# Calcul intégral

**Notations du chapitre** — *Dans tout ce chapitre, $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.*

## I — Primitive d'une fonction

**Définition 1.1 — Primitive d'une fonction**
*Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$.*
*On dit que $F$ est une **primitive** de $f$ sur $I$ si et seulement si $F$ est dérivable sur $I$ et si*

$$\forall x \in I, \qquad F'(x) = f(x).$$

**Théorème 1.2 — Structure de l'ensemble des primitives**
*Si une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ admet pour primitive $F_0$, alors l'ensemble des primitives de $f$ est $\{F_0 + \lambda \ \text{avec} \ \lambda \in \mathbb{R}\}$.*

**Théorème 1.3 — Unicité d'une primitive**
*Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que $f$ admet une primitive.*
*Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.*
*Il existe une unique primitive $F$ de $f$ telle que $F(x_0) = y_0$.*

**Théorème 1.4 — Existence d'une primitive d'une fonction continue**
*Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.*
*Alors $f$ admet une primitive sur $I$.*

## II — Intégrale d'une fonction continue

**Définition 2.1 — Intégrale d'une fonction continue**
*Soit $a$ et $b$ deux points de $I$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $F$ une primitive de $f$.*
*La quantité $F(b) - F(a)$ ne dépend pas de la primitive choisie.*
*On appelle **intégrale de $f$ entre a et b** le réel $F(b) - F(a)$ noté*

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{déf.}}{=} \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)$$

**Théorème 2.2 — Théorème fondamental de l'Analyse**
*Soit $f$ une fonction continue sur $I$ et $a \in I$.*
*La fonction*

$$F_a : \left| \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_a^x f \end{array} \right.$$

*est l'unique primitive de $f$ qui s'annule en $a$.*

Soient deux réels $a$ et $b$ quelconques, $f$ une fonction continue définie entre $a$ et $b$.
Soit les points $A(a,0)$, $B(b,0)$, $B'(b, f(b))$ et $A'(a, f(a))$.
Le domaine orienté $\mathscr{I}_f$ est délimité par le segment $[AB]$, puis le segment $[BB']$ puis la portion de la courbe représentative de $f$ comprise entre $B'$ et $A'$ et enfin par le segment $[A'A]$.

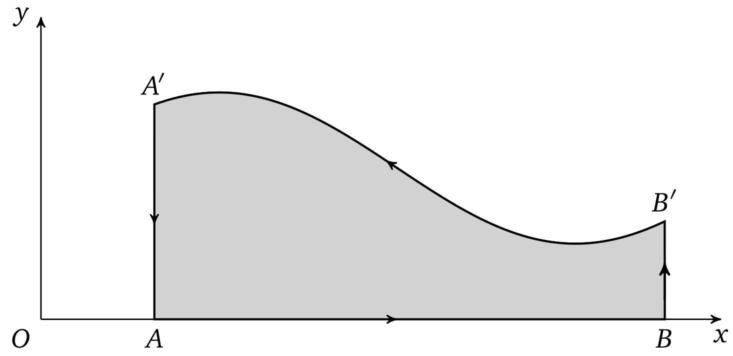


Figure I.1 — *Aire d'un domaine défini à partir d'une fonction.*

Par définition **l'aire algébrique** du domaine $\mathscr{I}_f$ est l'intégrale entre $a$ et $b$ de $f$ :

$$\mathscr{A}\left(\mathscr{I}_f\right) = \int_a^b f$$

## III — Propriétés de l'intégrale

**Propriété 3.1 — Relation de Chasles**
*Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $a$, $b$ et $c$ trois points de $I$.*

$$\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$$

*Et*

$$\int_a^a f = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_a^b f = -\int_b^a f$$

**Corollaire 3.2 —** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a, b) \in \mathbb{R}$, $f : [\,a\,;\,b\,] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in [\,a\,;\,b\,]^n$.*

*On a*

$$\sum_{k=1}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f = \int_{x_1}^{x_n} f$$

**Propriété 3.3 — Linéarité de l'intégrale**
*Soit $f$ et $g$ deux fonctions continues définies sur $I$ admettant pour primitives respectivement $F$ et $G$ :*

- *$F + G$ est une primitive de $f + g$ sur $I$, et donc*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

- *si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda F$ est une primitive de $\lambda f$ sur $I$, et donc*

$$\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$$

**Corollaire 3.4 —** *Soit $(f_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ $n$ fonctions continues sur $I$.*

*On a*

$$\sum_{k=0}^{n} \int_a^b f_k = \int_a^b \sum_{k=0}^{n} f_k$$

**Propriété 3.5 — Positivité de l'intégrale**
*Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $(a, b) \in I$. Si $f$ est positive sur $[\,a\,;\,b\,]$ et si $a \leqslant b$ alors $\displaystyle\int_a^b f \geqslant 0$. De plus si $\int_a^b f = 0$ alors $f$ est nulle sur $I$.*

**Corollaire 3.6 — « Croissance » de l'intégrale**
*Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues.*

$$\text{Si} \quad f \leqslant g \text{ et si } a \leqslant b \quad \text{alors} \quad \int_a^b f \leqslant \int_a^b g$$

