

Espaces vectoriels

Notations du chapitre — Dans ce chapitre \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

I — Espaces vectoriels

Définition 1.1 — Espace vectoriels sur \mathbb{K}

Soit E un ensemble. On dit que E est un **espace vectoriel** sur le corps \mathbb{K} s'il vérifie les propriétés suivantes

- 1) E est non vide ;
- 2) on peut définir dans E une loi de composition interne notée $+$, appelée **addition vectorielle**, telle que

$$\forall (x, y, z) \in E^3, \quad x + (y + z) = (x + y) + z \quad \text{associativité}$$

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad x + y = y + x \quad \text{commutativité}$$

$$\exists e \in E, \quad \forall x \in E, \quad x + e = x \quad \text{existence d'un élément neutre}$$

$$\forall x \in E, \quad \exists x' \in E, \quad x + x' = e \quad \text{existence d'un opposé}$$

- 3) on peut définir dans E une loi externe sur \mathbb{K} , notée \cdot , appelée **multiplication par un scalaire**, telle que

$$\forall x \in E, \quad 1 \cdot x = x$$

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \forall x \in E, \quad (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall (x, y) \in E^2, \quad \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \mu \cdot y$$

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \forall x \in E, \quad \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \times \mu) \cdot x$$

Propriété 1.2 — Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

1) Pour tout vecteur x de E : $0 \cdot x = 0_E$.

2) Pour tout scalaire λ : $\lambda \cdot 0_E = 0_E$.

3) D'ailleurs, pour $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\lambda x = 0_E \iff \lambda = 0 \quad \text{ou} \quad x = 0_E$$

4) Pour $x \in E$, l'opposé de x est $(-1) \cdot x$. Il est noté $-x$.

Théorème 1.3 — L'ensemble \mathbb{K}^n

L'ensemble \mathbb{K}^n muni de

- l'addition vectorielle :

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) \stackrel{\text{déf.}}{=} (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

- et du produit par un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\lambda \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) \stackrel{\text{déf.}}{=} (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$$

est un espace vectoriel sur \mathbb{K} .

Le vecteur nul de \mathbb{K}^n est $\underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_{n \text{ fois}}$.

Définition 1.4 — Sous-espace vectoriel

Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel sur \mathbb{K} et F un sous-ensemble de E .

On dit que F est sous-espace vectoriel de E si et seulement si $(F, +, \cdot)$ est lui-même un espace vectoriel sur \mathbb{K} .

Théorème 1.5 — Caractérisation des sous-espaces vectoriels

Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel sur \mathbb{K} et F un sous-ensemble de E .

F est sous-espace vectoriel de E si et seulement si

- 1) $F \neq \emptyset$;
- 2) pour tout couple $(u, v) \in F^2$ on a $u + v \in F$;
- 3) pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout vecteur $u \in F$ on a $\lambda u \in F$

Théorème 1.6 — Intersection de sous-espace vectoriel

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Toute intersection de sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de E .

II — Famille de vecteurs**Définition 2.1 — Famille de vecteurs**

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

On appelle famille de p vecteurs de E la donnée d'un élément de E^p , noté (u_1, u_2, \dots, u_p) .

Attention ! L'ordre des vecteurs compte ! La famille (u_1, u_2, u_3) n'est pas la famille (u_1, u_3, u_2) !

Définition 2.2 — Combinaison linéaire

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, $\mathcal{F} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille de p vecteurs de E , et $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$.

On appelle **combinaison linéaire** des u_i affectés des coefficients λ_i le vecteur

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_p u_p = \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i$$

On dit que le vecteur u est combinaison linéaire des vecteurs de la famille \mathcal{F} ou encore que u **se décompose** suivant \mathcal{F} .

Définition 2.3 — Espace vectoriel engendré

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et (u_1, u_2, \dots, u_p) une famille de p vecteurs de E .

