

Fonctions dérivables

Notations du chapitre — Dans tout ce chapitre I est un intervalle non vide de \mathbb{R} et non réduit à un point, x_0 est un point de I et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé donné.

I — Nombre dérivé en un point

Définition 1.1 — Nombre dérivé d'une fonction en un point

La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si le taux d'accroissement

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

admet une limite finie en x_0 .

Dans ce cas, cette limite se note $f'(x_0)$ et s'appelle le nombre dérivé de f en x_0 .

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

(sous réserve d'existence)

Théorème 1.2 — Tangente en un point de \mathcal{C}_f

La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si \mathcal{C}_f admet une tangente non verticale au point $(x_0, f(x_0))$.

Par ailleurs $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \infty$ si et seulement si \mathcal{C}_f admet une tangente verticale en x_0 .

Théorème 1.3 — Dérivable implique continue

Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0 .

Corollaire 1.4 — Si une fonction f est dérivable sur un domaine \mathcal{D} alors elle est continue sur \mathcal{D} .

Définition 1.5 — Dérivabilité à gauche, à droite.

On dit que f est dérivable à gauche en x_0 (resp. à droite en x_0) si et seulement si la fonction

$$\varphi : x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

admet une limite finie à gauche en x_0 (resp. une limite finie à droite en x_0).

Propriété 1.6 — La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite en x_0 et que $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

II — Fonction dérivée

Définition 2.1 — Dérivabilité sur un intervalle – Fonction dérivée

Si f est dérivable en tout point de I on dit que f est **dérivable sur I** .

La fonction f' définie par $f' : \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f'(x) \end{cases}$ est la **fonction dérivée** de f .

Définition 2.2 — Fonction de classe C^n sur I

Une fonction f est **de classe C^n sur I** si et seulement si f est dérivable n fois sur I et que la dérivée n -ième de f est continue sur I . L'ensemble des fonctions de classe C^n sur I se note $C^n(I)$.

La fonction f est **de classe C^∞ sur I** si et seulement si f est dérivable n fois, pour tout entier naturel n . L'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur I se note $C^\infty(I)$.

Propriété 2.3 — Opérations algébriques (I)

Soit f et g deux fonctions dérivables sur I , et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- 1) La fonction λf est dérivable sur I , de fonction dérivée $\lambda f'$;
- 2) la fonction $f + g$ est dérivable sur I , de fonction dérivée $f' + g'$;
- 3) la fonction $f \times g$ est dérivable sur I , de fonction dérivée $f \times g' + f' \times g$.

Propriété 2.4 — Opérations algébriques (II)

Soit f et g deux fonctions n fois dérivable sur I , et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- 1) La fonction λf est n fois dérivable sur I et $(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$;
- 2) la fonction $f + g$ est n fois dérivable sur I et $(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$;
- 3) la fonction $f \times g$ est n fois dérivable.

De même si f et g sont de classe C^∞ alors $f + g$, λf et $f \times g$ sont de classe C^∞ .

Propriété 2.5 — Dérivée de la composée

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) \in J$. Si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \times g'(f(x_0))$$

Propriété 2.6 — Dérivée d'un quotient

Soient f et g deux fonctions dérivables sur I .

Si la fonction f/g est définie sur I , alors f/g est dérivable sur I , de fonction dérivée $\frac{f'g - g'f}{g^2}$.

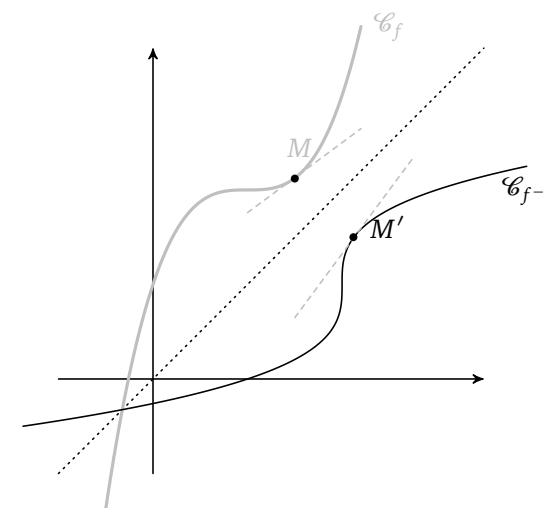
Théorème 2.7 — Dérivée de la bijection réciproque

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, dérivable et strictement monotone (dans ce cas f est bijective).

Soit $y_0 = f(x_0) \in f(I)$.

