

# Espaces vectoriels

**Notations du chapitre** — Dans ce chapitre  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

## I — Espaces vectoriels

### Définition 1.1 — Espace vectoriels sur $\mathbb{K}$

Soit  $E$  un ensemble. On dit que  $E$  est un **espace vectoriel** sur le corps  $\mathbb{K}$  s'il vérifie les propriétés suivantes

- 1)  $E$  est non vide;
- 2) on peut définir dans  $E$  une loi de composition interne notée  $+$ , appelée **addition vectorielle**, telle que

$$\forall (x, y, z) \in E^3, \quad x + (y + z) = (x + y) + z \quad \text{associativité}$$

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad x + y = y + x \quad \text{commutativité}$$

$$\exists e \in E, \quad \forall x \in E, \quad x + e = x \quad \text{existence d'un élément neutre}$$

$$\forall x \in E, \quad \exists x' \in E, \quad x + x' = e \quad \text{existence d'un opposé}$$

- 3) on peut définir dans  $E$  une loi externe sur  $\mathbb{K}$ , notée  $\cdot$ , appelée **multiplication par un scalaire**, telle que

$$\forall x \in E, \quad 1 \cdot x = x$$

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \forall x \in E, \quad (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall (x, y) \in E^2, \quad \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \mu \cdot y$$

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \forall x \in E, \quad \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \times \mu) \cdot x$$

**Propriété 1.2** — Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

1) Pour tout vecteur  $x$  de  $E$  :  $0 \cdot x = 0_E$ .

2) Pour tout scalaire  $\lambda$  :  $\lambda \cdot 0_E = 0_E$ .

3) D'ailleurs, pour  $x \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$  :

$$\lambda x = 0_E \iff \lambda = 0 \quad \text{ou} \quad x = 0_E$$

4) Pour  $x \in E$ , l'opposé de  $x$  est  $(-1) \cdot x$ . Il est noté  $-x$ .

### Théorème 1.3 — L'ensemble $\mathbb{K}^n$

L'ensemble  $\mathbb{K}^n$  muni de

- l'addition vectorielle :

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) \stackrel{\text{déf.}}{=} (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

- et du produit par un scalaire  $\lambda \in \mathbb{K}$  :

$$\lambda \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) \stackrel{\text{déf.}}{=} (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$$

est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ .

Le vecteur nul de  $\mathbb{K}^n$  est  $\underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_{n \text{ fois}}$ .

**Définition 1.4 — Sous-espace vectoriel**

Soit  $(E, +, \cdot)$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  et  $F$  un sous-ensemble de  $E$ .

On dit que  $F$  est sous-espace vectoriel de  $E$  si et seulement si  $(F, +, \cdot)$  est lui-même un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ .

**Théorème 1.5 — Caractérisation des sous-espaces vectoriels**

Soit  $(E, +, \cdot)$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  et  $F$  un sous-ensemble de  $E$ .

$F$  est sous-espace vectoriel de  $E$  si et seulement si

- 1)  $F \neq \emptyset$ ;
- 2) pour tout couple  $(u, v) \in F^2$  on a  $u + v \in F$ ;
- 3) pour tout scalaire  $\lambda \in \mathbb{K}$  et tout vecteur  $u \in F$  on a  $\lambda u \in F$

**Théorème 1.6 — Intersection de sous-espace vectoriel**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Toute intersection de sous-espace vectoriel de  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

## II — Famille de vecteurs

**Définition 2.1 — Famille de vecteurs**

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

On appelle famille de  $p$  vecteurs de  $E$  la donnée d'un élément de  $E^p$ , noté  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ .

**Attention !** L'ordre des vecteurs compte ! La famille  $(u_1, u_2, u_3)$  n'est pas la famille  $(u_1, u_3, u_2)$  !

**Définition 2.2 — Combinaison linéaire**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $\mathcal{F} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$  une famille de  $p$  vecteurs de  $E$ , et  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ .

On appelle **combinaison linéaire** des  $u_i$  affectés des coefficients  $\lambda_i$  le vecteur

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_p u_p = \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i$$

On dit que le vecteur  $u$  est combinaison linéaire des vecteurs de la famille  $\mathcal{F}$  ou encore que  $u$  **se décompose** suivant  $\mathcal{F}$ .

