Fonctions usuelles

I — Vocabulaire sur les fonctions

Définition 1.1 — Fonction numérique
On appelle ***fonction numérique*** *toute application d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*

Définition 1.2 — Domaine de définition
Soit une expression algébrique $f(x)$ dépendant d'une variable x.
L'ensemble des valeurs réelles pour lesquelles cette expression est syntaxiquement correcte s'appelle ***le domaine de définition*** *$\mathscr{D}_f$ de f.*
L'expression algébrique $f(x)$ définit donc une fonction $f : \mathscr{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$.

Définition 1.3 — Opérations usuelles sur les fonctions
Soit I une partie de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions numériques. On définit

— *le* ***produit de f par un scalaire λ*** $\quad \lambda f : \left| \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \lambda f(x) \end{array} \right.$

— *la* ***somme de f et de g*** $\quad f+g : \left| \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x)+g(x) \end{array} \right.$

— *le* ***produit de f et de g*** $\quad f \times g : \left| \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) \times g(x) \end{array} \right.$

Sur l'ensemble $J = \{x \in I \ \text{tel que} \ f(x) \neq 0\}$, on peut définir ***l'inverse de f*** *par*

$$1/f : \left| \begin{array}{l} J \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 1/f(x) \end{array} \right.$$

Définition 1.4 — Composée de deux fonctions
Soit f une fonction numérique définie sur un ensemble $\mathscr{D}$ qui prend ses valeurs dans un ensemble $\mathscr{E}$ et g une fonction numérique de $\mathscr{E}$ dans $\mathbb{R}$.
On définit la ***composée de f et g*** *notée* ***$g \circ f$*** *par*

$$g \circ f : \left| \begin{array}{l} \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto g(f(x)) \end{array} \right.$$

Définition 1.5 — Fonctions et ordre
Soit f une fonction de $\mathscr{D}$ dans $\mathbb{R}$.

– *f est* ***majorée sur $\mathscr{D}$*** *si et seulement si*

$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathscr{D}, \qquad f(x) \leqslant M$$

– *f est* ***minorée sur $\mathscr{D}$*** *si et seulement si*

$$\exists m \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathscr{D}, \qquad f(x) \geqslant m$$

– *f est* ***bornée sur $\mathscr{D}$*** *si et seulement si f est majorée et minorée sur $\mathscr{D}$.*
– *f est* ***croissante sur $\mathscr{D}$*** *si et seulement si*

$$\forall (x,y) \in \mathscr{D}^2, \qquad x \leqslant y \quad \Longrightarrow \quad f(x) \leqslant f(y)$$

– *f est* ***strictement croissante sur $\mathscr{D}$*** *si et seulement si*

$$\forall (x,y) \in \mathscr{D}^2, \qquad x < y \quad \Longrightarrow \quad f(x) < f(y)$$

– *f est* ***décroissante sur $\mathscr{D}$*** *si et seulement si*

$$\forall (x,y) \in \mathscr{D}^2, \qquad x \leqslant y \quad \Longrightarrow \quad f(x) \geqslant f(y)$$

– f *est* ***strictement décroissante sur*** $\mathscr{D}$ *si et seulement si*

$$\forall (x,y) \in \mathscr{D}^2, \qquad x < y \quad \Longrightarrow \quad f(x) > f(y)$$

– f *est* ***monotone sur*** $\mathscr{D}$ *si et seulement si* f *est croissante sur* $\mathscr{D}$ *ou décroissante sur* $\mathscr{D}$.
– f *est* ***strictement monotone sur*** $\mathscr{D}$ *si et seulement si* f *est strictement croissante sur* $\mathscr{D}$ *ou strictement décroissante sur* $\mathscr{D}$.
– f *est* ***périodique de période*** $\boldsymbol{T}$ ***sur*** $\mathscr{D}$ *si et seulement si*

$$\forall x \in \mathscr{D}, \qquad x + T \in \mathscr{D} \quad \Longrightarrow \quad f(x+T) = f(x)$$

