Fonctions dérivables

Notations du chapitre — *Dans tout ce chapitre I est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et* non réduit à un point, *x_0 est un point de I et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.*

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé donné.

I — Nombre dérivé en un point

Définition 1.1 — Nombre dérivé d'une fonction en un point

La fonction ***f est dérivable en x_0*** *si et seulement si le taux d'accroissement*

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

admet une limite finie en x_0.

Dans ce cas, cette limite se note $f'(x_0)$ et s'appelle **le nombre dérivé de f en x_0**.

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

(sous réserve d'existence)

Théorème 1.2 — Tangente en un point de $\mathscr{C}_f$

La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si $\mathscr{C}_f$ admet une tangente non verticale *au point $(x_0, f(x_0))$.*

Par ailleurs $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \xrightarrow[x\to x_0]{} \infty$ si et seulement si $\mathscr{C}_f$ admet une ***tangente verticale*** *en x_0.*

Théorème 1.3 — Dérivable implique continue

Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.

Corollaire 1.4 — *Si une fonction f est dérivable sur un domaine $\mathscr{D}$ alors elle est continue sur $\mathscr{D}$.*

Définition 1.5 — Dérivabilité à gauche, à droite.

On dit que f est ***dérivable à gauche*** *en x_0 (resp.* ***à droite*** *en x_0) si et seulement si la fonction*

$$\varphi : x \mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

admet une limite finie à gauche en x_0 (resp. une limite finie à droite en x_0).

Propriété 1.6 — *La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite en x_0 et que $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.*

II — Fonction dérivée

Définition 2.1 — Dérivabilité sur un intervalle – Fonction dérivée

Si f est dérivable en tout point de I on dit que f est ***dérivable sur I****.*

La fonction f' définie par $f' : \left|\begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f'(x) \end{array}\right.$ est la ***fonction dérivée*** de f.

Définition 2.2 — Fonction de classe C^n sur I

Une fonction f est ***de classe C^n sur I*** *si et seulement si f est dérivable n fois sur I et que la dérivée n–ième de f est continue sur I. L'ensemble des fonctions de classe C^n sur I se note $C^n(I)$.*

La fonction f est ***de classe C^∞ sur I*** *si et seulement si f est dérivable n fois, pour tout entier naturel n. L'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur I se note $C^\infty(I)$.*

Propriété 2.3 — Opérations algébriques (I)

Soit f et g deux fonctions dérivables sur I, et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1) *La fonction λf est dérivable sur I, de fonction dérivée $\lambda f'$;*
2) *la fonction $f+g$ est dérivable sur I, de fonction dérivée $f'+g'$;*
3) *la fonction $f \times g$ est dérivable sur I, de fonction dérivée $f \times g' + f' \times g$.*

Propriété 2.4 — Opérations algébriques (II)

Soit f et g deux fonctions n fois dérivable sur I, et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1) *La fonction λf est n fois dérivable sur I et $(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$;*
2) *la fonction $f+g$ est n fois dérivable sur I et $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$;*
3) *la fonction $f \times g$ est n fois dérivable.*

De même si f et g sont de classe C^∞ alors $f+g$, λf et $f \times g$ sont de classe C^∞.

Propriété 2.5 — Dérivée de la composée

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) \in J$. Si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \times g'(f(x_0))$$

Propriété 2.6 — Dérivée d'un quotient

Soient f et g deux fonctions dérivables sur I.

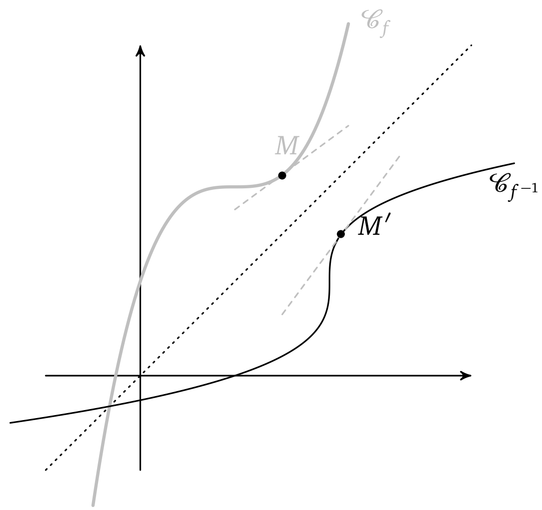
Si la fonction f/g est définie sur I, alors f/g est dérivable sur I, de fonction dérivée $\dfrac{f'g - g'f}{g^2}$.

Théorème 2.7 — Dérivée de la bijection réciproque

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, dérivable et strictement monotone (dans ce cas f est bijective). Soit $y_0 = f(x_0) \in f\langle I \rangle$.