**Définition 2.3 — Espace vectoriel engendré**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$  une famille de  $p$  vecteurs de  $E$ .

L'ensemble des vecteurs qui sont combinaisons linéaires des  $u_i$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . C'est l'espace vectoriel **engendré** par la famille  $(u_1, \dots, u_p)$ , noté  $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ .

**Définition 2.4 — Famille génératrice**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .

S'il existe une famille  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$  de vecteurs de  $E$  telle que  $F = \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$ , alors on dit que la famille  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$  **engendre** l'espace vectoriel  $F$  ou encore qu'elle est une **famille génératrice** de  $F$ .

**Proposition 2.5 — Opérations sur les familles génératrices**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$  une famille de vecteurs de  $E$  et  $F = \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$ .

L'ensemble  $F$  est engendré par la famille de vecteurs obtenue en

- 1) permutant les vecteurs de  $\mathcal{B}$ ;
- 2) ajoutant ou retirant le vecteur nul à  $\mathcal{B}$ ;
- 3) multipliant un vecteur de  $\mathcal{B}$  par un scalaire non nul;
- 4) ajoutant à un vecteur de  $\mathcal{B}$  une combinaison linéaire des autres;
- 5) retirant un vecteur de  $\mathcal{B}$  qui est combinaison linéaire des autres.

**Définition 2.6 — Famille libre**

Une famille de vecteurs d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  est **libre** si et seulement si aucun vecteur de la famille n'est combinaison linéaire des autres.

**Vocabulaire** Une famille qui n'est pas libre est dite **liée**.

**Propriété 2.7** — Dans un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel

- toute sous-famille d'une famille libre est libre;
- toute sur-famille d'une famille liée est liée;
- en ajoutant à une famille libre un vecteur qui n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de cette famille, la famille obtenue est libre.

**Théorème 2.8 — Caractérisation d'une famille libre**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  une famille de vecteurs de  $E$ .

Cette famille est libre si et seulement si l'équation d'inconnues  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n = 0_E$$

admet pour unique solution  $(0, 0, \dots, 0)$ .

**Proposition 2.9** — Dans un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel

- la famille  $(e_1)$  est libre si et seulement si  $e_1$  est non nul;
- la famille  $(e_1, e_2)$  est liée si et seulement si l'un des vecteurs est égal à l'autre multiplié par un scalaire (on dit qu'ils sont **colinéaires**).

**Propriété 2.10 — Unicité de la décomposition sur une famille libre**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  une famille de vecteurs de  $E$ .

La famille  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  est libre si et seulement si tout vecteur  $u$  de  $\text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_n)$  se décompose d'une manière unique

$$\forall u \in \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_n), \exists! (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \\ u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$$

**III — Base, dimension finie****Définition 3.1 — Base**

Une famille  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  est une **base** d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  si et seulement si  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  est une famille libre et génératrice de  $E$ .

**Théorème 3.2 — Caractérisation d'une base**

La famille  $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  est une base d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  si et seulement si

$$\forall u \in E, \exists! (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n$$

Les scalaires  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  s'appellent les **coordonnées** de  $u$  selon la base  $\mathcal{B}$ .

**Définition 3.3 — Dimension finie**

On dit qu'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  est **de dimension finie** si et seulement si il existe une base finie de  $E$  ou si  $E$  est réduit au vecteur nul.

**Théorème 3.4 — Théorème de la dimension**

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie.

Si  $E$  n'est pas réduit au vecteur nul, toutes les bases de  $E$  ont le même nombre de vecteurs. On appelle ce nombre **dimension** de  $E$  et on le note  $\dim E$  ou encore  $\dim_{\mathbb{K}} E$ . Si  $E$  est réduit au vecteur nul, alors par convention  $\dim E = 0$ .

**Théorème 3.5** — Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

De toute famille génératrice finie de  $E$  on peut extraire une base finie de  $E$ .

**Corollaire 3.6 — Famille génératrice et dimension**

Une famille génératrice d'un espace vectoriel de dimension  $n$  compte au moins  $n$  vecteurs.

**Théorème 3.7 — Théorème de la base incomplète**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ .

On peut compléter une famille libre quelconque de  $E$  en une base de  $E$ .

