Fonctions usuelles

I — Vocabulaire sur les fonctions

Définition 1.1 — Fonction numérique

On appelle **fonction numérique** *toute application d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*

Définition 1.2 — Domaine de définition

Soit une expression algébrique $f(x)$ dépendant d'une variable x.

L'ensemble des valeurs réelles pour lesquelles cette expression est syntaxiquement correcte s'appelle **le domaine de définition** $\mathscr{D}_f$ *de f.*

L'expression algébrique $f(x)$ définit donc une fonction $f : \mathscr{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$.

Définition 1.3 — Opérations usuelles sur les fonctions

Soit I une partie de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions numériques. On définit

— le **produit de f par un scalaire λ** $\quad \lambda f : \left| \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \lambda f(x) \end{array} \right.$

— la **somme de f et de g** $\quad f+g : \left| \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x)+g(x) \end{array} \right.$

— le **produit de f et de g** $\quad f \times g : \left| \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x)\times g(x) \end{array} \right.$

Sur l'ensemble $J = \{x \in I \text{ tel que } f(x) \neq 0\}$, on peut définir **l'inverse de f** *par*

$$1/f : \left| \begin{array}{l} J \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 1/f(x) \end{array} \right.$$

Définition 1.4 — Composée de deux fonctions

Soit f une fonction numérique définie sur un ensemble $\mathscr{D}$ qui prend ses valeurs dans un ensemble $\mathscr{E}$ et g une fonction numérique de $\mathscr{E}$ dans $\mathbb{R}$.

On définit la **composée de f et g** *notée* **$g \circ f$** *par*

$$g \circ f : \left| \begin{array}{l} \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto g(f(x)) \end{array} \right.$$

Définition 1.5 — Fonctions et ordre

Soit f une fonction de $\mathscr{D}$ dans $\mathbb{R}$.

– *f est* **majorée sur $\mathscr{D}$** *si et seulement si*

$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathscr{D}, \qquad f(x) \leqslant M$$

– *f est* **minorée sur $\mathscr{D}$** *si et seulement si*

$$\exists m \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathscr{D}, \qquad f(x) \geqslant m$$

– *f est* **bornée sur $\mathscr{D}$** *si et seulement si f est majorée et minorée sur $\mathscr{D}$.*
– *f est* **croissante sur $\mathscr{D}$** *si et seulement si*

$$\forall (x,y) \in \mathscr{D}^2, \qquad x \leqslant y \quad \Longrightarrow \quad f(x) \leqslant f(y)$$

– *f est* **strictement croissante sur $\mathscr{D}$** *si et seulement si*

$$\forall (x,y) \in \mathscr{D}^2, \qquad x < y \quad \Longrightarrow \quad f(x) < f(y)$$

– f *est* ***décroissante sur*** $\mathscr{D}$ *si et seulement si*

$$\forall (x,y)\in\mathscr{D}^2,\qquad x\leqslant y \quad\Longrightarrow\quad f(x)\geqslant f(y)$$

– f *est* ***strictement décroissante sur*** $\mathscr{D}$ *si et seulement si*

$$\forall (x,y)\in\mathscr{D}^2,\qquad x< y \quad\Longrightarrow\quad f(x)> f(y)$$

– f *est* ***monotone sur*** $\mathscr{D}$ *si et seulement si* f *est croissante sur* $\mathscr{D}$ *ou décroissante sur* $\mathscr{D}$.
– f *est* ***strictement monotone sur*** $\mathscr{D}$ *si et seulement si* f *est strictement croissante sur* $\mathscr{D}$ *ou strictement décroissante sur* $\mathscr{D}$.
– f *est* ***périodique de période*** T ***sur*** $\mathscr{D}$ *si et seulement si*

$$\forall x\in\mathscr{D},\qquad x+T\in\mathscr{D} \quad\Longrightarrow\quad f(x+T)=f(x)$$

Propriété 1.6 — Caractérisation des fonctions bornées

Une fonction $f\ :\ \mathscr{D}\longrightarrow\mathbb{R}$ *définie sur une partie* $\mathscr{D}$ *de* $\mathbb{R}$ *est bornée si et seulement si*

$$\exists C\in\mathbb{R},\quad \forall x\in\mathscr{D},\qquad |f(x)|\leqslant C$$