Propriété 1.6 — Caractérisation des fonctions bornées
Une fonction $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie sur une partie* $\mathscr{D}$ *de* $\mathbb{R}$ *est bornée si et seulement si*

$$\exists C \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathscr{D}, \qquad |f(x)| \leqslant C$$

II — Fonctions monômes

Tableau de variation et graphe

Cas n pair

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
f_n	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Cas n impair

x	$-\infty$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	
f_n	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

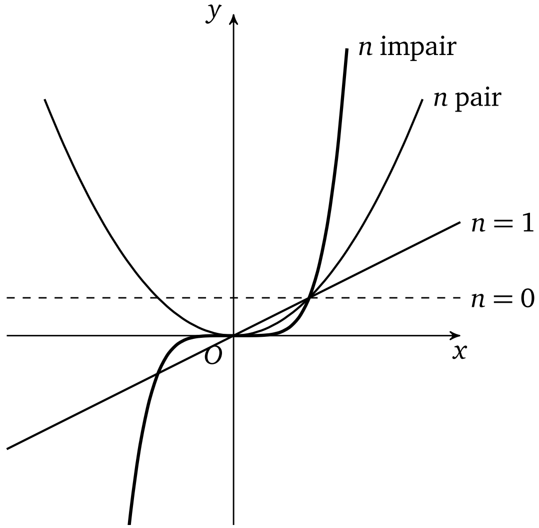

Figure I.1 — *Graphe de* $x \mapsto x^n$

III — Racine carrée

Définition 3.1 — Racine carrée
La fonction $f : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ *est continue et strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+$*.*
Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ *dans* $f\langle\mathbb{R}_+\rangle = \mathbb{R}_+$*. Sa bijection réciproque est la fonction* ***racine carrée****, définie et continue sur* $\mathbb{R}_+$ $\sqrt{\cdot} : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$.

Propriété 3.2 — Racine carrée
Soit x et y deux réels positifs. On a

1) $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$;
2) *si* $x \neq 0$, $\sqrt{1/x} = 1/\sqrt{x}$;
3) *pour* $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{x^n} = (\sqrt{x})^n$;

La fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, n'est pas dérivable en 0 et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Tableau de variation et graphe

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

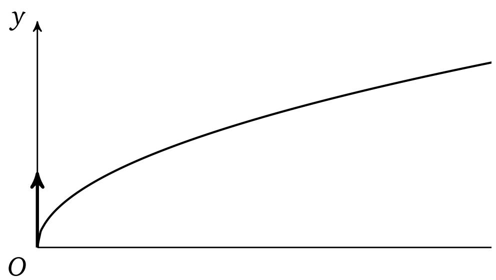

Figure I.2 — *Graphe de* $x \mapsto \sqrt{x}$

IV — Valeur absolue

Définition 4.1 — Valeur absolue
La fonction ***valeur absolue*** *est définie par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |x| \overset{\text{déf.}}{=} x \quad \text{si } x \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad |x| \overset{\text{déf.}}{=} -x \quad \text{si } x < 0$$

Cette fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et n'est pas dérivable en 0.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(|x|) = 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(|x|) = -1$$

ou bien

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(|x|) = |x|/x$$

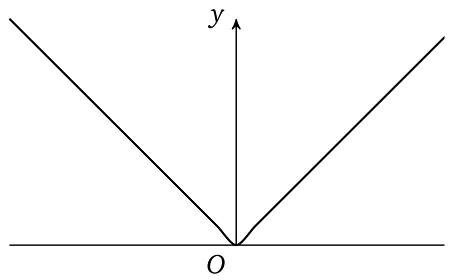

Figure I.3 — *Graphe de* $x \mapsto |x|$

V — Logarithme népérien

V.1 — Définition et propriété caractéristique

Définition 5.1 — Logarithme népérien
La fonction $f : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1/x \end{array} \right.$ *est définie sur un intervalle et continue : elle admet une unique primitive s'annulant en* 1. *Cette primitive est la fonction* ***logarithme népérien ln***

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(x) \overset{\text{déf.}}{=} \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

Remarquer que c'est une définition « calculable » de ln : l'intégrale peut être estimée à une précision quelconque, par exemple par la méthode des rectangles.

