

Fonctions dérivables

Notations du chapitre — Dans tout ce chapitre I est un intervalle non vide de \mathbb{R} et non réduit à un point, x_0 est un point de I et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé donné.

I — Nombre dérivé en un point

Définition 1.1 — Nombre dérivé d'une fonction en un point

La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si le taux d'accroissement

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

admet une limite finie en x_0 .

Dans ce cas, cette limite se note $f'(x_0)$ et s'appelle le nombre dérivé de f en x_0 .

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

(sous réserve d'existence)

Théorème 1.2 — Tangente en un point de \mathcal{C}_f

La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si \mathcal{C}_f admet une tangente non verticale au point $(x_0, f(x_0))$.

Par ailleurs $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \infty$ si et seulement si \mathcal{C}_f admet une tangente verticale en x_0 .

Théorème 1.3 — Dérivable implique continue

Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0 .

Corollaire 1.4 — Si une fonction f est dérivable sur un domaine \mathcal{D} alors elle est continue sur \mathcal{D} .

Définition 1.5 — Dérivabilité à gauche, à droite.

On dit que f est dérivable à gauche en x_0 (resp. à droite en x_0) si et seulement si la fonction

$$\varphi : x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

admet une limite finie à gauche en x_0 (resp. une limite finie à droite en x_0).

Propriété 1.6 — La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite en x_0 et que $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

II — Fonction dérivée

Définition 2.1 — Dérivabilité sur un intervalle – Fonction dérivée

Si f est dérivable en tout point de I on dit que f est **dérivable sur I** .

La fonction f' définie par $f' : \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f'(x) \end{cases}$ est la **fonction dérivée** de f .

Définition 2.2 — Fonction de classe C^n sur I

Une fonction f est **de classe C^n sur I** si et seulement si f est dérivable n fois sur I et que la dérivée n -ième de f est continue sur I . L'ensemble des fonctions de classe C^n sur I se note $C^n(I)$.

La fonction f est **de classe C^∞ sur I** si et seulement si f est dérivable n fois, pour tout entier naturel n . L'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur I se note $C^\infty(I)$.

Propriété 2.3 — Opérations algébriques (I)

Soit f et g deux fonctions dérivables sur I , et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- 1) La fonction λf est dérivable sur I , de fonction dérivée $\lambda f'$;
- 2) la fonction $f + g$ est dérivable sur I , de fonction dérivée $f' + g'$;
- 3) la fonction $f \times g$ est dérivable sur I , de fonction dérivée $f \times g' + f' \times g$.

Propriété 2.4 — Opérations algébriques (II)

Soit f et g deux fonctions n fois dérivable sur I , et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- 1) La fonction λf est n fois dérivable sur I et $(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$;
- 2) la fonction $f + g$ est n fois dérivable sur I et $(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$;
- 3) la fonction $f \times g$ est n fois dérivable.

De même si f et g sont de classe C^∞ alors $f + g$, λf et $f \times g$ sont de classe C^∞ .

Propriété 2.5 — Dérivée de la composée

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) \in J$. Si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \times g'(f(x_0))$$

Propriété 2.6 — Dérivée d'un quotient

Soient f et g deux fonctions dérivables sur I .

Si la fonction f/g est définie sur I , alors f/g est dérivable sur I , de fonction dérivée $\frac{f'g - g'f}{g^2}$.

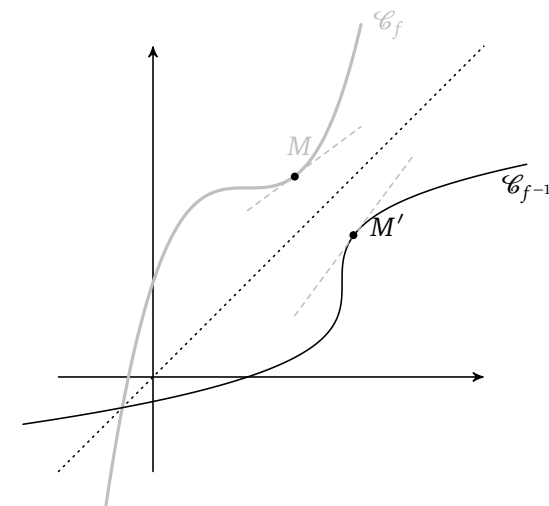
Théorème 2.7 — Dérivée de la bijection réciproque

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, dérivable et strictement monotone (dans ce cas f est bijective).

Soit $y_0 = f(x_0) \in f(I)$.

