Espaces vectoriels

Notations du chapitre — *Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*

I — Espaces vectoriels

Définition 1.1 — Espace vectoriels sur $\mathbb{K}$

*Soit E un ensemble. On dit que E est un **espace vectoriel** sur le corps $\mathbb{K}$ s'il vérifie les propriétés suivantes*

1) *E est non vide ;*

2. *on peut définir dans E une loi de composition interne notée $+$, appelée **addition vectorielle**, telle que*

$$\begin{array}{lcr} \forall (x,y,z) \in E^3, & x+(y+z) = (x+y)+z & \textit{associativité} \\ \forall (x,y) \in E^2, & x+y = y+x & \textit{commutativité} \\ \exists e \in E,\ \ \forall x \in E, & x+e = x & \textit{existence d'un élément neutre} \\ \forall x \in E,\ \ \exists x' \in E, & x+x' = e & \textit{existence d'un opposé} \end{array}$$

3. *on peut définir dans E une loi externe sur $\mathbb{K}$, notée . appelée **multiplication par un scalaire**, telle que*

$$\begin{array}{lc} \forall x \in E, & 1\,.\,x = x \\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,\ \ \forall x \in E, & (\lambda+\mu)\,.\,x = \lambda\,.\,x + \mu\,.\,x \\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \ \forall (x,y) \in E^2, & \lambda\,.\,(x+y) = \lambda\,.\,x + \mu\,.\,y \\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,\ \ \forall x \in E, & \lambda\,.\,(\mu\,.\,x) = (\lambda \times \mu)\,.\,x \end{array}$$

Propriété 1.2 — Quelques propriétés

Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel.

1) *Pour tout vecteur x de E :* $0\,.\,x = 0_E$.
2) *Pour tout scalaire λ :* $\lambda\,.\,0_E = 0_E$.
3) *D'ailleurs, pour $x \in E$ et $\lambda \in K$:*

$$\lambda x = 0_E \iff \lambda = 0 \quad \textit{ou} \quad x = 0_E$$

4) *Pour $x \in E$, l'opposé de x est $(-1)\,.\,x$. Il est noté $-x$.*

Théorème 1.3 — L'ensemble $\mathbb{K}^n$

L'ensemble $\mathbb{K}^n$ muni de

– *l'addition vectorielle :*

$$(x_1,x_2,\ldots,x_n)+(y_1,y_2,\ldots,y_n) \overset{\text{déf.}}{=} (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n)$$

– *et du produit par un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$:*

$$\lambda\,.\,(x_1,x_2,\ldots,x_n) \overset{\text{déf.}}{=} (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$$

est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Le vecteur nul de $\mathbb{K}^n$ est $(\underbrace{0,0,\ldots,0}_{n \text{ fois}})$.

Définition 1.4 — Sous-espace vectoriel

Soit $(E,+,.)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et F un sous-ensemble de E.
On dit que F est sous-espace vectoriel de E si et seulement si $(F,+,.)$ est lui-même un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Théorème 1.5 — Caractérisation des sous-espaces vectoriels

Soit $(E,+,.)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et F un sous-ensemble de E.
F est sous-espace vectoriel de E si et seulement si

1) $F \neq \varnothing$;
2) *pour tout couple* $(u,v) \in F^2$ *on a* $u+v \in F$;
3) *pour tout scalaire* $\lambda \in \mathbb{K}$ *et tout vecteur* $u \in F$ *on a* $\lambda u \in F$

Théorème 1.6 — Intersection de sous-espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel.
Toute intersection de sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de E.

II — Famille de vecteurs

Définition 2.1 — Famille de vecteurs

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel.
*On appelle **famille de p vecteurs de E** la donnée d'un élément de E^p, noté $(u_1, u_2, \dots, u_p)$.*

Attention ! L'ordre des vecteurs compte ! La famille (u_1, u_2, u_3) n'est pas la famille (u_1, u_3, u_2) !

Définition 2.2 — Combinaison linéaire

Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel, $\mathscr{F} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille de de p vecteurs de E, et $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$.
*On appelle **combinaison linéaire** des u_i affectés des coefficients λ_i le vecteur*

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_p u_p = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i$$

*On dit que le vecteur u est combinaison linéaire des vecteurs de la famille $\mathscr{F}$ ou encore que u **se décompose** suivant $\mathscr{F}$.*

Définition 2.3 — Espace vectoriel engendré

Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel et $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille de p vecteurs de E.
L'ensemble des vecteurs qui sont combinaisons linéaires des u_i est un sous-espace vectoriel de E.
*C'est l'espace vectoriel **engendré** par la famille $(u_1, \dots, u_p)$, noté* **Vect($u_1, \dots, u_p$)**.