L'ensemble des vecteurs qui sont combinaisons linéaires des u_i est un sous-espace vectoriel de E . C'est l'espace vectoriel **engendré** par la famille (u_1, \dots, u_p) , noté $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$.

Définition 2.4 — Famille génératrice

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E .

S'il existe une famille (u_1, u_2, \dots, u_p) de vecteurs de E telle que $F = \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$, alors on dit que la famille (u_1, u_2, \dots, u_p) **engendre** l'espace vectoriel F ou encore qu'elle est une **famille génératrice** de F .

Proposition 2.5 — Opérations sur les familles génératrices

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E et $F = \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$.

L'ensemble F est engendré par la famille de vecteurs obtenue en

- 1) permutant les vecteurs de \mathcal{B} ;
- 2) ajoutant ou retirant le vecteur nul à \mathcal{B} ;
- 3) multipliant un vecteur de \mathcal{B} par un scalaire non nul ;
- 4) ajoutant à un vecteur de \mathcal{B} une combinaison linéaire des autres ;
- 5) retirant un vecteur de \mathcal{B} qui est combinaison linéaire des autres.

Définition 2.6 — Famille libre

Une famille de vecteurs d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E est **libre** si et seulement si aucun vecteur de la famille n'est combinaison linéaire des autres.

Vocabulaire Une famille qui n'est pas libre est dite **liée**.

Propriété 2.7 — Dans un \mathbb{K} -espace vectoriel

- toute sous-famille d'une famille libre est libre ;
- toute sur-famille d'une famille liée est liée ;
- en ajoutant à une famille libre un vecteur qui n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de cette famille, la famille obtenue est libre.

Théorème 2.8 — Caractérisation d'une famille libre

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et (u_1, u_2, \dots, u_n) une famille de vecteurs de E .

Cette famille est libre si et seulement si l'équation d'inconnues $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n = 0_E$$

admet pour unique solution $(0, 0, \dots, 0)$.

Proposition 2.9 — Dans un \mathbb{K} -espace vectoriel

- la famille (e_1) est libre si et seulement si e_1 est non nul ;
- la famille (e_1, e_2) est liée si et seulement si l'un des vecteurs est égal à l'autre multiplié par un scalaire (on dit qu'ils sont **colinéaires**).

Propriété 2.10 — Unicité de la décomposition sur une famille libre

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et (u_1, u_2, \dots, u_n) une famille de vecteurs de E .

La famille (u_1, u_2, \dots, u_n) est libre si et seulement si tout vecteur u de $\text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_n)$ se décompose d'une manière unique

$$\forall u \in \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_n), \exists! (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \\ u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$$

III — Base, dimension finie**Définition 3.1 — Base**

Une famille (u_1, u_2, \dots, u_n) est une **base** d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E si et seulement si (u_1, u_2, \dots, u_n) est une famille libre et génératrice de E .

Théorème 3.2 — Caractérisation d'une base

La famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une base d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E si et seulement si

$$\forall u \in E, \exists! (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n$$

Les scalaires (x_1, x_2, \dots, x_n) s'appellent les **coordonnées** de u selon la base \mathcal{B} .

Définition 3.3 — Dimension finie

On dit qu'un \mathbb{K} -espace vectoriel E est **de dimension finie** si et seulement si il existe une base finie de E ou si E est réduit au vecteur nul.

Théorème 3.4 — Théorème de la dimension

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Si E n'est pas réduit au vecteur nul, toutes les bases de E ont le même nombre de vecteurs. On appelle ce nombre **dimension** de E et on le note $\dim E$ ou encore $\dim_{\mathbb{K}} E$. Si E est réduit au vecteur nul, alors par convention $\dim E = 0$.

Théorème 3.5 — Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

De toute famille génératrice finie de E on peut extraire une base finie de E .

Corollaire 3.6 — Famille génératrice et dimension

Une famille génératrice d'un espace vectoriel de dimension n compte au moins n vecteurs.