Si $f'(x_0) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en y_0 et

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$



III — Théorème de Rolle & conséquences

Définition 3.1 — Extrema locaux

On dit que f admet un **maximum local** (resp. un **minimum local**) en x_0 si et seulement si il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in]x_0 - \alpha ; x_0 + \alpha[\cap I, \quad f(x) \leq f(x_0) \\ (\text{resp. } f(x) \geq f(x_0))$$

Théorème 3.2 — Soit f une fonction de I dans \mathbb{R} et x_0 un point intérieur de I (c'est-à-dire pas une borne de I). Si f admet un extremum local en x_0 et si f est dérivable en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.

Théorème 3.3 — Théorème de Rolle

Soit I un intervalle non vide et non réduit à un point, f une fonction dérivable de I dans \mathbb{R} et $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$.

Si $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a ; b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème 3.4 — Formule des accroissements finis

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$.

Soit f une fonction continue sur $]a ; b[$ et dérivable sur $]a ; b[$. Il existe $c \in]a ; b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Corollaire 3.5 — Soit $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. La fonction f' est nulle sur un intervalle I si et seulement si f est constante sur I .

Corollaire 3.6 — Si f' est positive (resp. négative) sur I alors f est croissante (resp. décroissante) sur I .

Corollaire 3.7 — Si f' est positive (resp. négative) et ne s'annule sur aucun intervalle inclus dans I alors f est strictement croissante sur I (resp. strictement décroissante).

Théorème 3.8 — Inégalité des accroissements finis - I

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Soit f une fonction continue sur $]a ; b[$ et dérivable sur $]a ; b[$. Si il existe deux réels m et M tels que

$$\forall x \in]a ; b[, \quad m \leq f'(x) \leq M$$

alors $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$

Théorème 3.9 — Inégalité des accroissements finis - II

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$.

Soit f une fonction continue sur $]a ; b[$ et dérivable sur $]a ; b[$. Si il existe un réel M tel que

alors $\forall x \in]a ; b[, \quad |f'(x)| \leq M \implies |f(b) - f(a)| \leq M |b - a|$

IV — Résumé : plan d'étude d'une fonction

Voici un plan d'étude « idéal » pour les fonctions numériques (*i.e.* à valeurs dans \mathbb{R}). Cette étude s'étend au cas d'une réunion d'intervalles.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} et \mathcal{C}_f sa courbe représentative.



En pratique Toutes les étapes ne sont pas indispensables : on ne fait que celles qui sont nécessaires dans le cadre de l'exercice, et celles qui sont explicitement demandées.

1. **Détermination de l'ensemble de définition \mathcal{D}_f .** En décomposant f à partir des fonctions usuelles. Cette décomposition donne souvent la continuité et la dérivabilité.
2. **Détermination de l'ensemble utile d'étude.**
On utilise les propriétés de f :
 - *périodicité de f* : si f est T -périodique (*i.e.* périodique de période T), on limite \mathcal{D}_f à un intervalle de longueur T (utiliser de préférence un intervalle centré en 0, pour l'étude de parité qui va suivre). On en déduira les propriétés de f par translation.
 - *parité de f* : si f est paire ou impaire, on limite l'étude à $\mathcal{D}_f \cap \mathbb{R}_+$. On en déduira les propriétés de f sur l'ensemble \mathcal{D}_f par symétrie.
3. **Étude de la continuité de f et de ses limites aux bornes de l'ensemble d'étude**
Éventuellement, prolongement par continuité de f aux points où f n'est pas définie mais admet une limite finie. (Si on prolonge f par continuité, on étudie désormais son prolongement continu).
4. **Étude de la dérivabilité de f**
Aux points x_0 où les théorèmes généraux ne permettent pas de savoir si f est dérivable, on peut étudier la limite du taux d'accroissement $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Si on trouve une limite infinie, il s'agit d'une tangente verticale. Si on ne trouve pas des limites à gauche et à droite différentes, on parlera de demi-tangentes.

5. **Étude de la monotonie de f**
Soit par les théorèmes généraux, soit en étudiant le signe de la dérivée.
6. **Établissement du tableau de variation**
On oubliera pas de préciser les valeurs remarquables de la fonction dérivée dans le tableau de variation (limite aux bornes, zéros, etc.).
7. **Étude des branches infinies de \mathcal{C}_f .**
8. **Représentation graphique de \mathcal{C}_f**
On place les points remarquables, les asymptotes, les tangentes remarquables, puis on trace à main levée la courbe de f .

