

Ensembles

I — Définition d'un ensemble ?

La notion d'ensemble est difficile à définir de façon rigoureuse. Nous considérerons simplement qu'un **ensemble** est une collection d'objets.

Lorsque un objet x fait partie de la collection E , on dit que « x est un élément de l'ensemble E » et on note « $x \in E$ ». Si x ne fait pas partie de la collection E on note « $x \notin E$ ».

On admet l'existence d'un **ensemble vide**, noté \emptyset . C'est l'unique ensemble tel que $x \in \emptyset$ est faux, quelque soit l'objet x .

II — Parties d'un ensemble

Définition 2.1 — Sous-ensemble

Soit E et F deux ensembles. On dit que F est un **sous-ensemble** (ou une **partie**) de E si et seulement si

$$\forall x \in F, \quad x \in E$$

ou encore « $x \in F \implies x \in E$ ». On note alors $F \subset E$.

Définition 2.2 — Ensemble des sous-ensembles

Les sous-ensembles de E forment une collection d'objets. C'est donc un ensemble : l'ensemble des parties de E , noté $\mathcal{P}(E)$.

Propriété 2.3 — Deux ensembles E et F sont égaux si et seulement si chacun est inclus dans l'autre

$$E = F \iff E \subset F \text{ et } F \subset E$$

III — Union, intersection

Définition 3.1 — Union et intersection de deux ensembles

Soit E et F deux ensembles

– On appelle **union** de E et de F et on note $E \cup F$ l'ensemble

$$E \cup F = \{x \text{ tel que } x \in E \text{ ou } x \in F\}.$$

– On appelle **intersection** de E et de F et on note $E \cap F$ l'ensemble

$$E \cap F = \{x \text{ tel que } x \in E \text{ et } x \in F\}.$$

Propriété 3.2 — Soit A , B et C trois ensembles

$$\begin{array}{ll} & A \cap \emptyset = \emptyset \quad \text{et} \quad A \cup \emptyset = A \\ \text{commutativité} & A \cap B = B \cap A \quad \text{et} \quad A \cup B = B \cup A \\ \text{associativité} & (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \\ \text{et} & (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \\ \text{distributivité} & A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ \text{et} & A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{array}$$

Définition 3.3 — Complémentaire d'un ensemble

Soit E un ensemble et A un sous-ensemble de E . On appelle **complémentaire de A dans E** et on note $\complement_E A$ l'ensemble

$$\complement_E A = \{x \in E \text{ tel que } x \notin A\}.$$

Lorsqu'aucune confusion n'est possible (c'est-à-dire lorsque que E peut-être sous entendu), on note plus simplement $\complement A$ ou encore \bar{A} .

Propriété 3.4 — Formules de De Morgan

Soit E un ensemble et A et B deux parties de E .

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

Définition 3.5 — Différence de deux ensembles

Soit E un ensemble et A et B deux parties de E . On note $A \setminus B$ (**A privé de B**) l'ensemble des éléments de A n'appartenant pas à B .

$$A \setminus B = \{x \in E \text{ tel que } x \in A \text{ et } x \notin B\} = A \cap \bar{B}$$

Définition 3.6 — Ensembles disjoints

Soit E un ensemble et A et B deux sous-ensembles de E .

A et B sont **disjoints** si $A \cap B = \emptyset$.

IV — Produit cartésien**Définition 4.1 — Produit cartésien**

Soit A et B deux ensembles. On appelle **produit cartésien de A et de B** et on note $A \times B$ l'ensemble des couples (x, y) avec $x \in A$ et $y \in B$.

Soit n un entier naturel non nul, A_1, A_2, \dots, A_n n ensembles. On appelle **produit cartésien de A_1, A_2, \dots, A_n** et on note $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ l'ensemble des n -uplets (x_1, x_2, \dots, x_n) avec $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_n \in A_n$.

V — Partition**Définition 5.1 — Partition d'un ensemble**

Soit E un ensemble, n un entier naturel non nul et A_1, A_2, \dots, A_n , n parties de E . On dit que ces n parties forment une **partition** de E si et seulement si

1) elles sont non vides :

$$\forall i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket, \quad A_i \neq \emptyset$$

2) elles sont disjointes deux à deux :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 0 ; n \rrbracket^2, \quad i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$$

3) elles recouvrent E :

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = E$$