

Calcul intégral

Notations du chapitre — Dans tout ce chapitre, I est un intervalle de \mathbb{R} non vide et non réduit à un point.

I — Primitive d'une fonction

Définition 1.1 — Primitive d'une fonction

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $F : I \rightarrow \mathbb{R}$.

On dit que F est une **primitive** de f sur I si et seulement si F est dérivable sur I et si

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x).$$

Théorème 1.2 — Structure de l'ensemble des primitives

Si une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ admet pour primitive F_0 , alors l'ensemble des primitives de f est $\{F_0 + \lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Théorème 1.3 — Unicité d'une primitive

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que f admet une primitive.

Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.

Il existe une unique primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$.

Théorème 1.4 — Existence d'une primitive d'une fonction continue

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Alors f admet une primitive sur I .

II — Intégrale d'une fonction continue

Définition 2.1 — Intégrale d'une fonction continue

Soit a et b deux points de I , $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et F une primitive de f .

La quantité $F(b) - F(a)$ ne dépend pas de la primitive choisie.

On appelle **intégrale de f entre a et b** le réel $F(b) - F(a)$ noté

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x) \, dx \stackrel{\text{def}}{=} [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Théorème 2.2 — Théorème fondamental de l'Analyse

Soit f une fonction continue sur I et $a \in I$.

La fonction

$$F_a : \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_a^x f \end{cases}$$

est l'unique primitive de f qui s'annule en a .

Soient deux réels a et b quelconques, f une fonction continue définie entre a et b . Soit les points $A(a, 0)$, $B(b, 0)$, $B'(b, f(b))$ et $A'(a, f(a))$.

Le domaine orienté \mathcal{A}_f est délimité par le segment $[AB]$, puis le segment $[BB']$ puis la portion de la courbe représentative de f comprise entre B' et A' et enfin par le segment $[A'A]$.

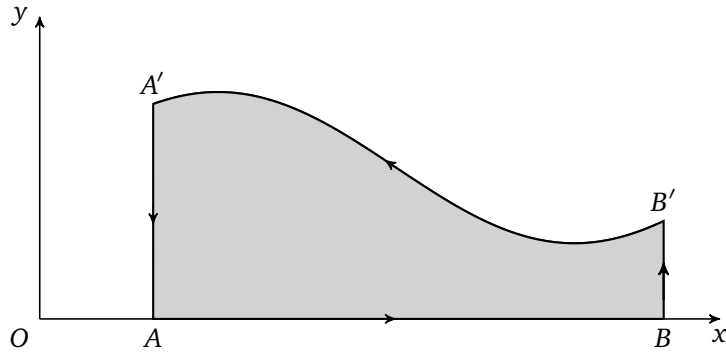


FIGURE I.1 — Aire d'un domaine défini à partir d'une fonction.

Par définition l'**aire algébrique** du domaine \mathcal{I}_f est l'intégrale entre a et b de f :

$$\mathcal{A}(\mathcal{I}_f) = \int_a^b f$$

III — Propriétés de l'intégrale

Propriété 3.1 — Relation de Chasles

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et a, b et c trois points de I .

$$\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$$

Et $\int_a^a f = 0$ et $\int_a^b f = -\int_b^a f$

Corollaire 3.2 — Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a, b) \in \mathbb{R}$, $f : [a ; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in [a ; b]^n$.

On a
$$\sum_{k=1}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f = \int_{x_1}^{x_n} f$$

Propriété 3.3 — Linéarité de l'intégrale

Soit f et g deux fonctions continues définies sur I admettant pour primitives respectivement F et G :

- $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I , et donc

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

- si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors λF est une primitive de λf sur I , et donc

$$\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$$

Corollaire 3.4 — Soit $(f_k)_{1 \leq k \leq n}$ n fonctions continues sur I .

On a
$$\sum_{k=0}^n \int_a^b f_k = \int_a^b \sum_{k=0}^n f_k$$

Propriété 3.5 — Positivité de l'intégrale

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $(a, b) \in I$. Si f est positive sur $[a ; b]$ et si $a \leq b$ alors $\int_a^b f \geq 0$. De plus si $\int_a^b f = 0$ alors f est nulle sur I .

