

Fonctions usuelles

I — Vocabulaire sur les fonctions

Définition 1.1 — Fonction numérique

On appelle **fonction numérique** toute application d'une partie de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Définition 1.2 — Domaine de définition

Soit une expression algébrique $f(x)$ dépendant d'une variable x .

L'ensemble des valeurs réelles pour lesquelles cette expression est syntaxiquement correcte s'appelle le **domaine de définition** \mathcal{D}_f de f .

L'expression algébrique $f(x)$ définit donc une fonction $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$.

Définition 1.3 — Opérations usuelles sur les fonctions

Soit I une partie de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions numériques.

On définit

- le **produit de f par un scalaire λ** $\lambda f : I \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \lambda f(x)$
- la **somme de f et de g** $f + g : I \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f(x) + g(x)$
- le **produit de f et de g** $f \times g : I \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f(x) \times g(x)$

Sur l'ensemble $J = \{x \in I \text{ tel que } f(x) \neq 0\}$, on peut définir l'**inverse de f** par

$$1/f : \begin{cases} J \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 1/f(x) \end{cases}$$

Définition 1.4 — Composée de deux fonctions

Soit f une fonction numérique définie sur un ensemble \mathcal{D} qui prend ses valeurs dans un ensemble \mathcal{E} et g une fonction numérique de \mathcal{E} dans \mathbb{R} .

On définit la **composée de f et g** notée $g \circ f$ par

$$g \circ f : \begin{cases} \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto g(f(x)) \end{cases}$$

Définition 1.5 — Fonctions et ordre

Soit f une fonction de \mathcal{D} dans \mathbb{R} .

— f est **majorée sur \mathcal{D}** si et seulement si

$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad f(x) \leq M$$

— f est **minorée sur \mathcal{D}** si et seulement si

$$\exists m \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad f(x) \geq m$$

— f est **bornée sur \mathcal{D}** si et seulement si f est majorée et minorée sur \mathcal{D} .

— f est **croissante sur \mathcal{D}** si et seulement si

$$\forall (x, y) \in \mathcal{D}^2, \quad x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$$

— f est **strictement croissante sur \mathcal{D}** si et seulement si

$$\forall (x, y) \in \mathcal{D}^2, \quad x < y \implies f(x) < f(y)$$

– f est **décroissante sur** \mathcal{D} si et seulement si

$$\forall (x, y) \in \mathcal{D}^2, \quad x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$$

– f est **strictement décroissante sur** \mathcal{D} si et seulement si

$$\forall (x, y) \in \mathcal{D}^2, \quad x < y \implies f(x) > f(y)$$

– f est **monotone sur** \mathcal{D} si et seulement si f est croissante sur \mathcal{D} ou décroissante sur \mathcal{D} .

– f est **strictement monotone sur** \mathcal{D} si et seulement si f est strictement croissante sur \mathcal{D} ou strictement décroissante sur \mathcal{D} .

– f est **périodique de période T sur** \mathcal{D} si et seulement si

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad x + T \in \mathcal{D} \implies f(x + T) = f(x)$$

Propriété 1.6 — Caractérisation des fonctions bornées

Une fonction $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur une partie \mathcal{D} de \mathbb{R} est bornée si et seulement si

$$\exists C \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad |f(x)| \leq C$$

II — Fonctions monômes

Tableau de variation et graphe

Cas n pair

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'_n(x)$	$-$	0	$+$
f_n	$+\infty$	0	$+\infty$

$\searrow \quad \nearrow$

Cas n impair

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'_n(x)$	$-$	$+$
f_n	$-\infty$	$+\infty$

