Espaces vectoriels

Notations du chapitre — *Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*

I — Espaces vectoriels

Définition 1.1 — Espace vectoriels sur $\mathbb{K}$

*Soit E un ensemble. On dit que E est un **espace vectoriel** sur le corps $\mathbb{K}$ s'il vérifie les propriétés suivantes*

1) *E est non vide ;*
2) *on peut définir dans E une loi de composition interne notée $+$, appelée **addition vectorielle**, telle que*

$$
\begin{array}{lll}
\forall (x,y,z) \in E^3, & x+(y+z) = (x+y)+z & \textit{associativité} \\
\forall (x,y) \in E^2, & x+y = y+x & \textit{commutativité} \\
\exists e \in E,\ \ \forall x \in E, & x+e = x & \textit{existence d'un élément neutre} \\
\forall x \in E,\ \ \exists x' \in E, & x+x' = e & \textit{existence d'un opposé}
\end{array}
$$

3) *on peut définir dans E une loi externe sur $\mathbb{K}$, notée ., appelée **multiplication par un scalaire**, telle que*

$$
\begin{array}{ll}
\forall x \in E, & 1\,.\,x = x \\
\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,\ \ \forall x \in E, & (\lambda+\mu)\,.\,x = \lambda\,.\,x + \mu\,.\,x \\
\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \ \forall (x,y) \in E^2, & \lambda\,.\,(x+y) = \lambda\,.\,x + \mu\,.\,y \\
\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,\ \ \forall x \in E, & \lambda\,.\,(\mu\,.\,x) = (\lambda \times \mu)\,.\,x
\end{array}
$$

Propriété 1.2 — *Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel.*

1) *Pour tout vecteur x de E :* $\quad 0\,.\,x = 0_E$.
2) *Pour tout scalaire λ :* $\quad \lambda\,.\,0_E = 0_E$.
3) *D'ailleurs, pour $x \in E$ et $\lambda \in K$:*

$$\lambda x = 0_E \iff \lambda = 0 \quad \textit{ou} \quad x = 0_E$$

4) *Pour $x \in E$, l'opposé de x est $(-1)\,.\,x$. Il est noté $-x$.*

Théorème 1.3 — L'ensemble $\mathbb{K}^n$

L'ensemble $\mathbb{K}^n$ muni de

- *l'addition vectorielle :*

$$(x_1,x_2,\dots,x_n)+(y_1,y_2,\dots,y_n) \overset{\text{déf.}}{=} (x_1+y_1,x_2+y_2,\dots,x_n+y_n)$$

- *et du produit par un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$:*

$$\lambda\,.\,(x_1,x_2,\dots,x_n) \overset{\text{déf.}}{=} (\lambda x_1,\lambda x_2,\dots,\lambda x_n)$$

est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Le vecteur nul de $\mathbb{K}^n$ est $(\underbrace{0,0,\dots,0}_{n\text{ fois}})$.

Définition 1.4 — Sous-espace vectoriel

Soit $(E,+,.)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et F un sous-ensemble de E.

On dit que F est sous-espace vectoriel de E si et seulement si $(F,+,.)$ est lui-même un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Théorème 1.5 — Caractérisation des sous-espaces vectoriels

Soit $(E,+,.)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et F un sous-ensemble de E.

F est sous-espace vectoriel de E si et seulement si

1) *$F \neq \varnothing$;*
2) *pour tout couple $(u,v) \in F^2$ on a $u+v \in F$;*
3) *pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout vecteur $u \in F$ on a $\lambda u \in F$*

Théorème 1.6 — Intersection de sous-espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel. Toute intersection de sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de E.

II — Famille de vecteurs

Définition 2.1 — Famille de vecteurs

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel.

On appelle famille de p vecteurs de E la donnée d'un élément de E^p, noté $(u_1, u_2, \dots, u_p)$.

Attention ! L'ordre des vecteurs compte ! La famille (u_1, u_2, u_3) n'est pas la famille (u_1, u_3, u_2) !

Définition 2.2 — Combinaison linéaire

Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel, $\mathscr{F} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille de de p vecteurs de E, et $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$.

