# Fonctions dérivables

**Notations du chapitre** — *Dans tout ce chapitre $I$ est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et* non réduit à un point, *$x_0$ est un point de $I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.*
*On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé donné.*

## I — Nombre dérivé en un point

**Définition 1.1 — Nombre dérivé en un point**
*La fonction* $\boldsymbol{f}$ ***est dérivable en*** $\boldsymbol{x_0}$ *si et seulement si le taux d'accroissement*

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

*admet une limite finie en $x_0$.*
*Dans ce cas, cette limite se note $f'(x_0)$ et s'appelle* **le nombre dérivé de $f$ en $x_0$**.

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

**Théorème 1.2 — Tangente en un point de $\mathscr{C}_f$**
*La fonction $f$ est dérivable en $x_0$ si et seulement si $\mathscr{C}_f$ admet une tangente* non verticale *au point $(x_0, f(x_0))$.*
*Cette tangente a alors pour équation*

$$y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$$

*Par ailleurs $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \xrightarrow[x\to x_0]{} \infty$ si et seulement si $\mathscr{C}_f$ admet une* ***tangente verticale*** *en $x_0$.*

**Théorème 1.3 — Dérivable implique continue**
*Si $f$ est dérivable en $x_0$ alors $f$ est continue en $x_0$.*

**Corollaire 1.4** — *Si une fonction $f$ est dérivable sur un domaine $\mathscr{D}$ alors elle est continue sur $\mathscr{D}$.*

**Définition 1.5 — Dérivabilité à gauche, à droite.**
*On dit que $f$ est* ***dérivable à gauche*** *en $x_0$ (resp.* ***à droite*** *en $x_0$) si et seulement si la fonction*

$$\varphi : x \mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

*admet une limite finie à gauche en $x_0$ (resp. une limite finie à droite en $x_0$).*

**Propriété 1.6** — *La fonction $f$ est dérivable en $x_0$ si et seulement si $f$ est dérivable à gauche et à droite en $x_0$ et que $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.*

## II — Fonction dérivée

**Définition 2.1 — Dérivabilité sur un intervalle – Fonction dérivée**
*Si $f$ est dérivable en tout point de $I$ on dit que $f$ est* ***dérivable sur I****.*
*La fonction $f'$ définie par* $f' : \left| \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f'(x) \end{array} \right.$ *est la* ***fonction dérivée*** *de $f$.*

**Définition 2.2 — Fonction de classe $C^n$ sur $I$**
*Une fonction $f$ est* ***de classe $C^n$ sur I*** *si et seulement si $f$ est dérivable $n$ fois sur $I$ et que la dérivée $n$–ième de $f$ est continue sur $I$. L'ensemble des fonctions de classe $C^n$ sur $I$ se note $C^n(I)$.*
*La fonction $f$ est* ***de classe $C^\infty$ sur I*** *si et seulement si $f$ est dérivable $n$ fois, pour tout entier naturel $n$. L'ensemble des fonctions de classe $C^\infty$ sur $I$ se note $C^\infty(I)$.*

**Propriété 2.3 — Opérations algébriques (I)**
*Soit $f$ et $g$ deux fonctions dérivables sur $I$, et $\lambda \in \mathbb{R}$.*

1) *La fonction $\lambda f$ est dérivable sur $I$, de fonction dérivée $\lambda f'$;*
2) *la fonction $f+g$ est dérivable sur $I$, de fonction dérivée $f'+g'$;*
3) *la fonction $f \times g$ est dérivable sur $I$, de fonction dérivée $f \times g' + f' \times g$.*

**Propriété 2.4 — Opérations algébriques (II)**
*Soit $f$ et $g$ deux fonctions $n$ fois dérivable sur $I$, et $\lambda \in \mathbb{R}$.*

1) *La fonction $\lambda f$ est $n$ fois dérivable sur $I$ et $(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$;*
2) *la fonction $f+g$ est $n$ fois dérivable sur $I$ et $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$;*
3) *la fonction $f \times g$ est $n$ fois dérivable.*