II — Fonctions monômes

Tableau de variation et graphe

Cas n pair

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
f_n	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Cas n impair

x	$-\infty$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	
f_n	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

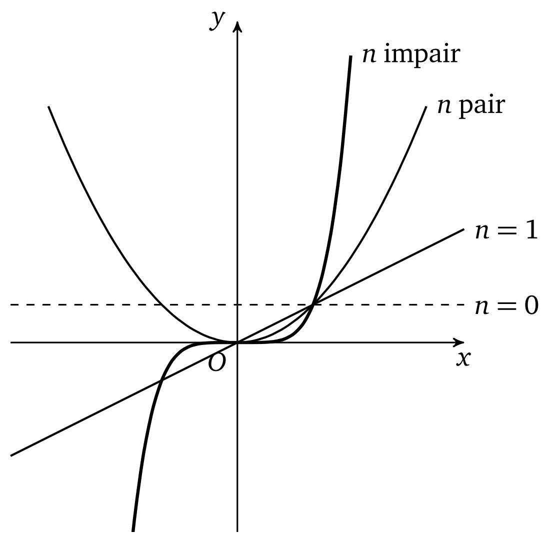

FIGURE I.1 — *Graphe de* $x\mapsto x^n$

III — Racine carrée

Définition 3.1 — Racine carrée

La fonction $f : \begin{array}{|l} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{array}$ *est continue et strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+$.

Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ *dans* $f\langle\mathbb{R}_+\rangle = \mathbb{R}_+$. *Sa bijection réciproque est la fonction* ***racine carrée***, *définie et continue sur* $\mathbb{R}_+$ $\sqrt{\cdot} : \begin{array}{|l} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{array}$.

Propriété 3.2 — Racine carrée

Soit x et y deux réels positifs. On a

1) $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$;
2) *si* $x \neq 0$, $\sqrt{1/x} = 1/\sqrt{x}$;
3) *pour* $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{x^n} = (\sqrt{x})^n$;

La fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, n'est pas dérivable en 0 et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Tableau de variation et graphe

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$
f	0	$\nearrow$ $+\infty$

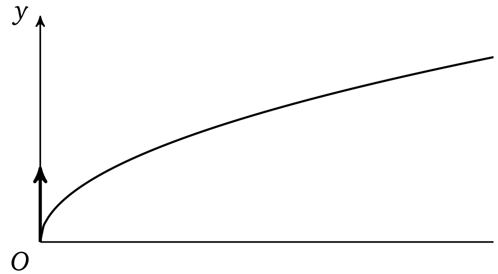

FIGURE I.2 — *Graphe de* $x \mapsto \sqrt{x}$

IV — Valeur absolue

Définition 4.1 — Valeur absolue

La fonction ***valeur absolue*** *est définie par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |x| \overset{\text{déf.}}{=} x \quad \text{si } x \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad |x| \overset{\text{déf.}}{=} -x \quad \text{si } x < 0$$

Cette fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et n'est pas dérivable en 0.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(|x|) = 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(|x|) = -1$$

ou bien $$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(|x|) = |x|/x$$

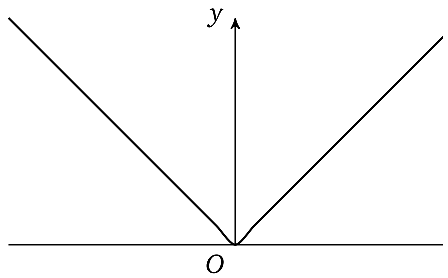

FIGURE I.3 — *Graphe de* $x \mapsto |x|$

V — Logarithme népérien

V.1 — Définition et propriété caractéristique

Définition 5.1 — Logarithme népérien

La fonction $f : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1/x \end{array} \right.$ *est définie sur un intervalle et continue : elle admet une unique primitive s'annulant en* 1. *Cette primitive est la fonction **logarithme népérien*** ln

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(x) \overset{\text{déf.}}{=} \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

Remarquer que c'est une définition « calculable » de ln : l'intégrale peut être estimée à une précision quelconque, par exemple par la méthode des rectangles.

