

Équations différentielles

Notations du chapitre — Dans tout ce chapitre n est un entier naturel non nul et I est un intervalle de \mathbb{R} non vide et non réduit à un point.

I — Généralités

Définition 1.1 — Équation différentielle

On appelle **équation différentielle d'ordre n** (en abrégé *é.d.*) une équation de la forme

$$F(y^{(n)}(t), y^{(n-1)}(t), \dots, y'(t), y(t), t) = 0 \quad (\mathcal{E})$$

où F est une fonction définie de $\mathbb{R}^{n+1} \times I$ à valeurs dans \mathbb{R} et y une fonction inconnue définie sur I , à valeurs dans \mathbb{R} et n fois dérivable.

On appelle **solution** de l'équation différentielle toute fonction y de classe n fois dérivable sur I vérifiant l'équation différentielle.

Définition 1.2 — Conditions initiales

Soit (\mathcal{E}) une *é.d.* d'ordre n .

On appelle **conditions initiales** la donnée en un point t_0 de I des valeurs de $y(t_0)$, $y'(t_0)$, \dots , $y^{(n-1)}(t_0)$.

On parle aussi dans ce cas de **conditions de Cauchy**.

Résoudre le **problème de Cauchy** c'est trouver une solution de l'*é.d.* (\mathcal{E}) qui vérifie les conditions.

On appelle **conditions au bord** la donnée, en n points t_0, t_1, \dots, t_{n-1} de I , de la valeur de la fonction $y(t_0), y(t_1), \dots, y(t_{n-1})$. On parle alors de **conditions de Dirichlet**.

Définition 1.3 — Équation différentielle linéaire

On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre n** une équation de la forme

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t) \quad (\mathcal{E})$$

où a_0, a_1, \dots, a_{n-1} et b sont $n + 1$ fonctions de I dans \mathbb{R} .

On dit que l'équation (\mathcal{E}) est **homogène** si le second membre est nul.

On appelle **équation homogène associée à (\mathcal{E})** l'équation

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0 \quad (\mathcal{E}_0)$$

Théorème 1.4 — Structure de l'ensemble des solutions d'une *é.d.* homogène

Soit (\mathcal{E}_0) une *é.d.* linéaire homogène d'ordre n .

Son ensemble de solution S_0 est un sous-espace vectoriel de $D^n(I, \mathbb{R})$.

Théorème 1.5 — Structure de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle

Soit (\mathcal{E}) une *é.d.* linéaire d'ordre n .

Son ensemble de solution S est de la forme

$$S = \{z + y_0 \text{ avec } y \in S_0\}$$

où z est une solution de (\mathcal{E}) et S_0 est l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.

II — É.d. linéaires du premier ordre

Définition 2.1 — Équation différentielle du premier ordre

On appelle *équation différentielle linéaire du premier ordre* toute é.d. du type

$$(E) : y' + a(x)y = b(x)$$

où a et b sont deux fonctions continues de I dans \mathbb{R} .

Théorème 2.2 — Solutions d'une é.d. linéaire homogène du premier ordre

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène du premier ordre $y' + a(x)y = 0$ est

$$S_0 = \left\{ f : \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto C \exp(-A(x)) \end{array} \right\}$$

où C est une constante réelle et A une primitive de a sur l'intervalle I .

Recherche d'une solution particulière On applique la **méthode de variation de la constante**. Elle consiste à chercher une solution de la forme

$$y = C(x) \times \exp(-A(x))$$

On prouve que $C'(x) = b(x) \exp(A(x))$ et n'intégrant cette dernière ligne on exprime la fonction C et on en déduit ensuite y .

Théorème 2.3 — Problème de Cauchy – I

Le problème de Cauchy associé à une équation linéaire du premier ordre admet une unique solution.

III — É.d. linéaires du second ordre à coefficients constants

Définition 3.1 — Équation différentielle du second ordre

On appelle *équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants* toute é.d. de la forme

$$(\mathcal{E}) : ay'' + by' + cy = f(x)$$

où a , b et c sont trois réels fixés, avec $a \neq 0$, et f est une fonction de I dans \mathbb{R} .

Théorème 3.2 — Résolution d'une équation différentielle linéaire du second ordre

L'équation différentielle linéaire

$$(\mathcal{E}_0) : \quad ay'' + by' + cy = 0$$

admet sur \mathbb{R} un ensemble de solutions S_0 qui dépend de deux paramètres réels.

Soit $aX^2 + bX + c = 0$ l'équation caractéristique de \mathcal{E}_0 , et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

Si $\Delta > 0$ alors l'ensemble de solution de \mathcal{E}_0 s'écrit

$$S_0 = \{x \mapsto C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \text{ avec } C_1 \in \mathbb{R} \text{ et } C_2 \in \mathbb{R}\}$$

où λ_1 et λ_2 sont les racines de l'équation caractéristique.

Si $\Delta = 0$ alors

$$S_0 = \{x \mapsto C_1 x e^{\lambda x} + C_2 e^{\lambda x} \text{ avec } C_1 \in \mathbb{R} \text{ et } C_2 \in \mathbb{R}\}$$

où λ est l'unique racine de l'équation caractéristique.

Si $\Delta < 0$ et si $\lambda_1 = \lambda + i\omega$ et $\lambda_2 = \lambda - i\omega$ sont les deux racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique alors

$$\begin{aligned} S_0 &= \{x \mapsto (C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x) e^{\lambda x} \text{ avec } C_1 \in \mathbb{R} \text{ et } C_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x \mapsto A \cos(\omega x + \varphi) e^{\lambda x} \text{ avec } A \in \mathbb{R} \text{ et } \varphi \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Théorème 3.3 — Problème de Cauchy – II

Le problème de Cauchy associé à une équation linéaire du second ordre à coefficients constants admet une unique solution.