*De même si $f$ et $g$ sont de classe $C^\infty$ alors $f+g$, $\lambda f$ et $f \times g$ sont de classe $C^\infty$.*

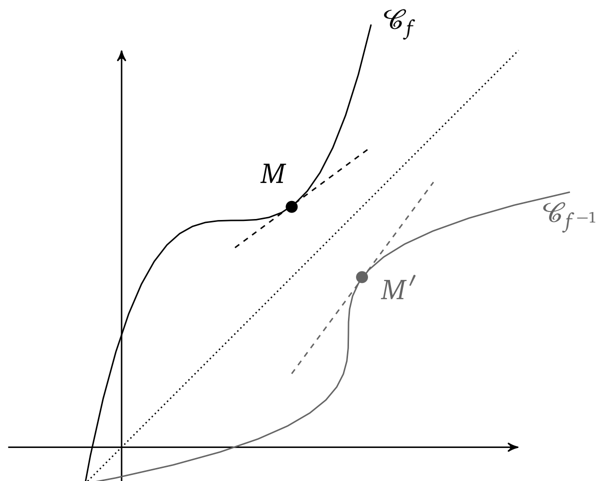
**Propriété 2.5 — Dérivée de la composée**
*Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) \in J$. Si $f$ est dérivable en $x_0$ et $g$ est dérivable en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est dérivable en $x_0$ et*

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \times g'(f(x_0))$$

**Propriété 2.6 — Dérivée d'un quotient**
*Soient $f$ et $g$ deux fonctions dérivables sur $I$.*
*Si la fonction $f/g$ est définie sur $I$, alors $f/g$ est dérivable sur $I$, de fonction dérivée $\dfrac{f'g - g'f}{g^2}$.*

**Théorème 2.7 — Dérivée de la bijection réciproque**
*Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, dérivable et strictement monotone (dans ce cas $f$ est bijective).*
*Soit $y_0 = f(x_0) \in f\langle I \rangle$.*
*Si $f'(x_0) \neq 0$ alors $f^{-1}$ est dérivable en $y_0$ et*

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$



## III — Théorème de Rolle & conséquences

**Définition 3.1 — Extrema locaux**
*On dit que $f$ admet un* ***maximum local*** *(resp.* ***un minimum local****) en $x_0$ si et seulement si il existe un réel $\alpha > 0$ tel que*

$$\forall x \in ]x_0 - \alpha \,;\, x_0 + \alpha[ \cap I, \qquad f(x) \leqslant f(x_0)$$
$$(\textit{resp. } f(x) \geqslant f(x_0))$$

**Théorème 3.2 —** *Soit $f$ une fonction de $I$ dans $\mathbb{R}$ et $x_0$ un point intérieur de $I$ (c'est-à-dire* pas une borne *de $I$). Si $f$ admet un extremum local en $x_0$ et si $f$ est dérivable en $x_0$ alors $f'(x_0) = 0$.*

**Théorème 3.3 — Théorème de Rolle**
*Soit $I$ un intervalle non vide et non réduit à un point, $f$ une fonction dérivable de $I$ dans $\mathbb{R}$ et $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$.*
*Si $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in ]a \,;\, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

**Théorème 3.4 — Formule des accroissements finis**
*Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$.*
*Soit $f$ une fonction continue sur $[\, a \,;\, b \,]$ et dérivable sur $]\, a \,;\, b \,[$. Il existe $c \in ]a \,;\, b[$ tel que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

**Corollaire 3.5 —** *Soit $f : \mathscr{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. La fonction $f'$ est nulle sur un intervalle $I$ si et seulement si $f$ est constante sur $I$.*

**Corollaire 3.6 —** *Si $f'$ est positive (resp. négative) sur $I$ alors $f$ est croissante (resp. décroissante) sur $I$.*

**Corollaire 3.7 —** *Si $f'$ est positive (resp. négative) et ne s'annule sur aucun intervalle inclus dans $I$ alors $f$ est strictement croissante sur $I$ (resp. strictement décroissante).*