Théorème 3.7 — Théorème de la base incomplète

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n .

On peut compléter une famille libre quelconque de E en une base de E .

Corollaire 3.8 — Famille libre et dimension

Une famille libre d'un espace vectoriel de dimension n compte au plus n vecteurs.

Corollaire 3.9 — Base et dimension

Soit E un espace de dimension n et \mathcal{F} une famille de n vecteurs de E .

$$\mathcal{F} \text{ est libre} \iff \mathcal{F} \text{ est génératrice de } E \iff \mathcal{F} \text{ est une base de } E$$

Théorème 3.10 — Dimension d'un sous-espace vectoriel

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E .

Alors F est un ev de dimension finie, et $\dim F \leq \dim E$. De plus $\dim F = \dim E$ si et seulement si $F = E$.

Définition 3.11 — Rang d'une famille de vecteurs

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{C} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille de p vecteurs de E .

On appelle **rang** de la famille \mathcal{C} la dimension de l'espace vectoriel $\text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$:

$$\text{rg}(u_1, u_2, \dots, u_p) = \dim(\text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p))$$

Proposition 3.12 — Rang et familles de vecteurs

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{C} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille de p vecteurs de E .

- \mathcal{C} est une famille génératrice de E si et seulement si $\text{rg } \mathcal{C} = \dim E$;
- \mathcal{C} est une famille libre si et seulement si $\text{rg } \mathcal{C} = \text{card } \mathcal{C}$;
- \mathcal{C} est une base de E si et seulement si $\text{rg } \mathcal{C} = \text{card } \mathcal{C} = \dim E$.

IV — Utilisation des matrices

Définition 4.1 — Matrice représentant un vecteur

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E .

Si u est un vecteur de E alors

$$\exists!(u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{K}^n, \quad u = u_1 e_1 + u_2 e_2 + \dots + u_n e_n$$

On appelle matrice représentant le vecteur u dans la base \mathcal{B} la matrice colonne $U_{\mathcal{B}} = {}^t(u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n)$.

Réciproquement, à toute matrice colonne $U \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ on associe une unique vecteur u de E tel que U représente u dans la base \mathcal{B} .

Définition 4.2 — Matrice représentant une famille de vecteurs

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n , $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{C} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille de p vecteurs de E .

On a alors

$$\forall k \in \llbracket 1 ; p \rrbracket, \quad \exists!(u_{1k}, \dots, u_{nk}) \in \mathbb{K}^n, \quad u_k = u_{1k} e_1 + u_{2k} e_2 + \dots + u_{nk} e_n$$

On appelle matrice représentant le vecteur u dans la base \mathcal{B} la matrice $C = (u_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$.

Définition 4.3 — Rang d'une matrice

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice à n lignes et p colonnes. D'après la définition précédente, cette matrice représente une famille de p vecteurs de \mathbb{K}^n dans la base canonique de \mathbb{K}^n .

On appelle **rang de la matrice** M le rang de la famille de vecteurs ainsi définis.

Théorème 4.4 — Rang et opérations sur une matrice

Soit une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On ne modifie pas le rang de M en

- 1) permutant les colonnes de M ;
- 2) ajoutant ou retirant une colonne nulle à M ;
- 3) multipliant une colonne de M par un scalaire non nul ;
- 4) ajoutant à une colonne de M une combinaison linéaire des autres ;
- 5) retirant une colonne de M qui est combinaison linéaire des autres.

Théorème 4.5 — Dans un espace vectoriel E de dimension n , le rang d'une famille de vecteurs \mathcal{C} est égal au rang de la matrice M représentant \mathcal{C} dans une base quelconque de E .

Théorème 4.6 — Rang de la transposée

Soit une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: $\text{rg}(M) = \text{rg}({}^t M)$

Corollaire 4.7 — On peut effectuer les opérations du théorème ?? sur les lignes d'une matrice sans en changer le rang.