\nearrow

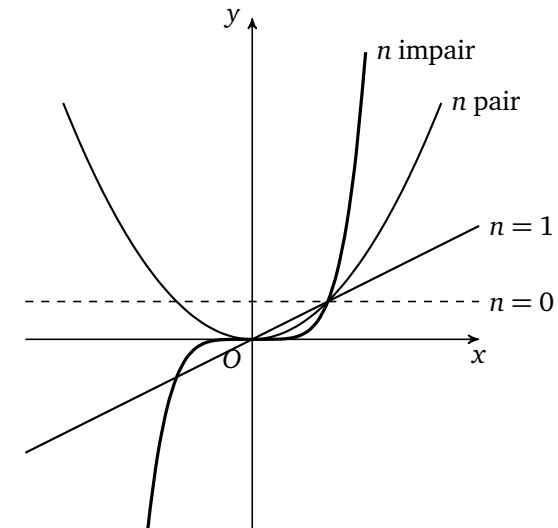


FIGURE I.1 — Graphe de $x \mapsto x^n$

III — Racine carrée

Définition 3.1 — Racine carrée

La fonction $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et strictement croissante sur \mathbb{R}_+ .
 $x \longmapsto x^2$

Elle réalise donc une bijection de \mathbb{R}_+ dans $f(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$. Sa bijection réciproque est la fonction **racine carrée**, définie et continue sur \mathbb{R}_+ .
 $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$
 $x \longmapsto \sqrt{x}$

Propriété 3.2 — Racine carrée

Soit x et y deux réels positifs. On a

- 1) $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$;
- 2) si $x \neq 0$, $\sqrt{1/x} = 1/\sqrt{x}$;
- 3) pour $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{x^n} = (\sqrt{x})^n$;

La fonction racine carrée est dérivable sur \mathbb{R}_+^* , n'est pas dérivable en 0 et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Tableau de variation et graphe

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
f	0	$+\infty$

\nearrow

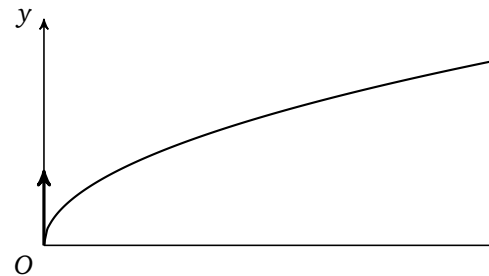


FIGURE I.2 — Graphe de $x \mapsto \sqrt{x}$

IV — Valeur absolue

Définition 4.1 — Valeur absolue

La fonction **valeur absolue** est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| \stackrel{\text{def.}}{=} x \quad \text{si } x \geq 0$$

et

$$|x| \stackrel{\text{def.}}{=} -x \quad \text{si } x < 0$$

Cette fonction est définie et continue sur \mathbb{R} . Elle est dérivable sur \mathbb{R}^* et n'est pas dérivable en 0.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{d}{dx}(|x|) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad \frac{d}{dx}(|x|) = -1$$

ou bien $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{d}{dx}(|x|) = |x|/x$

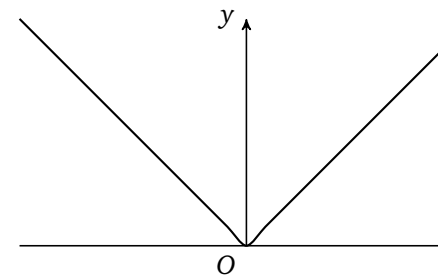


FIGURE I.3 — Graphe de $x \mapsto |x|$

V — Logarithme népérien

V.1 — Définition et propriété caractéristique

Définition 5.1 — Logarithme népérien

La fonction $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ est définie sur un intervalle et continue : elle admet

$$\left. \begin{array}{l} x \mapsto 1/x \\ \end{array} \right\} \text{une unique primitive s'annulant en 1. Cette primitive est la fonction } \mathbf{\textit{logarithme}} \\ \mathbf{\textit{népérien}} \mathbf{\ln}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

Remarquer que c'est une définition « calculable » de \ln : l'intégrale peut être estimée à une précision quelconque, par exemple par la méthode des rectangles.