Théorème 5.2 — Propriété caractéristique du logarithme

$$\forall (x,y) \in {\mathbb{R}_+^*}^2, \quad \ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$$

Corollaire 5.3 — $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(1/x) = -\ln x$

Corollaire 5.4 — $\forall (x) \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \qquad \ln(x^n) = n\ln(x)$

Définition 5.5 — Logarithme de base *a*
Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. *On appelle* ***logarithme de base a*** *et on note* $\log_a$ *la fonction définie sur* $\mathbb{R}_+^*$ *par*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \log_a x = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

En particulier on a $\log_a(a) = 1$.

Cette fonction est proportionnelle au logarithme. Elle hérite de ses propriétés opératoires, de régularité, etc. On note le logarithme de base 10 « Log ».

Application — Nombre de chiffres dans l'écriture décimal d'un entier
Soit n un entier Le nombre de chiffre dans l'écriture décimale de n est $\lfloor \mathrm{Log}(n) \rfloor + 1$.

Propriété 5.7 —

1) ln *est une fonction continue et strictement croissante.*

2) $\ln(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$;

3) $\ln(x) \xrightarrow[x\to 0]{} -\infty$;

Propriété 5.8 — Propriétés dite de « croissances comparées »

1) $\dfrac{\ln(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$;

2) $x\ln(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

Tableau de variation et graphe

x	0		$+\infty$
$\ln'(x)$		$+$	
$\ln$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

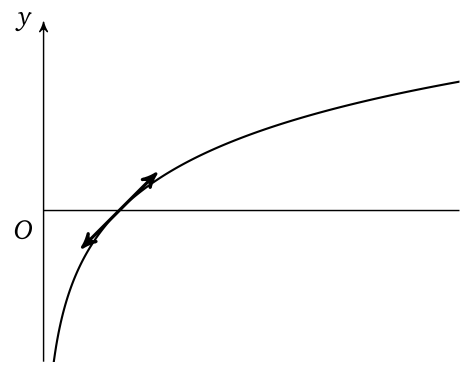

Figure I.4 — *Graphe de* ln

VI — Exponentielle

VI.1 — Définition et propriété caractéristique

Définition 6.1 — Exponentielle
*La fonction $x \mapsto \ln(x)$ étant continue et strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, elle définit une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\ln\left\langle \mathbb{R}_+^* \right\rangle = \mathbb{R}$. Sa bijection réciproque est la fonction **exponentielle**, noté* **exp**.

Théorème 6.2 — Propriété caractéristique de l'exponentielle

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$$

En posant $\mathrm{e} = \exp(1)$, on peut alors noter $\exp(x) = \mathrm{e}^x$. Cette notation puissance est justifiée par le fait que la propriété fondamentale de la notation puissance est vérifiée.

VI.2 — Étude de la fonction exp

Propriété 6.3 — *La fonction* exp

1) *est continue et strictement croissante ;*
2) $\mathrm{e}^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ *et* $\mathrm{e}^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$*;*
3) *dérivable et égale à sa dérivée.*

Propriété 6.4 — Propriétés dite « de croissances comparées »

1) $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$*;*
2) $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0.$

Tableau de variation et graphe

x	0		$+\infty$
$\ln'(x)$	‖	$+$	
ln	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

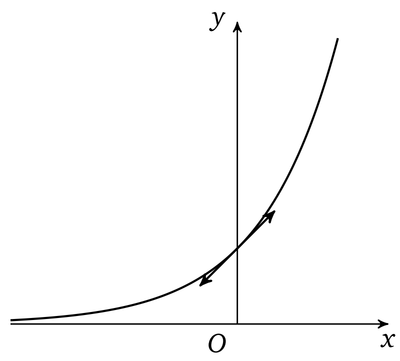

Figure I.5 — *Graphe de* exp

VI.3 — Fonction puissance réelle

Définition 6.5 — Fonction puissance
Soit a un réel strictement positif et x un réel quelconque. Alors par définition $a^x =$ $\exp(x\ln(a))$.

On parle parfois d'exponentielle de base a.

