ell$  et  $\ell'$  deux réels.

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &\xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell + \ell' & f(x) \times g(x) &\xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell \times \ell' \\ \lambda f(x) &\xrightarrow{x \rightarrow x_0} \lambda \ell & \frac{1}{f(x)} &\xrightarrow{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\ell} \quad \text{si } \ell \neq 0 \end{aligned}$$

Ce théorème est également valable pour des limites à gauche et à droite.

**Corollaire 3.2 — Opérations algébriques et continuité ponctuelle**

Soit  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0$  un point de  $\mathcal{D}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Si  $f$  et  $g$  sont continues en  $x_0$  alors  $\lambda f$ ,  $f + g$  et  $f \times g$  sont continues en  $x_0$ .

Si, de plus,  $f(x_0) \neq 0$  alors  $1/f$  est continue en  $x_0$ .

**Théorème 3.3 — Opérations algébriques – Limites infinies**

Soit  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $x_0$  un point ou une borne éventuellement infinie de  $\mathcal{D}$ .

- Si  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$  alors  $\frac{1}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$  et  $-f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} -\infty$ ;
- si  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0^+$  alors  $\frac{1}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$ ;
- si  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell$  et  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$  alors  $f(x) + g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$ ;
- si  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell > 0$  et  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$  alors  $f(x) \times g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$

– Si  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$  et  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$  alors  $f(x) + g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$  et  $f(x) \times g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$ .

En modifiant le signe de  $f$  et/ou de  $g$ , on traite le cas des limites  $-\infty$ , etc.  
Tous les autres cas relèvent de ce qu'on appelle les « formes indéterminées ».

$$\begin{array}{l} \text{« } \frac{0}{0} \text{ »} \\ \text{« } \frac{\infty}{\infty} \text{ »} \end{array} = \begin{array}{l} \text{« } \infty - \infty \text{ »} \\ \text{« } \infty \times 0 \text{ »} \end{array} = \begin{array}{l} \text{« } 1^\infty \text{ »} \\ \text{« } \frac{\infty}{\infty} \text{ »} \end{array}$$

### Théorème 3.4 — Composée

Soit  $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathcal{D}_g \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions numériques et  $x_0$  un point ou une borne éventuellement infinie de  $\mathcal{D}_f$ ,

On suppose que  $f$  admet une limite (finie ou infinie)  $\ell$  en  $x_0$ ,  $\ell$  est un point ou une borne éventuellement infinie de  $\mathcal{D}_g$  et que  $g$  admet une limite  $\ell'$  en  $\ell$ .

Dans ce cas  $g \circ f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell'$ .

### Corollaire 3.5 — Continuité d'une composée

Soit  $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathcal{D}_g \rightarrow \mathbb{R}$  et  $x_0$  un point de  $\mathcal{D}_f$ .

On suppose que  $f$  est continue en  $x_0$ , que  $f(x_0) \in \mathcal{D}_g$  et que  $g$  est continue en  $f(x_0)$ .

Alors  $g \circ f$  est continue en  $x_0$ .

### Théorème 3.6 — Limite de fonction et de suite

Soit  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $x_0$  un point de  $\mathcal{D}$  ou une borne finie ou infinie de  $\mathcal{D}$ . Soit

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$  telle que  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_0$ .

Si  $f$  tend vers  $\ell$  en  $x_0$  alors  $f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ .

## IV — Limites et ordre

**Proposition 4.1** — Si  $f$  admet une limite finie en  $x_0$  alors  $f$  est bornée sur un voisinage de  $x_0$ .

**Proposition 4.2** — Si  $f$  admet une limite strictement positive en  $x_0$  alors  $f$  est strictement positive sur un voisinage de  $x_0$ .

**Corollaire 4.3** — Si  $f$  admet une limite strictement négative en  $x_0$  alors  $f$  est négative sur un voisinage de  $x_0$ .

**Corollaire 4.4** — Si  $f$  admet une limite finie non nulle en  $x_0$  alors  $f$  est non nulle sur un voisinage de  $x_0$ .

**Proposition 4.5** — Soit  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $x_0$  un point ou une borne finie ou infinie de  $\mathcal{D}$ . On suppose que  $f$  admet une limite en  $x_0$ .

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad f(x) > a \implies \lim_{x_0} f \geq a$$

**Corollaire 4.6** — Soit  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ , soit  $x_0$  un point ou une borne finie ou infinie de  $\mathcal{D}$ .

Si  $f$  et  $g$  admettent toutes deux une limite en  $x_0$ , et si

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad f(x) < g(x)$$

alors

$$\lim_{x_0} f < \lim_{x_0} g$$

#### **Théorème 4.7 — Théorème d'encadrement**

Soit  $f$ ,  $u$  et  $v$  trois fonctions définies sur  $\mathcal{D}$  et  $x_0$  un point ou une borne finie ou infinie de  $\mathcal{D}$ .

Si  $\forall x \in \mathcal{D} \setminus \{x_0\}, \quad u(x) < f(x) < v(x)$

si  $u$  et  $v$  admettent une limite en  $x_0$

et si  $\lim_{x_0} u = \lim_{x_0} v$

alors  $f$  admet une limite en  $x_0$

et  $\lim_{x_0} f = \lim_{x_0} u = \lim_{x_0} v$

#### **Théorème 4.8 — Théorème de minoration/majoration**

Soit  $x_0$  un point de  $\mathcal{D}$ , ou une borne finie ou infinie de  $\mathcal{D}$ . Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $\mathcal{D}$  telles que

$$\forall x \in \mathcal{D} \setminus \{x_0\}, \quad f(x) < g(x)$$

Si  $\lim_{x_0} f = +\infty$  alors  $\lim_{x_0} g = +\infty$ .

Si  $\lim_{x_0} g = -\infty$  alors  $\lim_{x_0} f = -\infty$ .

**Théorème 4.9** — Soit  $f$  est une fonction monotone sur un intervalle  $]a ; b[$ , avec éventuellement  $a$  et  $b$  infinis.

Alors  $f$  admet une limite (finie ou infinie) en  $a$  et en  $b$ .

**Corollaire 4.10** — Si  $f$  est une fonction monotone sur un intervalle  $I$  alors  $f$  admet une limite finie à gauche et à droite en tout point de  $I$ .

