Ensembles

I — Définition d'un ensemble ?

La notion d'ensemble est difficile à définir de façon rigoureuse. Nous considérerons simplement qu'un **ensemble** est une collection d'objets.
Lorsque un objet x fait partie de la collection E, on dit que « x est un élément de l'ensemble E » et on note « $x \in E$ ». Si x ne fait pas partie de la collection E on note « $x \notin E$ ».
On admet l'existence d'un **ensemble vide**, noté $\varnothing$. C'est l'unique ensemble tel que $x \in \varnothing$ est faux, quelque soit l'objet x.

II — Parties d'un ensemble

Définition 2.1 — Sous-ensemble
*Soit E et F deux ensembles. On dit que F est un **sous-ensemble** (ou une **partie**) de E si et seulement si*

$$\forall x \in F, \qquad x \in E$$

ou encore « $x \in F \implies x \in E$ ». On note alors $\boldsymbol{F \subset E}$.

Définition 2.2 — Ensemble des sous-ensembles
Les sous-ensembles de E forment une collection d'objet. C'est donc un ensemble : l'ensemble des parties de E, noté $\boldsymbol{\mathscr{P}(E)}$.

Propriété 2.3 — *Deux ensembles E et F sont égaux si et seulement si chacun est inclus dans l'autre*

$$E = F \iff E \subset F \text{ et } F \subset E$$

III — Union, intersection

Définition 3.1 — Union et intersection de deux ensembles
Soit E et F deux ensembles
- *On appelle **union** de E et de F et on note $E \cup F$ l'ensemble*

$$E \cup F = \{x \text{ tel que } x \in E \text{ ou } x \in F\}.$$

- *On appelle **intersection** de E et de F et on note $E \cap F$ l'ensemble*

$$E \cap F = \{x \text{ tel que } x \in E \text{ et } x \in F\}.$$

Propriété 3.2 — *Soit A, B et C trois ensembles*

$$A \cap \varnothing = \varnothing \qquad \text{et} \qquad A \cup \varnothing = A$$

commutativité $\quad A \cap B = B \cap A \quad$ et $\quad A \cup B = B \cup A$

associativité $\quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

et $\quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

distributivité $\quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

et $\quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Définition 3.3 — Complémentaire d'un ensemble
*Soit E un ensemble et A un sous-ensemble de E. On appelle **complémentaire de A dans E** et on note $\complement_E A$ l'ensemble*

$$\complement_E A = \{x \in E \text{ tel que } x \notin A\}.$$

Lorsqu'aucune confusion n'est possible (c'est-à-dire lorsque que E peut-être sous entendu), on note plus simplement $\complement A$ ou encore $\overline{A}$.

Propriété 3.4 — Formules de De Morgan
Soit E un ensemble et A et B deux parties de E.

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Définition 3.5 — Différence de deux ensembles
*Soit E un ensemble et A et B deux parties de E. On note $A \backslash B$ (**A privé de B**) l'ensemble des éléments de A n'appartenant pas à B.*

$$A \backslash B = \{x \in E \ \text{ tel que } \ x \in A \ \text{ et } \ x \notin B\} = A \cap \overline{B}$$

Définition 3.6 — Ensembles disjoints
Soit E un ensemble et A et B deux sous-ensembles de E.
*A et B sont **disjoints** si $A \cap B = \varnothing$.*

IV — Produit cartésien

Définition 4.1 — Produit cartésien
*Soit A et B deux ensembles. On appelle **produit cartésien de A et de B** et on note $A \times B$ l'ensemble des couples (x, y) avec $x \in A$ et $y \in B$.*
Soit n un entier naturel non nul, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n ensembles. On appelle vocproduit cartésien de $A_1, A_2, \ldots, A_n$ et on note $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ l'ensemble des n–uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ avec $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2$, ..., $x_n \in A_n$.

V — Partition

Définition 5.1 — Partition d'un ensemble
*Soit E un ensemble, n un entier naturel non nul et $A_1, A_2, \ldots, A_n$, n parties de E. On dit que ces n parties forment une **partition** de E si et seulement si*

1) *elles sont non vides :*

$$\forall i \in [\![1\,;n]\!], \qquad A_i \neq \varnothing$$

2) *elles sont disjointes deux à deux :*

$$\forall (i,j) \in [\![0\,;n]\!]^2, \qquad i \neq j \implies A_i \cap A_j = \varnothing$$

3) *elles recouvrent E :*

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = E$$