Théorème 5.2 — Propriété caractéristique du logarithme

$$\forall (x,y) \in {\mathbb{R}_+^*}^2, \quad \ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$$

Corollaire 5.3 — $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(1/x) = -\ln x$

Corollaire 5.4 — $\forall (x) \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \qquad \ln(x^n) = n\ln(x)$

Définition 5.5 — Logarithme de base *a*

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. *On appelle **logarithme de base a** et on note* $\log_a$ *la fonction définie sur* $\mathbb{R}_+^*$ *par*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \log_a x = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

En particulier on a $\log_a(a) = 1$.

Cette fonction est proportionnelle au logarithme. Elle hérite de ses propriétés opératoires, de régularité, etc. On note le logarithme de base 10 « Log ».

Application — Nombre de chiffres dans l'écriture décimal d'un entier

Soit n un entier Le nombre de chiffre dans l'écriture décimale de n est $\lfloor \mathrm{Log}(n) \rfloor + 1$.

Propriété 5.7 —

1) ln *est une fonction continue et strictement croissante.*
2) $\ln(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ *;*
3) $\ln(x) \xrightarrow[x\to 0]{} -\infty$ *;*

Propriété 5.8 — Propriétés dite de « croissances comparées »

1) $\dfrac{\ln(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$*;*
2) $x\ln(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$

Tableau de variation et graphe

x	0		$+\infty$
$\ln'(x)$		$+$	
$\ln$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

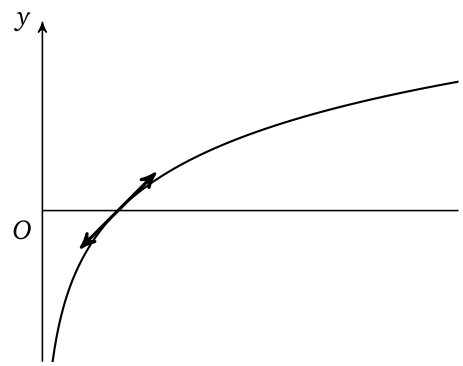

Figure I.4 — *Graphe de* ln

VI — Exponentielle

VI.1 — Définition et propriété caractéristique

Définition 6.1 — Exponentielle
*La fonction $x \mapsto \ln(x)$ étant continue et strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, elle définit une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\ln\left\langle \mathbb{R}_+^* \right\rangle = \mathbb{R}$. Sa bijection réciproque est la fonction **exponentielle**, noté* **exp**.

Théorème 6.2 — Propriété caractéristique de l'exponentielle

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$$

En posant $\mathrm{e} = \exp(1)$, on peut alors noter $\exp(x) = \mathrm{e}^x$. Cette notation puissance est justifiée par le fait que la propriété fondamentale de la notation puissance est vérifiée.

VI.2 — Étude de la fonction exp

Propriété 6.3 — *La fonction* exp

1) *est continue et strictement croissante ;*
2) $\mathrm{e}^x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ *et* $\mathrm{e}^x \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$*;*
3) *dérivable et égale à sa dérivée.*

Propriété 6.4 — Propriétés dite « de croissances comparées »

1) $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$*;*
2) $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$.

Tableau de variation et graphe

x	0		$+\infty$
$\ln'(x)$	‖	$+$	
$\ln$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

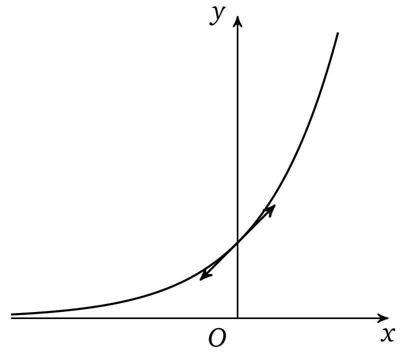

FIGURE I.5 — *Graphe de* exp

VI.3 — Fonction puissance réelle

Définition 6.5 — Fonction puissance
Soit a un réel strictement positif et x un réel quelconque. Alors par définition $a^x = \exp(x \ln(a))$.