*On appelle **combinaison linéaire** des u_i affectés des coefficients λ_i le vecteur*

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_p u_p = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i$$

*On dit que le vecteur u est combinaison linéaire des vecteurs de la famille $\mathscr{F}$ ou encore que u **se décompose** suivant $\mathscr{F}$.*

Définition 2.3 — Espace vectoriel engendré

Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel et $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille de p vecteurs de E.

*L'ensemble des vecteurs qui sont combinaisons linéaires des u_i est un sous-espace vectoriel de E. C'est l'espace vectoriel **engendré** par la famille $(u_1, \dots, u_p)$, noté* $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$.

Définition 2.4 — Famille génératrice

Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E.

S'il existe une famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ de vecteurs de E telle que $F =$ $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$*, alors on dit que la famille $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ **engendre** l'espace vectoriel F ou encore qu'elle est une **famille génératrice** de F.*

Proposition 2.5 — Opérations sur les familles génératrices

Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel, $\mathscr{B} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E et $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$.

L'ensemble F est engendré par la famille de vecteurs obtenue en

1) *permutant les vecteurs de $\mathscr{B}$;*
2) *ajoutant ou retirant le vecteur nul à $\mathscr{B}$;*
3) *multipliant un vecteur de $\mathscr{B}$ par un scalaire non nul ;*
4) *ajoutant à un vecteur de $\mathscr{B}$ une combinaison linéaire des autres ;*
5) *retirant un vecteur de $\mathscr{B}$ qui est combinaison linéaire des autres.*

Définition 2.6 — Famille libre

*Une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$–espace vectoriel E est **libre** si et seulement si aucun vecteur de la famille n'est combinaison linéaire des autres.*

Vocabulaire Une famille qui n'est pas libre est dite **liée**.

Propriété 2.7 — *Dans un $\mathbb{K}$–espace vectoriel*

- *toute sous-famille d'une famille libre est libre ;*
- *toute sur-famille d'une famille liée est liée ;*
- *en ajoutant à une famille libre un vecteur qui n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de cette famille, la famille obtenue est libre.*

Théorème 2.8 — Caractérisation d'une famille libre

Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel et $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E.

Cette famille est libre si et seulement si l'équation d'inconnues $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n = 0_E$$

admet pour unique solution $(0, 0, \dots, 0)$.

Proposition 2.9 — *Dans un $\mathbb{K}$–espace vectoriel*

- *la famille (e_1) est libre si et seulement si e_1 est non nul ;*
- *la famille (e_1, e_2) est liée si et seulement si l'un des vecteurs est égal à l'autre multiplié par un scalaire (on dit qu'ils sont **colinéaires**).*

Propriété 2.10 — Unicité de la décomposition sur une famille libre

Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel et $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E.

La famille $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est libre si et seulement si tout vecteur u de $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_n)$ se décompose d'une manière unique

$$\forall u \in \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_n), \exists!(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$$

III — Base, dimension finie

Définition 3.1 — Base

*Une famille $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une **base** d'un $\mathbb{K}$–espace vectoriel E si et seulement si $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une famille libre et génératrice de E.*

Théorème 3.2 — Caractérisation d'une base

La famille $\mathscr{B} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une base d'un $\mathbb{K}$–espace vectoriel E si et seulement si

$$\forall u \in E, \quad \exists!(x_1, x_2, \dots, x_n), \qquad u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \cdots + x_n u_n$$

*Les scalaires $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ s'appellent les **coordonnées** de u selon la base $\mathscr{B}$.*

Définition 3.3 — Dimension finie

On dit qu'un $\mathbb{K}$–espace vectoriel E est ***de dimension finie*** *si et seulement si il existe une base finie de E ou si E est réduit au vecteur nul.*

Théorème 3.4 — Théorème de la dimension

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Si E n'est pas réduit au vecteur nul, toutes les bases de E ont le même nombre de vecteurs. On appelle ce nombre ***dimension*** *de E et on le note $\dim E$ ou encore $\dim_{\mathbb{K}} E$. Si E est réduit au vecteur nul, alors par convention $\dim E = 0$.*

Théorème 3.5 — *Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel.*

De toute famille génératrice finie de E on peut extraire une base finie de E.

