Continuité sur un intervalle

Notations du chapitre — *Dans tout ce chapitre, et sauf mention contraire :*

- *I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduite à un point ;*
- *$\mathscr{D}$ est un domaine de $\mathbb{R}$.*

I — Fonction continue sur un ensemble

Définition 1.1 — Fonction continue sur un ensemble

Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$.

On dit que f est continue $\mathscr{D}$ si et seulement si f est continue en tout point de $\mathscr{D}$.

À l'exception de $x \mapsto \lfloor x \rfloor$, les fonctions usuelles sont toutes continues sur leurs domaines de définition.

Théorème 1.2 — Opérations algébriques

Soient f et g sont deux fonctions continues sur un domaine $\mathscr{D}$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Les fonctions $\lambda f + \mu g$ et $f \times g$ sont continues sur $\mathscr{D}$.

Si, de plus, g ne s'annule en aucun point de $\mathscr{D}$ alors $\dfrac{f}{g}$ est continue sur $\mathscr{D}$.

Théorème 1.3 — Composition

Soient $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux domaines de $\mathbb{R}$, $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathscr{D}' \longrightarrow \mathbb{R}$.

Si f est continue sur $\mathscr{D}$, si $f\langle \mathscr{D} \rangle \subset \mathscr{D}'$ et si g est continue sur $\mathscr{D}'$, alors $g \circ f$ est continue sur $\mathscr{D}$.

Théorème 1.4 — Composition avec une suite

Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels à valeur dans $\mathscr{D}$.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite $a \in \mathscr{D}$ alors $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite $f(a)$.

II — Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 2.1 — Théorème des valeurs intermédiaires (I)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I, a et b deux points distincts de I.

Si $f(a)f(b) < 0$ alors il existe un point c entre a et b tel que $f(c) = 0$.

Corollaire 2.2 — Théorème des valeurs intermédiaires (II)

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points. Soit a et b dans I et γ un réel entre $f(a)$ et $f(b)$.

Il existe un point c entre a et b tel que $f(c) = \gamma$.

Corollaire 2.3 — Théorème des valeurs intermédiaires (III)

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points.

Alors $f\langle I \rangle$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Corollaire 2.4 — *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et soit a et b deux élements de I, éventuellement des bornes finies ou infinies. Alors*

1) *Si f est croissante :*
   - $f\langle]a\,;b[\rangle = \left]\lim_{a+} f\,;\,\lim_{b-} f\right[$
   - $f\langle [a\,;b[\rangle = \left[f(a)\,;\,\lim_{b-} f\right[$
   - $f\langle]a\,;b]\rangle = \left]\lim_{a+} f\,;f(b)\right]$
   - $f\langle [a\,;b]\rangle = [f(a)\,;f(b)]$
2) *Si f est décroissante :*
   - $f\langle]a\,;b[\rangle = \left]\lim_{b-} f\,;\,\lim_{a+} f\right[$
   - $f\langle [a\,;b[\rangle = \left[f(b)\,;\,\lim_{a+} f\right[$
   - $f\langle]a\,;b]\rangle = \left]\lim_{b-} f\,;f(a)\right]$
   - $f\langle [a\,;b]\rangle = [f(b)\,;f(a)]$

Théorème 2.5 — Théorème des bornes atteintes

Soit I est un segment *de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.*

Alors $f\langle I\rangle$ est aussi un segment de $\mathbb{R}$.

Corollaire 2.6 — *Une fonction continue sur un segment est bornée est atteint ses bornes.*

III — Théorème de la bijection continue

Théorème 3.1 — Théorème de la bijection continue

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application strictement monotone.

- *La fonction f réalise une bijection de I sur $f\langle I\rangle$.*
- *La bijection réciproque f^{-1}, définie sur $f\langle I\rangle$, est strictement monotone, et de même monotonie que f*
- *Si, de plus, f est continue, alors f^{-1} est continue sur l'intervalle $f\langle I\rangle$.*

Proposition 3.2 — *Soit $f : I \longrightarrow J$ une fonction bijective définie sur un intervalle I, à valeurs dans un intervalle J.*

Le graphe de la bijection réciproque f^{-1} est symétrique de celui de f par rapport à la première bissectrice.

Corollaire 3.3 — « Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires »

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur I, a et b deux points de I.

Si $f(a)\,f(b) < 0$ alors il existe un unique point c entre a et b tel que $f(c) = 0$.