Corollaire 3.6 — « Croissance » de l'intégrale

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues.

$$\text{Si } f \leq g \text{ et si } a \leq b \text{ alors } \int_a^b f \leq \int_a^b g$$

Proposition 3.7 — Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

IV — Méthodes de calcul d'intégrales

Propriété 4.1 — Utilisation du formulaire

Soit u une fonction de classe C^1 sur I , qui ne s'annule pas sur cette intervalle. On a alors :

- u^{n+1} est une primitive de $-(n+1)u'u^n$ sur I (avec $n \neq -1$);
- $1/u$ est une primitive de $-u'/u^2$ sur I ;
- $\ln |u|$ est une primitive de u'/u sur I .

Théorème 4.2 — Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions de classe C^1 sur un segment $[a ; b]$

$$\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$$

Propriété 4.3 — Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, J un intervalle de \mathbb{R} et $u : J \rightarrow I$.

Si f et u sont de classe C^1 alors la fonction $\varphi : \begin{cases} J \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto u'(x)f'(u(x)) \end{cases}$ admet

pour primitive la fonction $f \circ u$.

Théorème 4.4 — Changement de variables – I

Soit a et b deux réels, u une fonction de classe C^1 de $[a ; b]$ dans \mathbb{R} et f une fonction définie sur l'intervalle $u \llbracket a ; b \rrbracket$. On a l'égalité

$$\int_a^b f(u(t)) u'(t) dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x) dx$$

Théorème 4.5 — Changement de variables – II

Soit a et b deux réels, f une fonction continue sur $[a ; b]$. Soit u une fonction définie sur $[a ; b]$, de classe C^1 sur cet intervalle et dont la dérivée ne s'annule pas.

On a alors

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(x))u'(x) dx$$

Proposition 4.6 — Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

- Si f est paire et si $[-\alpha ; \alpha] \subset I$ alors $\int_{-\alpha}^{\alpha} f = 2 \int_0^{\alpha} f$;
- si f est impaire et si $[-\alpha ; \alpha] \subset I$ alors $\int_{-\alpha}^{\alpha} f = 0$;

V — Calcul approché d'intégrale

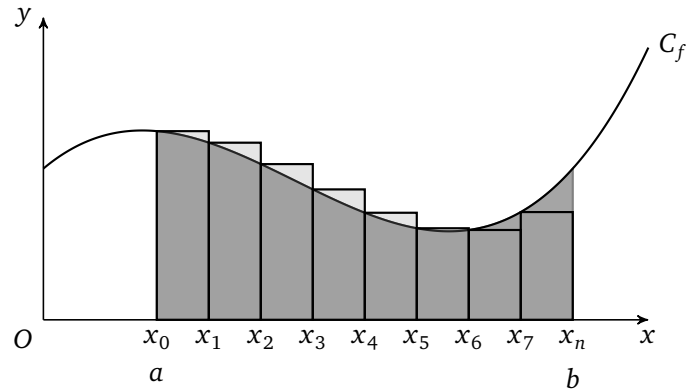


FIGURE I.2 — Méthode des rectangles à gauche : $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$

Proposition 5.1 —

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_a^b f(t) dt$$

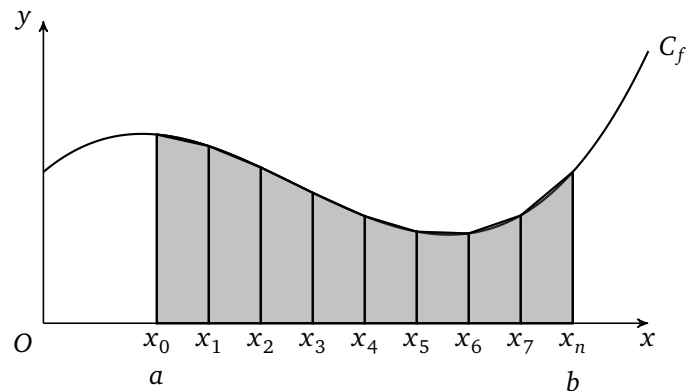


FIGURE I.3 — Méthode des trapèzes $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) + f\left(\frac{k+1}{n}\right) \right]$

Définition 5.2 — Valeur moyenne d'une fonction

Soit $f : [a ; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, avec $a < b$. Par définition la valeur moyenne de f est le réel

$$\text{valeur moyenne de } f \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{b-a} \int_a^b f$$

Théorème 5.3 — Somme de Riemann à gauche

Soit $f : [0 ; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt$$

Théorème 5.4 — Somme de Riemann à droite

Soit $f : [0 ; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt$$