Calcul intégral

Notations du chapitre — *Dans tout ce chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.*

I — Primitive d'une fonction

Définition 1.1 — Primitive d'une fonction
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$.
On dit que F est une **primitive** *de f sur I si et seulement si F est dérivable sur I et si*

$$\forall x \in I, \qquad F'(x) = f(x).$$

Théorème 1.2 — Structure de l'ensemble des primitives
Si une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ admet pour primitive F_0, alors l'ensemble des primitives de f est $\{F_0 + \lambda \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Théorème 1.3 — Unicité d'une primitive
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que f admet une primitive. Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.
Il existe une unique primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$.

Théorème 1.4 — Existence d'une primitive d'une fonction continue
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.
Alors f admet une primitive sur I.

II — Intégrale d'une fonction continue

Définition 2.1 — Intégrale d'une fonction continue
Soit a et b deux points de I, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et F une primitive de f.
La quantité $F(b) - F(a)$ ne dépend pas de la primitive choisie.
On appelle **intégrale de f entre a et b** *le réel $F(b) - F(a)$ noté*

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{déf.}}{=} \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Théorème 2.2 — Théorème fondamental de l'Analyse
Soit f une fonction continue sur I et $a \in I$.
La fonction

$$F_a : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_a^x f \end{array} \right.$$

est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Soient deux réels a et b quelconques, f une fonction continue définie entre a et b. Soit les points $A(a,0)$, $B(b,0)$, $B'(b, f(b)$ et $A'(a, f(a))$.
Le domaine orienté $\mathscr{I}_f$ est délimité par le segment $[AB]$, puis le segment $[BB']$ puis la portion de la courbe représentative de f comprise entre B' et A' et enfin par le segment $[A'A]$.

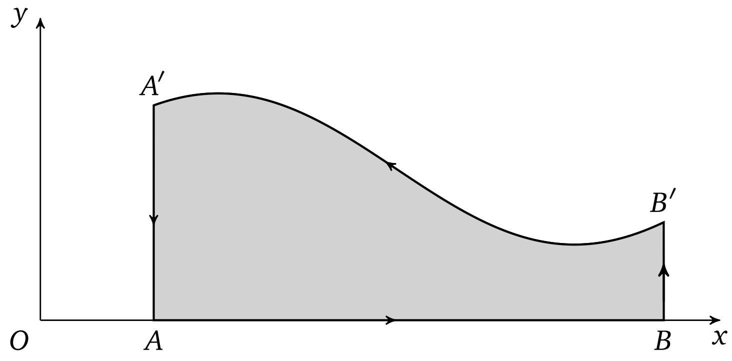

FIGURE I.1 — *Aire d'un domaine défini à partir d'une fonction.*

Par définition **l'aire algébrique** du domaine $\mathscr{I}_f$ est l'intégrale entre a et b de f :

$$\mathscr{A}\left(\mathscr{I}_f\right) = \int_a^b f$$

III — Propriétés de l'intégrale

Propriété 3.1 — Relation de Chasles
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et a, b et c trois points de I.

$$\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$$

Et $$\int_a^a f = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_a^b f = -\int_b^a f$$

Corollaire 3.2 — *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a, b) \in \mathbb{R}$, $f : [\,a\,;\,b\,] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in [\,a\,;\,b\,]^n$.*

On a $$\sum_{k=1}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f = \int_{x_1}^{x_n} f$$

Propriété 3.3 — Linéarité de l'intégrale
Soit f et g deux fonctions continues définies sur I admettant pour primitives respectivement F et G :

- *$F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I, et donc*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

- *si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors λF est une primitive de λf sur I, et donc*

$$\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$$

Corollaire 3.4 — *Soit $(f_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ n fonctions continues sur I.*

On a $$\sum_{k=0}^{n} \int_a^b f_k = \int_a^b \sum_{k=0}^{n} f_k$$

Propriété 3.5 — Positivité de l'intégrale
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $(a, b) \in I$.
Si f est positive sur $[\,a\,;\,b\,]$ et si $a \leqslant b$ alors $\displaystyle\int_a^b f \geqslant 0$.

De plus si $\int_a^b f = 0$ alors f est nulle sur I.

