

Continuité sur un intervalle

Notations du chapitre — Dans tout ce chapitre, et sauf mention contraire :

- I est un intervalle de \mathbb{R} non vide et non réduite à un point ;
- \mathcal{D} est un domaine de \mathbb{R} .

I — Fonction continue sur un ensemble

Définition 1.1 — Fonction continue sur un ensemble

Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$.

On dit que f est continue sur \mathcal{D} si et seulement si f est continue en tout point de \mathcal{D} .

À l'exception de $x \mapsto \lfloor x \rfloor$, les fonctions usuelles sont toutes continues sur leurs domaines de définition.

Théorème 1.2 — Opérations algébriques

Soient f et g deux fonctions continues sur un domaine \mathcal{D} et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Les fonctions $\lambda f + \mu g$ et $f \times g$ sont continues sur \mathcal{D} .

Si, de plus, g ne s'annule en aucun point de \mathcal{D} alors $\frac{f}{g}$ est continue sur \mathcal{D} .

Théorème 1.3 — Composition

Soient \mathcal{D} et \mathcal{D}' deux domaines de \mathbb{R} , $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D}' \longrightarrow \mathbb{R}$.

Si f est continue sur \mathcal{D} , si $f(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}'$ et si g est continue sur \mathcal{D}' , alors $g \circ f$ est continue sur \mathcal{D} .

Théorème 1.4 — Composition avec une suite

Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels à valeur dans \mathcal{D} .

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite $a \in \mathcal{D}$ alors $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite $f(a)$.

II — Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 2.1 — Théorème des valeurs intermédiaires (I)

Soit I un intervalle de \mathbb{R} contenant au moins deux points, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I , a et b deux points distincts de I .

Si $f(a)f(b) < 0$ alors il existe un point c entre a et b tel que $f(c) = 0$.

Corollaire 2.2 — Théorème des valeurs intermédiaires (II)

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I , où I est un intervalle de \mathbb{R} contenant au moins deux points. Soit a et b dans I et γ un réel entre $f(a)$ et $f(b)$.

Il existe un point c entre a et b tel que $f(c) = \gamma$.

Corollaire 2.3 — Théorème des valeurs intermédiaires (III)

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I , où I est un intervalle de \mathbb{R} contenant au moins deux points.

Alors $f(I)$ est un intervalle de \mathbb{R} .

Corollaire 2.4 — Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue et soit a et b deux éléments de I , éventuellement des bornes finies ou infinies. Alors

- 1) Si f est croissante :
- $f \langle]a ; b [\rangle = \left] \lim_{a^+} f ; \lim_{b^-} f \right[$
 - $f \langle [a ; b [\rangle = \left[f(a) ; \lim_{b^-} f \right[$
 - $f \langle] a ; b] \rangle = \left] \lim_{a^+} f ; f(b) \right[$
 - $f \langle [a ; b] \rangle = \left[f(a) ; f(b) \right]$
- 2) Si f est décroissante :
- $f \langle]a ; b [\rangle = \left] \lim_{b^-} f ; \lim_{a^+} f \right[$
 - $f \langle [a ; b [\rangle = \left[f(b) ; \lim_{a^+} f \right[$
 - $f \langle] a ; b] \rangle = \left] \lim_{b^-} f ; f(a) \right[$
 - $f \langle [a ; b] \rangle = \left[f(b) ; f(a) \right]$

Théorème 2.5 — Théorème des bornes atteintes

Soit I est un segment de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.
Alors $f \langle I \rangle$ est aussi un segment de \mathbb{R} .

Corollaire 2.6 — Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

III — Théorème de la bijection continue

Théorème 3.1 — Théorème de la bijection continue

Soit I un intervalle non vide de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application strictement monotone.

- La fonction f réalise une bijection de I sur $f \langle I \rangle$.
- La bijection réciproque f^{-1} , définie sur $f \langle I \rangle$, est strictement monotone, et de même monotonie que f .
- Si, de plus, f est continue, alors f^{-1} est continue sur l'intervalle $f \langle I \rangle$.

Proposition 3.2 — Soit $f : I \rightarrow J$ une fonction bijective définie sur un intervalle I , à valeurs dans un intervalle J .

Le graphe de la bijection réciproque f^{-1} est symétrique de celui de f par rapport à la première bissectrice.

Corollaire 3.3 — « Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires »

Soit I un intervalle non vide de \mathbb{R} , $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur I , a et b deux points de I .

Si $f(a) f(b) < 0$ alors il existe un unique point c entre a et b tel que $f(c) = 0$.