Si $f'(x_0) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en y_0 et

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$



III — Théorème de Rolle & conséquences

Définition 3.1 — Extrema locaux

On dit que f admet un **maximum local** (resp. un **minimum local**) en x_0 si et seulement si il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in]x_0 - \alpha ; x_0 + \alpha[\cap I, \quad f(x) \leq f(x_0) \\ (\text{resp. } f(x) \geq f(x_0))$$

Théorème 3.2 — Soit f une fonction de I dans \mathbb{R} et x_0 un point intérieur de I (c'est-à-dire pas une borne de I). Si f admet un extremum local en x_0 et si f est dérivable en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.

Théorème 3.3 — Théorème de Rolle

Soit I un intervalle non vide et non réduit à un point, f une fonction dérivable de I dans \mathbb{R} et $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$.

Si $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a ; b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème 3.4 — Formule des accroissements finis

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$.

Soit f une fonction continue sur $[a ; b]$ et dérivable sur $]a ; b[$. Il existe $c \in]a ; b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Corollaire 3.5 — Soit $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. La fonction f' est nulle sur un intervalle I si et seulement si f est constante sur I .

Corollaire 3.6 — Si f' est positive (resp. négative) sur I alors f est croissante (resp. décroissante) sur I .

Corollaire 3.7 — Si f' est positive (resp. négative) et ne s'annule sur aucun intervalle inclus dans I alors f est strictement croissante sur I (resp. strictement décroissante).

Théorème 3.8 — Inégalité des accroissements finis - I

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Soit f une fonction continue sur $[a ; b]$ et dérivable sur $]a ; b[$. Si il existe deux réels m et M tels que

$$\forall x \in]a ; b[, \quad m \leq f'(x) \leq M$$

alors $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$

Théorème 3.9 — Inégalité des accroissements finis - II

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$.

Soit f une fonction continue sur $[a ; b]$ et dérivable sur $]a ; b[$. Si il existe un réel M tel que

$$\text{alors } \forall x \in]a ; b[, \quad |f'(x)| \leq M \implies |f(b) - f(a)| \leq M |b - a|$$

IV — Résumé : plan d'étude d'une fonction

Voici un plan d'étude « idéal » pour les fonctions numériques (*i.e.* à valeurs dans \mathbb{R}). Cette étude s'étend au cas d'une réunion d'intervalles.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} et \mathcal{C}_f sa courbe représentative.



En pratique Toutes les étapes ne sont pas indispensables : on ne fait que celles qui sont nécessaires dans le cadre de l'exercice, et celles qui sont explicitement demandées.

1. **Détermination de l'ensemble de définition \mathcal{D}_f .** En décomposant f à partir des fonctions usuelles. Cette décomposition donne souvent la continuité et la dérivabilité.
2. **Détermination de l'ensemble utile d'étude.**
On utilise les propriétés de f :
 - *périodicité de f* : si f est T -périodique (*i.e.* périodique de période T), on limite \mathcal{D}_f à un intervalle de longueur T (utiliser de préférence un intervalle centré en 0, pour l'étude de parité qui va suivre). On en déduira les propriétés de f par translation.
 - *parité de f* : si f est paire ou impaire, on limite l'étude à $\mathcal{D}_f \cap \mathbb{R}_+$. On en déduira les propriétés de f sur l'ensemble \mathcal{D}_f par symétrie.
3. **Étude de la continuité de f et de ses limites aux bornes de l'ensemble d'étude**
Éventuellement, prolongement par continuité de f aux points où f n'est pas définie mais admet une limite finie. (Si on prolonge f par continuité, on étudie désormais son prolongement continu).
4. **Étude de la dérivabilité de f**
Aux points x_0 où les théorèmes généraux ne permettent pas de savoir si f est dérivable, on peut étudier la limite du taux d'accroissement $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Si on trouve une limite infinie, il s'agit d'une tangente verticale. Si on ne trouve pas des limites à gauche et à droite différentes, on parlera de demi-tangentes.

5. Étude de la monotonie de f

Soit par les théorèmes généraux, soit en étudiant le signe de la dérivée.

6. Établissement du tableau de variation

On oubliera pas de préciser les valeurs remarquables de la fonction dérivée dans le tableau de variation (limite aux bornes, zéros, etc.).

7. Étude des branches infinies de \mathcal{C}_f .

8. Représentation graphique de \mathcal{C}_f

On place les points remarquables, les asymptotes, les tangentes remarquables, puis on trace à main levée la courbe de f .