On parle parfois d'exponentielle de base a.

Propriété 6.6 —

1) *Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $a^{x+y} = a^x a^y$ et $a^{xy} = a^{xy}$.*
2) *Pour $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $x \in \mathbb{R}$: $(ab)^x = a^x b^x$.*

Les règles de calculs de la notation puissance sont donc vérifiées, ce qui justifie l'usage de cette notation.

VII — Fonctions circulaires

VII.1 — Définition de cosinus, sinus

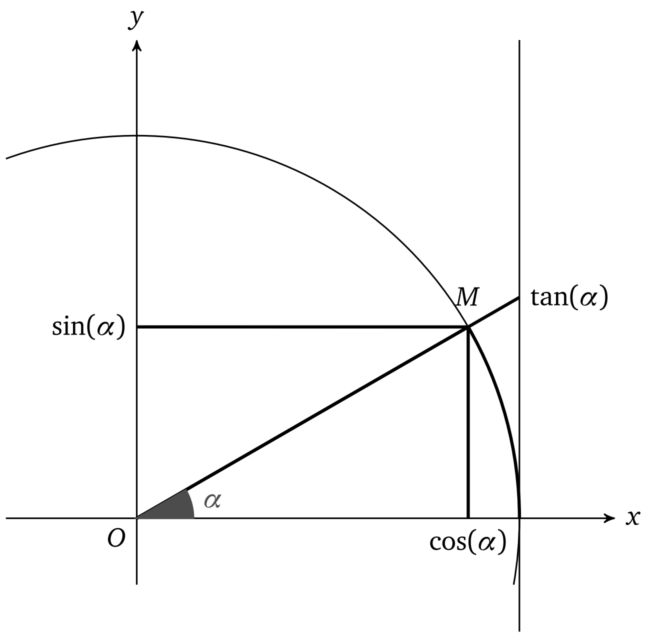

Figure I.6 — *Définition des fonctions circulaires*

Graphes

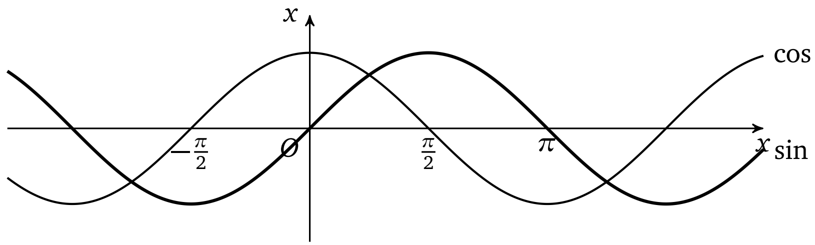

Figure I.7 — *Graphes de* sin *et* cos

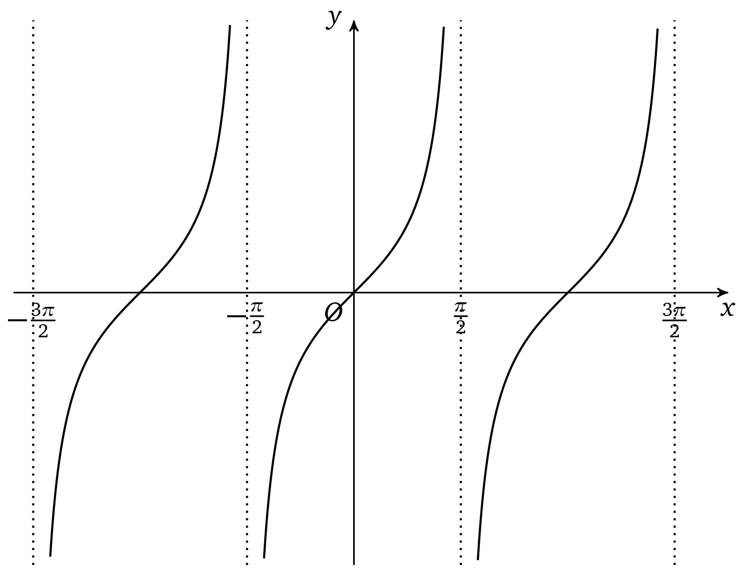

Figure I.8 — *Graphe de* tan