Corollaire 3.6 — Famille génératrice et dimension

Une famille génératrice d'un espace vectoriel de dimension n compte au moins n vecteurs.

Théorème 3.7 — Théorème de la base incomplète

Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel de dimension finie n.

On peut compléter une famille libre quelconque de E en une base de E.

Corollaire 3.8 — Famille libre et dimension

Une famille libre d'un espace vectoriel de dimension n compte au plus n vecteurs.

Corollaire 3.9 — Base et dimension

Soit E un espace de dimension n et $\mathscr{F}$ une famille de n vecteurs de E.

$$\mathscr{F} \text{ est libre} \iff \mathscr{F} \text{ est génératrice de } E \iff \mathscr{F} \text{ est une base de } E$$

Théorème 3.10 — Dimension d'un sous-espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E.

Alors F est un ev de dimension finie, et $\dim F \leqslant \dim E$. De plus $\dim F = \dim E$ si et seulement si $F = E$.

Définition 3.11 — Rang d'une famille de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{C} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille de p vecteurs de E.

On appelle ***rang*** *de la famille $\mathscr{C}$ la dimension de l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$:*

$$\mathrm{rg}(u_1, u_2, \dots, u_p) = \dim(\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p))$$

Proposition 3.12 — Rang et familles de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel de dimension finie et $\mathscr{C} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille de p vecteurs de E.

- *$\mathscr{C}$ est une famille génératrice de E si et seulement si $\mathrm{rg}\,\mathscr{C} = \dim E$;*
- *$\mathscr{C}$ est une famille libre si et seulement si $\mathrm{rg}\,\mathscr{C} = \mathrm{card}\, C$;*
- *$\mathscr{C}$ est une base de E si et seulement si $\mathrm{rg}\,\mathscr{C} = \mathrm{card}\, C = \dim E$.*

IV — Utilisation des matrices

Définition 4.1 — Matrice représentant un vecteur

Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E.

Si u est un vecteur de E alors

$$\exists!(u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{K}^n, \qquad u = u_1 e_1 + u_2 e_2 + \cdots + u_n e_n$$

On appelle matrice représentant le vecteur u dans la base $\mathscr{B}$ la matrice colonne $U_{\mathscr{B}} = {}^t\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{pmatrix}$.

Réciproquement, à toute matrice colonne $U \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ on associe une unique vecteur u de E tel que U représente u dans la base $\mathscr{B}$.

Définition 4.2 — Matrice représentant une famille de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel de dimension n, $\mathscr{B} = \left(e_1, e_2, \dots, e_p\right)$ une base de E et $\mathscr{C} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille de p vecteur de E.

On a alors

$$\forall k \in [\![1 ; p]\!], \quad \exists!\,(u_{1k}, \dots, u_{nk}) \in \mathbb{K}^n, \qquad u_k = u_{1k} e_1 + u_{2k} e_2 + \cdots + u_{nk} e_n$$

On appelle matrice représentant le vecteur u dans la base $\mathscr{B}$ la matrice $C = (u_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$.

Définition 4.3 — Rang d'une matrice

Soit $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice à n lignes et p colonnes. D'après la définition précédente, cette matrice représente une famille de p vecteurs de $\mathbb{K}^n$ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

On appelle ***rang de la matrice*** *M le rang de la famille de vecteurs ainsi définis.*

Théorème 4.4 — Rang et opérations sur une matrice

Soit une matrice $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On ne modifie pas le rang de M en

1) *permutant les colonnes de M ;*
2) *ajoutant ou retirant une colonne nulle à M ;*
3) *multipliant une colonne de M par un scalaire non nul ;*
4) *ajoutant à une colonne de M une combinaison linéaire des autres ;*
5) *retirant une colonne de M qui est combinaison linéaire des autres.*

Théorème 4.5 — *Dans un espace vectoriel E de dimension n, le rang d'une famille de vecteurs $\mathscr{C}$ est égal au rang de la matrice M représentant $\mathscr{C}$ dans une base quelconque de E.*

Théorème 4.6 — Rang de la transposée

Soit une matrice $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}({}^tM)$

Corollaire 4.7 — *On peut effectuer les opérations du théorème 4.4 sur les lignes d'une matrice sans en changer le rang.*