Corollaire 3.6 — « Croissance » de l'intégrale
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues.

$$\text{Si} \quad f \leqslant g \text{ et si } a \leqslant b \quad \text{alors} \quad \int_a^b f \leqslant \int_a^b g.$$

**Proposition 3.7 — ** *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.*

$$\left| \int_a^b f \right| \leqslant \int_a^b |f|$$

IV — Méthodes de calcul d'intégrales

Propriété 4.1 — Utilisation du formulaire
Soit u une fonction de classe C^1 sur I, qui ne s'annule pas sur cette intervalle. On a alors :

- *u^{n+1} est une primitive de $-(n+1)u'u^n$ sur I (avec $n \neq -1$) ;*
- *$1/u$ est une primitive de $-u'/u^2$ sur I ;*
- *$\ln|u|$ est une primitive de u'/u sur I.*

Théorème 4.2 — Intégration par parties
Soient u et v deux fonctions de classe C^1 sur un segment $[a ; b]$

$$\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$$

**Propriété 4.3 — ** *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, J un intervalle de $\mathbb{R}$ et $u : J \longrightarrow I$.*
Si f et u sont de classe C^1 alors la fonction $\varphi : \left| \begin{array}{l} J \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto u'(x)f'(u(x)) \end{array} \right.$ admet pour primitive la fonction $f \circ u$.

Théorème 4.4 — Changement de variables – I
Soit a et b deux réels, u une fonction de classe C^1 de $[a ; b]$ dans $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur l'intervalle $u\langle [a ; b] \rangle$. On a l'égalité

$$\int_a^b f(u(t))\, u'(t)\, \mathrm{d}t = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)\, \mathrm{d}x$$

Théorème 4.5 — Changement de variables – II
Soit a et b deux réels, f une fonction continue sur $[a ; b]$. Soit u une fonction définie sur $[a ; b]$, de classe C^1 sur cet intervalle et strictement monotone. On a alors

$$\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(x))\, u'(x)\, \mathrm{d}x$$

**Proposition 4.6 — ** *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.*

- *Si f est paire et si $[-\alpha ; \alpha] \subset I$ alors $\int_{-\alpha}^{\alpha} f = 2\int_0^{\alpha} f$;*
- *si f est impaire et si $[-\alpha ; \alpha] \subset I$ alors $\int_{-\alpha}^{\alpha} f = 0$;*

V — Calcul approché d'intégrale

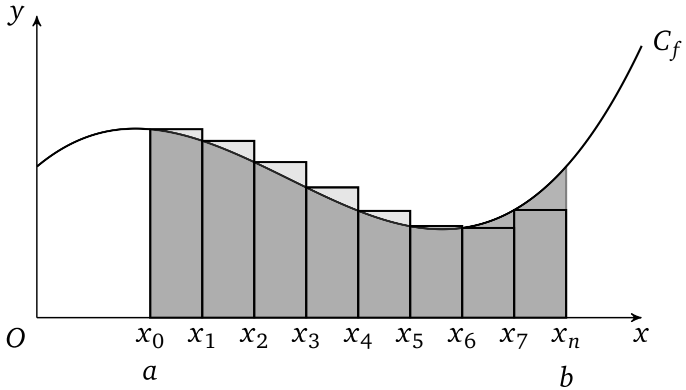

FIGURE I.2 — *Méthode des rectangles à gauche :* $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$

Proposition 5.1 —

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

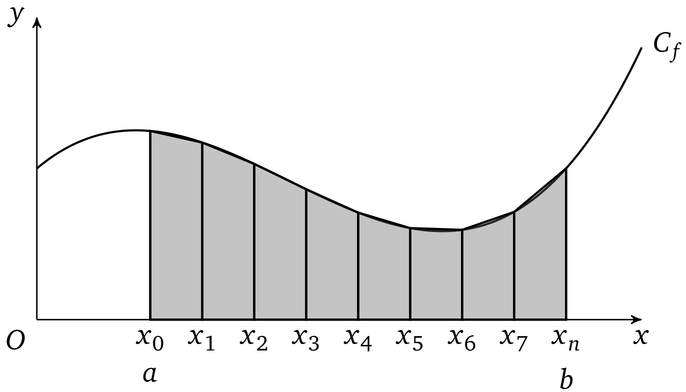

FIGURE I.3 — *Méthode des trapèzes* $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{k}{n}\right) + f\left(\frac{k+1}{n}\right)\right]$

Définition 5.2 — Valeur moyenne d'une fonction

Soit $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, avec $a < b$. Par définition la valeur moyenne de f est le réel

$$\text{valeur moyenne de } f \overset{\text{déf.}}{=} \frac{1}{b-a}\int_a^b f$$

Théorème 5.3 — Somme de Riemann à gauche

Soit $f : [0\,;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

Théorème 5.4 — Somme de Riemann à droite

Soit $f : [0\,;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$