Propriété 6.6 —

1) *Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $a^{x+y} = a^x a^y$ et $a^{xy} = a^{xy}$.*
2) *Pour $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $x \in \mathbb{R}$: $(ab)^x = a^x b^x$.*

Les règles de calculs de la notation puissance sont donc vérifiées, ce qui justifie l'usage de cette notation.

VII — Fonctions circulaires

VII.1 — Définition de cosinus, sinus

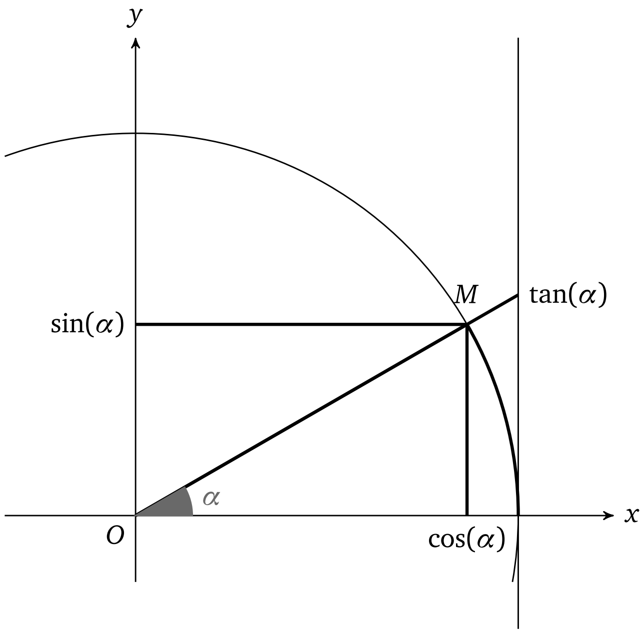

Figure I.6 — *Définition des fonctions circulaires*

Graphes

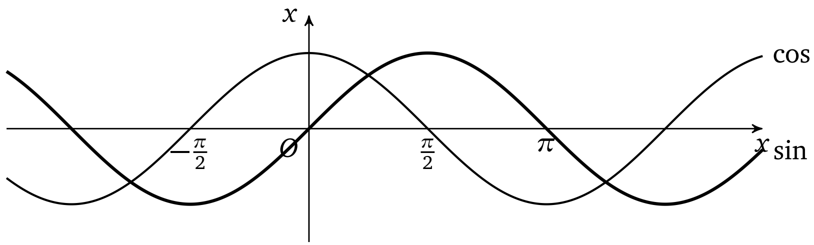

Figure I.7 — *Graphes de* sin *et* cos

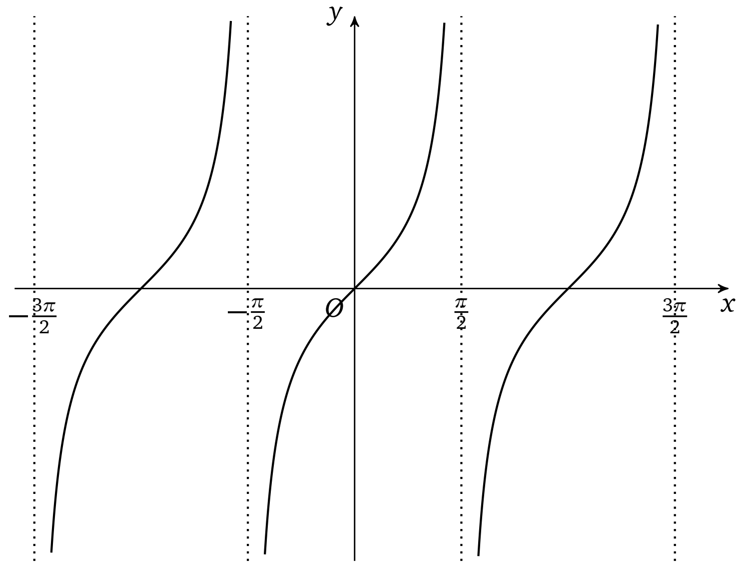

Figure I.8 — *Graphe de* tan