Définition 2.4 — Famille génératrice

Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E.
*S'il existe une famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ de vecteurs de E telle que $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$, alors on dit que la famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ **engendre** l'espace vectoriel F ou encore qu'elle est une **famille génératrice** de F.*

Proposition 2.5 — Opérations sur les familles génératrices
Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel, $\mathscr{B} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E et $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$.
L'ensemble F est aussi engendré par la famille de vecteurs obtenue en

1) *permutant les vecteurs de $\mathscr{B}$;*
2) *ajoutant ou retirant le vecteur nul à $\mathscr{B}$;*
3) *multipliant un vecteur de $\mathscr{B}$ par un scalaire non nul ;*
4) *ajoutant à un vecteur de $\mathscr{B}$ une combinaison linéaire des autres ;*
5) *retirant un vecteur de $\mathscr{B}$ qui est combinaison linéaire des autres.*

Définition 2.6 — Famille libre
*Une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$–espace vectoriel E est **libre** si et seulement si elle contient au moins deux vecteurs et aucun vecteur de la famille n'est combinaison linéaire des autres ou si elle ne contient qu'un vecteur non nul.*

Vocabulaire Une famille qui n'est pas libre est dite **liée**.

Propriété 2.7 — *Dans un $\mathbb{K}$–espace vectoriel*

- *toute sous-famille d'une famille libre est libre ;*
- *toute sur-famille d'une famille liée est liée ;*
- *en ajoutant à une famille libre un vecteur qui n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de cette famille, la famille obtenue est libre.*

Théorème 2.8 — Caractérisation d'une famille libre
Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel et $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E.
Cette famille est libre si et seulement si l'équation d'inconnues $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n = 0_E$$

admet pour unique solution $(0, 0, \dots, 0)$.

Proposition 2.9 — *Dans un $\mathbb{K}$–espace vectoriel*

- *la famille (e_1) est libre si et seulement si e_1 est non nul ;*
- *la famille (e_1, e_2) est liée si et seulement si l'un des vecteurs est égal à l'autre multiplié par un scalaire (on dit qu'ils sont **colinéaires**).*

Propriété 2.10 — Unicité de la décomposition sur une famille libre
Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel et $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E.
La famille $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est libre si et seulement si tout vecteur u de $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_n)$ *se décompose d'une manière unique*

$$\forall u \in \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_n), \quad \exists!(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \qquad u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$$

III — Base, dimension finie

Définition 3.1 — Base
*Une famille $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une **base** d'un $\mathbb{K}$–espace vectoriel E si et seulement si $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une famille libre et génératrice de E.*

Théorème 3.2 — Caractérisation d'une base
La famille $\mathscr{B} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une base d'un $\mathbb{K}$–espace vectoriel E si et seulement si

$$\forall u \in E, \quad \exists!(x_1, x_2, \dots, x_n), \qquad u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n$$

*Les scalaires $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ s'appellent les **coordonnées** de u selon la base $\mathscr{B}$.*

Définition 3.3 — Dimension finie
*On dit qu'un $\mathbb{K}$–espace vectoriel E est **de dimension finie** si et seulement si il existe une base finie de E ou si E est réduit au vecteur nul.*

Lemme 3.4 — *Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel, $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille libre de E et $(f_1, f_2, \dots, f_p)$ une base de E.*
Alors $n \leqslant p$.

Théorème 3.5 — Théorème de la dimension
Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
*Si E n'est pas réduit au vecteur nul, toutes les bases de E ont le même nombre de vecteurs. On appelle ce nombre **dimension** de E et on le note $\dim E$ ou encore $\dim_{\mathbb{K}} E$.*
Si E est réduit au vecteur nul, alors par convention $\dim E = 0$.

Théorème 3.6 — Extraction d'une base
Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel.
De toute famille génératrice finie de E on peut extraire une base finie de E.

Corollaire 3.7 — Famille génératrice et dimension
Une famille génératrice d'un espace vectoriel de dimension n compte au moins n vecteurs.

Théorème 3.8 — Théorème de la base incomplète
Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel de dimension finie n.

On peut compléter une famille libre quelconque de E en une base de E.

Corollaire 3.9 — Famille libre et dimension
Une famille libre d'un espace vectoriel de dimension n compte au plus n vecteurs.