Théorème 5.2 — Propriété caractéristique du logarithme

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2}, \quad \ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$$

Corollaire 5.3 — $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(1/x) = -\ln x$

Corollaire 5.4 — $\forall (x) \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \ln(x^n) = n \ln(x)$

Définition 5.5 — Logarithme de base a

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle **logarithme de base a** et on note \log_a la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \log_a x = \frac{\log(x)}{\log(a)}$$

En particulier on a $\log_a(a) = 1$.

Cette fonction est proportionnelle au logarithme. Elle hérite de ses propriétés opératoires, de régularité, etc. On note le logarithme de base 10 « Log ».

Application — Nombre de chiffres dans l'écriture décimale d'un entier

Soit n un entier Le nombre de chiffre dans l'écriture décimale de n est $\lfloor \text{Log}(n) \rfloor$.

Propriété 5.7 —

- 1) \ln est une fonction continue et strictement croissante.
- 2) $\ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$;
- 3) $\ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\infty$;

Propriété 5.8 — Propriétés dite de « croissances comparées »

- 1) $\frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$;
- 2) $x \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

Tableau de variation et graphe

x	0	$+\infty$
$\ln'(x)$		+
\ln	$-\infty$	$+\infty$

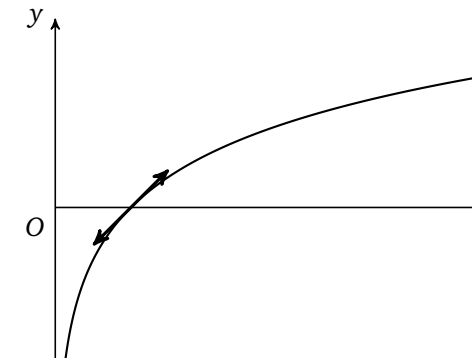


FIGURE I.4 — Graphe de \ln

VI — Exponentielle

VI.1 — Définition et propriété caractéristique

Définition 6.1 — Exponentielle

La fonction $x \mapsto \ln(x)$ étant continue et strictement croissante sur l'intervalle \mathbb{R}_+^* , elle définit une bijection de \mathbb{R}_+^* dans $\ln \langle \mathbb{R}_+^* \rangle = \mathbb{R}$. Sa bijection réciproque est la fonction **exponentielle**, noté **exp**.

Théorème 6.2 — Propriété caractéristique de l'exponentielle

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$$

En posant $e = \exp(1)$, on peut alors noter $\exp(x) = e^x$. Cette notation puissance est justifiée par le fait que la propriété fondamentale de la notation puissance est vérifiée.

VI.2 — Étude de la fonction exp

Propriété 6.3 — La fonction exp

- 1) est continue et strictement croissante;
- 2) $e^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ et $e^x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$;
- 3) dérivable et égale à sa dérivée.

Propriété 6.4 — Propriétés dite « de croissances comparées »

- 1) $\frac{e^x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$;
- 2) $\frac{e^x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$.

Tableau de variation et graphe

x	0	$+\infty$
$\ln'(x)$		+
\ln	$-\infty$	$+\infty$

↗

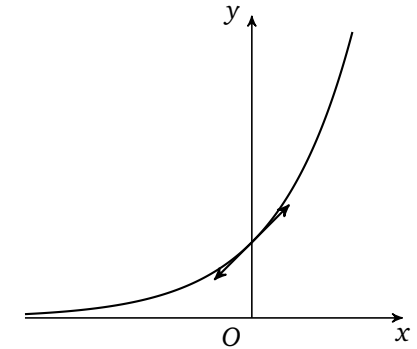


FIGURE I.5 — Graphe de exp

VI.3 — Fonction puissance réelle

Définition 6.5 — Fonction puissance

Soit a un réel strictement positif et x un réel quelconque. Alors par définition $a^x = \exp(x \ln(a))$.

On parle parfois d'exponentielle de base a .

Propriété 6.6 —

- 1) Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $a^{x+y} = a^x a^y$ et $a^{xy} = a^{x^y}$.
- 2) Pour $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $x \in \mathbb{R}$: $(ab)^x = a^x b^x$.