**Proposition 3.7** — *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.*

$$\left| \int_a^b f \right| \leqslant \int_a^b |f|$$

## IV — Méthodes de calcul d'intégrales

**Propriété 4.1 — Utilisation du formulaire**
*Soit $u$ une fonction de classe $C^1$ sur $I$, qui ne s'annule pas sur cette intervalle. On a alors :*

- *$u^{n+1}$ est une primitive de $-(n+1)u'u^n$ sur $I$ (avec $n \neq -1$) ;*
- *$1/u$ est une primitive de $-u'/u^2$ sur $I$ ;*
- *$\ln|u|$ est une primitive de $u'/u$ sur $I$.*

**Théorème 4.2 — Intégration par parties**
*Soient $u$ et $v$ deux fonctions de classe $C^1$ sur un segment $[a\,;\,b]$*

$$\int_a^b uv' = \left[uv\right]_a^b - \int_a^b u'v$$

**Propriété 4.3** — *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $J$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $u : J \longrightarrow I$.*

*Si $f$ et $u$ sont de classe $C^1$ alors la fonction $\varphi : \begin{vmatrix} J \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto u'(x)f'(u(x)) \end{vmatrix}$ admet pour primitive la fonction $f \circ u$.*

**Théorème 4.4 — Changement de variables – I**
*Soit $a$ et $b$ deux réels, $u$ une fonction de classe $C^1$ de $[\,a\,;\,b\,]$ dans $\mathbb{R}$ et $f$ une fonction définie sur l'intervalle $u\langle[\,a\,;\,b\,]\rangle$. On a l'égalité*

$$\int_a^b f(u(t))\,u'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$$

**Théorème 4.5 — Changement de variables – II**
*Soit $a$ et $b$ deux réels, $f$ une fonction continue sur $[\,a\,;\,b\,]$. Soit $u$ une fonction définie sur $[\,a\,;\,b\,]$, de classe $C^1$ sur cet intervalle et dont la dérivée ne s'annule pas.*
*On a alors*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(x))u'(x)\,\mathrm{d}x$$

**Proposition 4.6** — *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.*

- *Si $f$ est paire et si $[-\alpha\,;\,\alpha] \subset I$ alors $\int_{-\alpha}^{\alpha} f = 2\int_0^{\alpha} f$ ;*
- *si $f$ est impaire et si $[-\alpha\,;\,\alpha] \subset I$ alors $\int_{-\alpha}^{\alpha} f = 0$;*

## V — Calcul approché d'intégrale

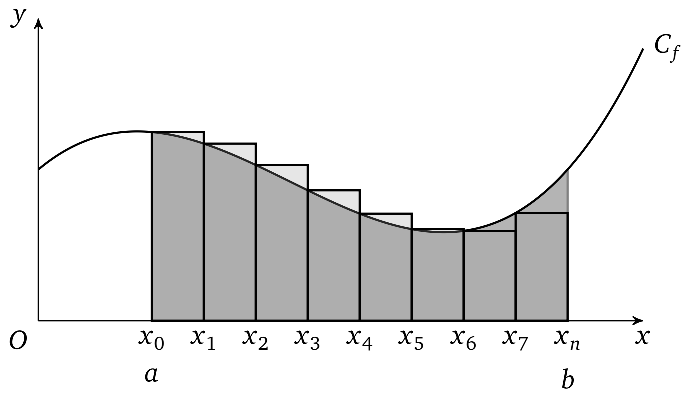


Figure I.2 — *Méthode des rectangles à gauche :* $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$

**Proposition 5.1 —**

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

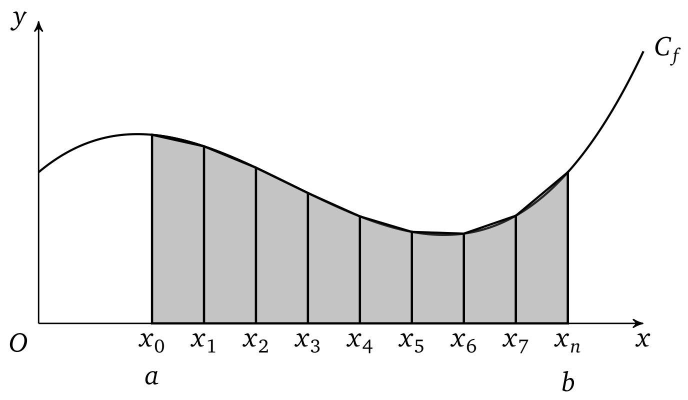


Figure I.3 — *Méthode des trapèzes* $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{k}{n}\right) + f\left(\frac{k+1}{n}\right)\right]$

**Définition 5.2 — Valeur moyenne d'une fonction**

*Soit $f : [\,a\,;\,b\,] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, avec $a < b$. Par définition la valeur moyenne de $f$ est le réel*

$$\textit{valeur moyenne de } f \overset{\text{déf.}}{=} \frac{1}{b-a}\int_a^b f$$

**Théorème 5.3 — Somme de Riemann à gauche**

*Soit $f : [0\,;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

**Théorème 5.4 — Somme de Riemann à droite**

*Soit $f : [0\,;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$