Dénombrement

I — Ensemble fini et cardinal

Définition 1.1 — Ensemble fini, cardinal
On dit qu'un ensemble E est un ***ensemble fini*** *si et seulement si E est vide ou s'il existe un entier non nul n et une bijection de E dans $[\![1 \,;\, n]\!]$.*
Dans ce dernier cas l'entier n est unique : c'est le ***cardinal*** *de E, noté $\operatorname{card} E$.*
Par convention $\operatorname{card} \varnothing = 0$.

Une telle bijection s'appelle une énumération de E. C'est *une* façon de compter les éléments de E.
L'entier $\operatorname{card} E$ représente le nombre d'éléments de E.

Théorème 1.2 — Sous-ensemble d'un ensemble fini
Soit E un ensemble fini et A un sous-ensemble de E. Alors A est un ensemble fini.

Théorème 1.3 — Union disjointe (1)
Soit E et F deux ensembles finis disjoints. Alors $E \cup F$ est un ensemble fini et

$$\operatorname{card}(E \cup F) = \operatorname{card} E + \operatorname{card} F$$

Théorème 1.4 — Union disjointe (2)
Soit $A_1, A_2, \dots, A_r$ r ensembles finis deux à deux disjoints. Alors

$$\operatorname{card}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_r) = \sum_{k=1}^{r} \operatorname{card} A_k$$

Corollaire 1.5 — Complémentaire d'un ensemble
Soit E un ensemble fini et A un sous-ensemble de E.

$$\operatorname{card} \overline{A} = \operatorname{card} E - \operatorname{card} A \tag{I.1}$$

Corollaire 1.6 — *Soit E un ensemble fini et A un sous-ensemble de E.*

- $\operatorname{card} A \leqslant \operatorname{card} E$ *;*
- $\operatorname{card} A = \operatorname{card} E$ *si et seulement si $A = E$.*

Propriété 1.7 — *Soit A, B et C trois ensembles finis.*

1) $\operatorname{card}(A \setminus B) = \operatorname{card} A - \operatorname{card}(A \cap B)$*;*

2) $\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card} A + \operatorname{card} B - \operatorname{card}(A \cap B)$*;*

3) $\operatorname{card}(A \cap B) = \operatorname{card} A + \operatorname{card} B - \operatorname{card}(A \cup B)$*;*

Corollaire 1.8 — *Soit E un ensemble à n éléments et $A_1, A_2, \dots, A_r$ une partition de E. Alors*

$$\operatorname{card} E = \sum_{k=1}^{r} \operatorname{card} A_k$$

Corollaire 1.9 — Principe de symétrie ou « des bergers »
Soit E un ensemble à n éléments et $A_1, A_2, \dots, A_r$ une partition de E. Si $\operatorname{card} A_1 = \operatorname{card} A_2 = \cdots = \operatorname{card} A_r = p$ alors $\operatorname{card} E = r \times p$.

II — Dénombrement

Théorème 2.1 — Cardinal du produit cartésien (1)
Soit A et B deux ensembles finis. Alors $A \times B$ est un ensemble fini et

$$\operatorname{card}(A \times B) = \operatorname{card} A \times \operatorname{card} B$$

Théorème 2.2 — Cardinal du produit cartésien (2)
Soit $E_1, E_2, \dots, E_p$ p ensembles finis de cardinaux respectifs n_1, n_2, ..., n_p. L'ensemble $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$ est fini, de cardinal $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_p$.

Corollaire 2.3 — *En particulier* $\operatorname{card}(E^p) = (\operatorname{card} E)^p$.

On parle de p–listes d'éléments de E ou encore de p–uplets d'éléments de E. Ces théorèmes formalisent les raisonnements « avec choix successifs » : E_1 est l'ensemble des choix possibles pour la première lettre, E_2 pour la seconde, etc. Un arrangemenent d'éléments de E est un p-uplet sans répétition.

Définition 2.4 — Arrangements
*Soit E un ensemble de cardinal n et p un entier naturel. On appelle **arrangement de p élément de E** un p–uplet $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in E^p$ tel que*

$$\forall (i,j) \in [\![1 ; p]\!]^2, \qquad i \neq j \Longleftrightarrow x_i \neq x_j$$

Théorème 2.5 — Nombre d'arrangements
Le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble E de cardinal n ne dépend que de n et de p.

1) *Si $p \leqslant n$, il y a*

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

arrangements de cette sorte ;

2) *si $p > n$ il n'y a pas d'arrangements possibles de cette sorte.*

Définition 2.6 — Permutations
*On appelle **permutations** d'un ensemble E à n éléments les arrangements de n éléments de E. Il y en a $n!$.*

Définition 2.7 — Combinaisons
*Soit E un ensemble de cardinal n et p un entier naturel. On appelle **combinaison** de p éléments de E un sous-ensemble de E contenant p éléments.*

Théorème 2.8 — Nombre de combinaisons
Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble à n éléments est $\binom{n}{p}$.