Dénombrement

I — Ensemble fini et cardinal

Définition 1.1 — Ensemble fini, cardinal

*On dit qu'un ensemble E est un **ensemble fini** si et seulement si E est vide ou s'il existe un entier non nul n et une bijection de E dans $[\![1 \,;\, n]\!]$.*

*Dans ce dernier cas l'entier n est unique : c'est le **cardinal** de E, noté $\operatorname{card} E$.*

Par convention $\operatorname{card}\varnothing = 0$.

Une telle bijection s'appelle une énumération de E. C'est *une* façon de compter les éléments de E.

L'entier $\operatorname{card} E$ représente le nombre d'éléments de E.

Théorème 1.2 — Sous-ensemble d'un ensemble fini

Soit E un ensemble fini et A un sous-ensemble de E. Alors A est un ensemble fini.

Théorème 1.3 — Union disjointe

Soit E et F deux ensembles finis disjoints. Alors $E \cup F$ est un ensemble fini et

$$\operatorname{card}(E \cup F) = \operatorname{card} E + \operatorname{card} F$$

Corollaire 1.4 — Complémentaire d'un ensemble

Soit E un ensemble fini et A un sous-ensemble de E.

$$\operatorname{card}\overline{A} = \operatorname{card} E - \operatorname{card} A$$

Corollaire 1.5 — *Soit E un ensemble fini et A un sous-ensemble de E.*

- $\operatorname{card} A \leqslant \operatorname{card} E$*;*
- $\operatorname{card} A = \operatorname{card} E$ *si et seulement si* $A = E$.

Propriété 1.6 — *Soit A, B et C trois ensembles finis.*

1) $\operatorname{card}(A \setminus B) = \operatorname{card} A - \operatorname{card}(A \cap B)$*;*

2) $\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card} A + \operatorname{card} B - \operatorname{card}(A \cap B)$*;*

3) $\operatorname{card}(A \cap B) = \operatorname{card} A + \operatorname{card} B - \operatorname{card}(A \cup B)$*;*

Propriété 1.7 — *Soit $A_1, A_2, \ldots, A_r$ r ensembles finis deux à deux disjoints. Alors*

$$\operatorname{card}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_r) = \sum_{k=1}^{r} \operatorname{card} A_k$$

Corollaire 1.8 — *Soit E un ensemble à n éléments et $A_1, A_2, \ldots, A_r$ une partition de E. Alors*

$$\operatorname{card} E = \sum_{k=1}^{r} \operatorname{card} A_k$$

Corollaire 1.9 — Principe de symétrie ou « des bergers »

Soit E un ensemble à n éléments et $A_1, A_2, \ldots, A_r$ une partition de E. Si $\operatorname{card} A_1 = \operatorname{card} A_2 = \cdots = \operatorname{card} A_r = p$ alors $\operatorname{card} E = r \times p$.

II — Dénombrement

Théorème 2.1 — Cardinal du produit cartésien
Soit A et B deux ensembles finis. Alors $A \times B$ est un ensemble fini et

$$\operatorname{card}(A \times B) = \operatorname{card} A \times \operatorname{card} B$$

Théorème 2.2 — *Soit $E_1, E_2, \dots, E_p$ p ensembles finis de cardinaux respectifs n_1, n_2, ..., n_p.*
L'ensemble $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$ est fini, de cardinal $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_p$.

Corollaire 2.3 — *En particulier* $\operatorname{card}(E^p) = (\operatorname{card} E)^p$.

On parle de p–listes d'éléments de E ou encore de p–uplets d'éléments de E.

Ces théorèmes formalisent les raisonnements « avec choix successifs » : E_1 est l'ensemble des choix possibles pour la première lettre, E_2 pour la seconde, etc.

Un arrangement d'éléments de E est un p-uplet sans répétition.

Définition 2.4 — Arrangements
Soit E un ensemble de cardinal n et p un entier naturel. On appelle ***arrangement de p élément de E*** *un p–uplet $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in E^p$ tel que*

$$\forall (i,j) \in [\![1 \,;\, p]\!]^2, \qquad i \neq j \Longleftrightarrow x_i \neq x_j$$

Théorème 2.5 — *Le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble E de cardinal n ne dépend que de n et de p.*

1) Si $p \leqslant n$, il y a

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

arrangements de cette sorte ;

2) si $p > n$ il n'y a pas d'arrangements possibles de cette sorte.

Définition 2.6 — Permutations
On appelle ***permutations*** *d'un ensemble E à n éléments les arrangements de n éléments de E. Il y en a $n!$.*

Définition 2.7 — Combinaisons
Soit E un ensemble de cardinal n et p un entier naturel. On appelle ***combinaison*** *de p éléments de E un sous-ensemble de E contenant p éléments.*

Théorème 2.8 — *Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble à n éléments est $\binom{n}{p}$.*