Corollaire 3.10 — Base et dimension
Soit E un espace de dimension n et $\mathscr{F}$ une famille de n vecteurs de E.

$$\mathscr{F} \text{ est libre} \iff \mathscr{F} \text{ est génératrice de } E \iff \mathscr{F} \text{ est une base de } E$$

Théorème 3.11 — Dimension d'un sous-espace vectoriel
Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel de dimension finie n et F un sous-espace vectoriel de E.
Alors F est un ev de dimension finie, et $\dim F \leqslant \dim E$.
De plus $\dim F = \dim E$ si et seulement si $F = E$.

Définition 3.12 — Rang d'une famille de vecteurs
Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{C} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille de p vecteurs de E.
*On appelle **rang** de la famille $\mathscr{C}$ la dimension de l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$:*

$$\mathrm{rg}(u_1, u_2, \dots, u_p) = \dim(\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p))$$

Proposition 3.13 — Rang et familles de vecteurs
Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel de dimension finie et $\mathscr{C} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille de p vecteurs de E.

- *$\mathscr{C}$ est une famille génératrice de E si et seulement si $\mathrm{rg}\,\mathscr{C} = \dim E$;*

- $\mathscr{C}$ *est une famille libre si et seulement si* $\operatorname{rg}\mathscr{C} = \operatorname{card} C$ *;*
- $\mathscr{C}$ *est une base de* E *si et seulement si* $\operatorname{rg}\mathscr{C} = \operatorname{card} C = \dim E$.

IV — Utilisation des matrices

Définition 4.1 — Matrice représentant un vecteur
Soit E *un* $\mathbb{K}$*–espace vectoriel de dimension* n *et* $\mathscr{B} = (e_1\,, e_2\,, \dots\,, e_n)$ *une base de* E*.*
Si u *est un vecteur de* E *alors*

$$\exists!(u_1\,, u_2\,, \dots\,, u_n) \in \mathbb{K}^n, \qquad u = u_1e_1 + u_2e_2 + \cdots + u_ne_n$$

On appelle matrice représentant le vecteur u *dans la base* $\mathscr{B}$ *la matrice colonne* $U_{\mathscr{B}} = {}^t\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{pmatrix}$.
Réciproquement, à toute matrice colonne $U \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ *on associe une unique vecteur* u *de* E *tel que* U *représente* u *dans la base* $\mathscr{B}$*.*

Définition 4.2 — Matrice représentant une famille de vecteurs
Soit E *un* $\mathbb{K}$*–espace vectoriel de dimension* n*,* $\mathscr{B} = \left(e_1\,, e_2\,, \dots\,, e_p\right)$ *une base de* E *et* $\mathscr{C} = (u_1\,, u_2\,, \dots\,, u_p)$ *une famille de* p *vecteur de* E*.*
On a alors

$$\forall k \in [\![1\,;\,p]\!], \quad \exists!\,(u_{1k}, \dots, u_{nk}) \in \mathbb{K}^n, \qquad u_k = u_{1k}e_1 + u_{2k}e_2 + \cdots + u_{nk}e_n$$

On appelle matrice représentant le vecteur u *dans la base* $\mathscr{B}$ *la matrice* $C = (u_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$.

Définition 4.3 — Rang d'une matrice
Soit $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *une matrice à* n *lignes et* p *colonnes. D'après la définition précédente, cette matrice représente une famille de* p *vecteurs de* $\mathbb{K}^n$ *dans la base canonique de* $\mathbb{K}^n$*.*
On appelle ***rang de la matrice*** M *le rang de la famille de vecteurs ainsi définis.*

Théorème 4.4 — Rang et opérations sur une matrice
Soit une matrice $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
On ne modifie pas le rang de M *en*

1) *permutant les colonnes de* M *;*
2) *ajoutant ou retirant une colonne nulle à* M *;*
3) *multipliant une colonne de* M *par un scalaire non nul ;*
4) *ajoutant à une colonne de* M *une combinaison linéaire des autres ;*
5) *retirant une colonne de* M *qui est combinaison linéaire des autres.*

Théorème 4.5 — *Dans un espace vectoriel* E *de dimension* n*, le rang d'une famille de vecteurs* $\mathscr{C}$ *est égal au rang de la matrice* M *représentant* $\mathscr{C}$ *dans une base quelconque de* E.

Théorème 4.6 — Rang de la transposée
Soit une matrice $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}({}^tM)$

Corollaire 4.7 — *On peut effectuer les opérations du théorème 4.4 sur les lignes d'une matrice sans en changer le rang.*