**Corollaire 3.8 — Famille libre et dimension**

Une famille libre d'un espace vectoriel de dimension  $n$  compte au plus  $n$  vecteurs.

**Corollaire 3.9 — Base et dimension**

Soit  $E$  un espace de dimension  $n$  et  $\mathcal{F}$  une famille de  $n$  vecteurs de  $E$ .

$$\mathcal{F} \text{ est libre} \iff \mathcal{F} \text{ est génératrice de } E \iff \mathcal{F} \text{ est une base de } E$$

**Théorème 3.10 — Dimension d'un sous-espace vectoriel**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .

Alors  $F$  est un ev de dimension finie, et  $\dim F \leq \dim E$ . De plus  $\dim F = \dim E$  si et seulement si  $F = E$ .

**Définition 3.11 — Rang d'une famille de vecteurs**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $\mathcal{C} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$  une famille de  $p$  vecteurs de  $E$ .

On appelle **rang** de la famille  $\mathcal{C}$  la dimension de l'espace vectoriel  $\text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$ :

$$\text{rg}(u_1, u_2, \dots, u_p) = \dim(\text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p))$$

**Proposition 3.12 — Rang et familles de vecteurs**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $\mathcal{C} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$  une famille de  $p$  vecteurs de  $E$ .

- $\mathcal{C}$  est une famille génératrice de  $E$  si et seulement si  $\text{rg } \mathcal{C} = \dim E$ ;
- $\mathcal{C}$  est une famille libre si et seulement si  $\text{rg } \mathcal{C} = \text{card } \mathcal{C}$ ;
- $\mathcal{C}$  est une base de  $E$  si et seulement si  $\text{rg } \mathcal{C} = \text{card } \mathcal{C} = \dim E$ .

## IV — Utilisation des matrices

### Définition 4.1 — Matrice représentant un vecteur

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .

Si  $u$  est un vecteur de  $E$  alors

$$\exists!(u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{K}^n, \quad u = u_1 e_1 + u_2 e_2 + \dots + u_n e_n$$

On appelle matrice représentant le vecteur  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$  la matrice colonne  $U_{\mathcal{B}} = {}^t(u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n)$ .

Réciproquement, à toute matrice colonne  $U \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$  on associe une unique vecteur  $u$  de  $E$  tel que  $U$  représente  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

### Définition 4.2 — Matrice représentant une famille de vecteurs

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ ,  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$  une base de  $E$  et  $\mathcal{C} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$  une famille de  $p$  vecteurs de  $E$ .

On a alors

$$\forall k \in \llbracket 1 ; p \rrbracket, \quad \exists!(u_{1k}, \dots, u_{nk}) \in \mathbb{K}^n, \quad u_k = u_{1k} e_1 + u_{2k} e_2 + \dots + u_{nk} e_n$$

On appelle matrice représentant le vecteur  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$  la matrice  $C = (u_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ .

### Définition 4.3 — Rang d'une matrice

Soit  $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  une matrice à  $n$  lignes et  $p$  colonnes. D'après la définition précédente, cette matrice représente une famille de  $p$  vecteurs de  $\mathbb{K}^n$  dans la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ .

On appelle **rang de la matrice**  $M$  le rang de la famille de vecteurs ainsi définis.

### Théorème 4.4 — Rang et opérations sur une matrice

Soit une matrice  $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .

On ne modifie pas le rang de  $M$  en

- 1) permutant les colonnes de  $M$ ;
- 2) ajoutant ou retirant une colonne nulle à  $M$ ;
- 3) multipliant une colonne de  $M$  par un scalaire non nul;
- 4) ajoutant à une colonne de  $M$  une combinaison linéaire des autres;
- 5) retirant une colonne de  $M$  qui est combinaison linéaire des autres.

**Théorème 4.5** — Dans un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$ , le rang d'une famille de vecteurs  $\mathcal{C}$  est égal au rang de la matrice  $M$  représentant  $\mathcal{C}$  dans une base quelconque de  $E$ .

### Théorème 4.6 — Rang de la transposée

Soit une matrice  $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  :  $\text{rg}(M) = \text{rg}({}^t M)$

---

**Corollaire 4.7** — On peut effectuer les opérations du théorème ?? sur les lignes d'une matrice sans en changer le rang.

---