Si $f'(x_0) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en y_0 et

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$



III — Théorème de Rolle & conséquences

Définition 3.1 — Extrema locaux

*On dit que f admet un **maximum local** (resp. **un minimum local**) en x_0 si et seulement si il existe un réel $\alpha > 0$ tel que*

$$\forall x \in]x_0-\alpha\,;\,x_0+\alpha[\,\cap I, \qquad f(x) \leqslant f(x_0)$$
$$(\text{resp. } f(x) \geqslant f(x_0))$$

Théorème 3.2 — *Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$ et x_0 un point intérieur de I (c'est-à-dire* pas une borne *de I). Si f admet un extremum local en x_0 et si f est dérivable en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.*

Théorème 3.3 — Théorème de Rolle

Soit I un intervalle non vide et non réduit à un point, f une fonction dérivable de I dans $\mathbb{R}$ et $(a,b) \in I^2$ avec $a < b$.

Si $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a\,;\,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème 3.4 — Formule des accroissements finis

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$.

Soit f une fonction continue sur $[\,a\,;\,b\,]$ et dérivable sur $]\,a\,;\,b\,[$. Il existe $c \in]a\,;\,b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Théorème 3.5 — Inégalité des accroissements finis - I

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Soit f une fonction continue sur $[\,a\,;\,b\,]$ et dérivable sur $]\,a\,;\,b\,[$. Si il existe deux réels m et M tels que

$$\forall x \in]\,a\,;\,b\,[, \qquad m \leqslant f'(x) \leqslant M$$

alors $$m(b-a) \leqslant f(b)-f(a) \leqslant M(b-a)$$

Corollaire 3.6 — *Soit $f\;:\;\mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. La fonction f' est nulle sur un intervalle I si et seulement si f est constante sur I.*

Corollaire 3.7 — *Si f' est positive (resp. négative) sur I alors f est croissante (resp. décroissante) sur I.*

Corollaire 3.8 — *Si f' est positive (resp. négative) et ne s'annule sur aucun intervalle inclus dans I alors f est strictement croissante sur I (resp. strictement décroissante).*

Théorème 3.9 — Inégalité des accroissements finis – II

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$.

Soit f une fonction continue sur $[\,a\,;\,b\,]$ et dérivable sur $]\,a\,;\,b\,[$. Si il existe un réel M tel que

alors $$\forall x \in]\,a\,;\,b\,[, \qquad \left|f'(x)\right| \leqslant M \quad |f(b)-f(a)| \qquad \leqslant M\,|b-a|$$

IV — Résumé : plan d'étude d'une fonction

Voici un plan d'étude « idéal » pour les fonctions numériques (*i.e.* à valeurs dans $\mathbb{R}$). Cette étude s'étend au cas d'une réunion d'intervalles.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

En pratique Toutes les étapes ne sont pas indispensables : on ne fait que celles qui sont nécessaires dans le cadre de l'exercice, et celles qui sont explicitement demandées.

1. **Détermination de l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$.** En décomposant f à partir des fonctions usuelles. Cette décomposition donne souvent la continuité et la dérivabilité.
2. **Détermination de l'ensemble utile d'étude.**

   On utilise les propriétés de f :
   - *périodicité de f* : si f est T-périodique (*i.e.* périodique de période T), on limite $\mathscr{D}_f$ à un intervalle de longueur T (utiliser de préférence un intervalle centré en 0, pour l'étude de parité qui va suivre). On en déduira les propriétés de f par translation.
   - *parité de f* : si f est paire ou impaire, on limite l'étude à $\mathscr{D}_f \cap \mathbb{R}_+$. On en déduira les propriétés de f sur l'ensemble $\mathscr{D}_f$ par symétrie.
3. **Étude de la continuité de f et de ses limites aux bornes de l'ensemble d'étude**

   Éventuellement, prolongement par continuité de f aux points où f n'est pas définie mais admet une limite finie. (Si on prolonge f par continuité, on étudie désormais son prolongement continu).
4. **Étude de la dérivabilité de f**

   Aux points x_0 où les théorèmes généraux ne permettent pas de savoir si f est dérivable, on peut étudier la limite du taux d'accroissement $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Si on trouve une limite infinie, il s'agit d'une tangente verticale. Si on ne trouve pas des limites à gauche et à droite différentes, on parlera de demi–tangentes.
5. **Étude de la monotonie de f**

   Soit par les théorèmes généraux, soit en étudiant le signe de la dérivée.
6. **Établissement du tableau de variation**

   On oubliera pas de préciser les valeurs remarquables de la fonction dérivée dans le tableau de variation (limite aux bornes, zéros, etc.).
7. **Étude des branches infinies de $\mathscr{C}_f$.**
8. **Représentation graphique de $\mathscr{C}_f$**

   On place les points remarquables, les asymptotes, les tangentes remarquables, puis on trace à main levée la courbe de f.