Les règles de calculs de la notation puissance sont donc vérifiées, ce qui justifie l'usage de cette notation.

VII — Fonctions circulaires

VII.1 — Définition de cosinus, sinus

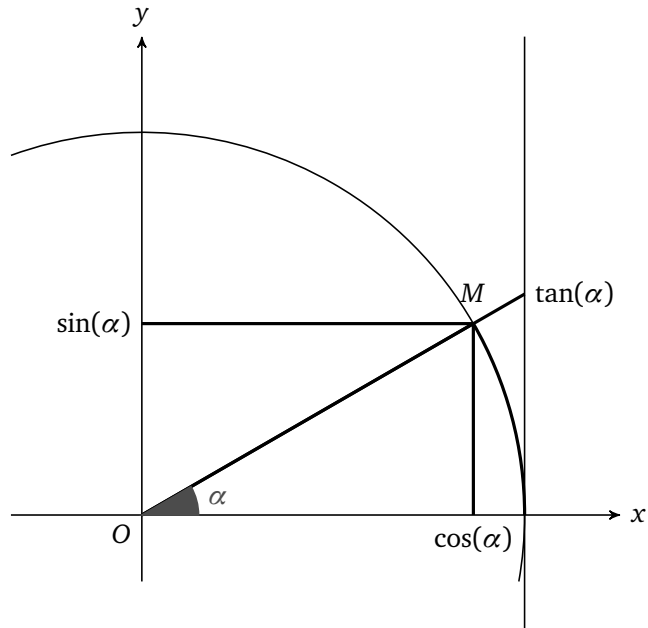


FIGURE I.6 — Définition des fonctions circulaires

Graphes

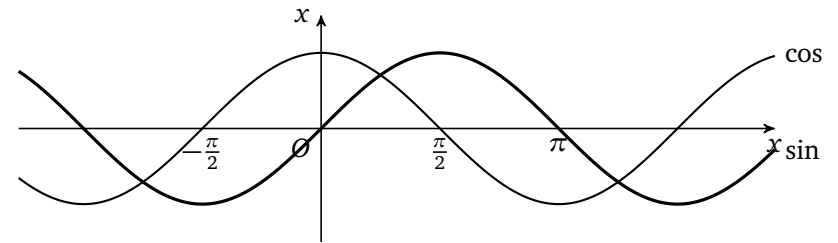


FIGURE I.7 — Graphes de sin et cos

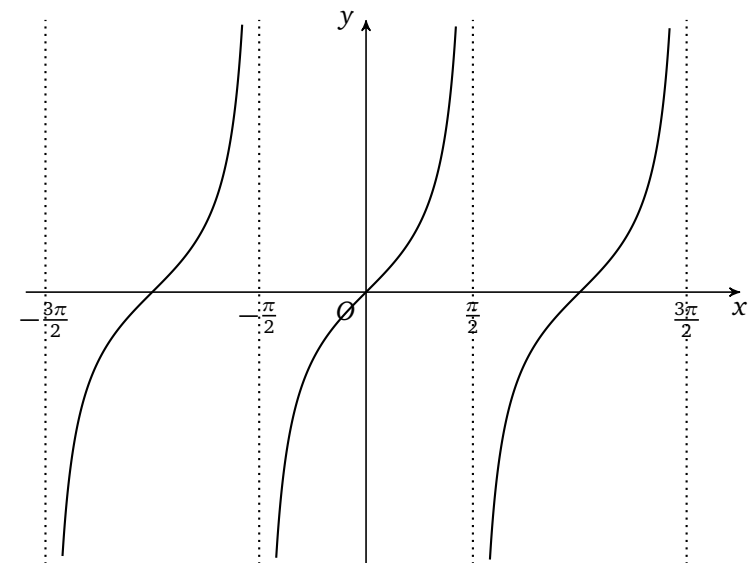


FIGURE I.8 — Graphe de tan