

Nombres complexes

I — Définition de \mathbb{C} – Écriture algébrique

Définition 1.1 — Nombres complexes

On appelle **ensemble des nombres complexes** et on note \mathbb{C} l'ensemble \mathbb{R}^2 muni des deux opérations suivantes

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall (x', y') \in \mathbb{R}^2,$$

addition $(x, y) + (x', y') \stackrel{\text{déf.}}{=} (xx', yy')$

multiplication $(x, y) \times (x', y') \stackrel{\text{déf.}}{=} (xx' - yy', xy' + x'y)$

Définition 1.2 — Partie réelle, partie imaginaire

Soit z un nombre complexe. Il existe un unique couple (x, y) de réels tels que $z = x + iy$.

Le réel x est la **partie réelle** de z notée $\text{Re}(z)$; le réel y est sa **partie imaginaire**, notée $\text{Im}(z)$.

On identifie le sous-ensemble $\{z \in \mathbb{C}, \text{Im}(z) = 0\}$ avec \mathbb{R} .

Si $\text{Re}(z) = 0$, z est un **imaginaire pur**. L'ensemble des imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$.

Propriété 1.3 — Propriété des parties réelles et imaginaires

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\text{Re}(z + z') = \text{Re}(z) + \text{Re}(z') \quad \text{Im}(z + z') = \text{Im}(z) + \text{Im}(z')$$

$$\text{Re}(\lambda z) = \lambda \text{Re}(z) \quad \text{Im}(\lambda z) = \lambda \text{Im}(z)$$

Théorème 1.4 — Cas d'égalité

Soit $(x, x', y, y') \in \mathbb{R}^4$:

$$x + iy = x' + iy' \iff x = x' \quad \text{et} \quad y = y'$$

Définition 1.5 — Conjugué d'un complexe

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

On appelle **conjugué** de z et on note \bar{z} le complexe $\bar{z} \stackrel{\text{déf.}}{=} x - iy$.

Propriété 1.6 — Conjugaison et opérations

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$

$$\overline{\bar{z}} = z$$

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$$

$$\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$$

$$\overline{z^n} = \bar{z}^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\bar{z}}$$

Propriété 1.7 — Forme algébrique de l'inverse

Si $z \in \mathbb{C}^*$, $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Propriété 1.8 — Soit $z \in \mathbb{C}$:

- $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ et $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$;
- z est réel si et seulement si $z = \bar{z}$ et z est imaginaire pur si et seulement si $z = -\bar{z}$.

II — Notation exponentielle

Définition 2.1 — **Module d'un nombre complexe**

Soit $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Le nombre $x^2 + y^2$ est un réel positif. Par définition, on note

$$|z| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{x^2 + y^2}$$

que l'on appelle le **module** du nombre complexe z .

Propriété 2.2 — **Propriétés du module**

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$

$$\begin{aligned} |zz'| &= |z| |z'| & \left| \frac{z}{z'} \right| &= \frac{|z|}{|z'|} \\ |z| = 0 &\iff z = 0 & |z| &= |\bar{z}| \\ |\operatorname{Re}(z)| &\leq |z| & |\operatorname{Im}(z)| &\leq |z| \end{aligned}$$

Théorème 2.3 — **Inégalité triangulaire**

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$

$$|z + z'| \leq |z| + |z'| \quad \text{et} \quad ||z| - |z'|| \leq |z - z'|$$

Corollaire 2.4 — Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$: $|c - a| \leq |b - a| + |c - b|$

Théorème & Définition 2.5 — **Coordonnées polaires**

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Il existe un couple (ρ, θ) de réels tels que

$$\rho \in \mathbb{R}_+, \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad x = \rho \cos \theta \quad \text{et} \quad y = \rho \sin \theta$$

- Le réel ρ est unique : $\rho^2 = x^2 + y^2$. On retrouve le module de z .
- Si $z = 0$ alors θ est quelconque dans \mathbb{R} .
- Si $z \neq 0$ alors θ est défini à 2π près. Chaque valeur possible de θ est un **argument** de z . L'unique réel $\theta_0 \in]-\pi ; \pi]$ vérifiant la relation précédente s'appelle l'**argument principal** de z .

Définition 2.6 — **Notation exponentielle**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On note

$$e^{i\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \cos \alpha + i \sin \alpha$$

Propriété 2.7 — **Relation fondamentale**

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} e^{i\beta}$$

et donc $e^{-i\alpha} = \frac{1}{e^{i\alpha}} \quad e^{i(\alpha-\beta)} = \frac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}} \quad (e^{i\alpha})^n = e^{in\alpha} \quad (n \in \mathbb{Z})$

Théorème 2.8 — Notation exponentielle

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Il existe un couple $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ tel que

$$z = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$$

Propriété 2.9 — Cas d'égalité

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, de notations exponentielles $z = \rho e^{i\alpha}$ et $z' = \rho' e^{i\beta}$

$$z = z' \iff \rho = \rho' \quad \text{et} \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \alpha = \beta + 2k\pi$$

Définition 2.10 — Argument d'un nombre complexe

Soit $z \in \mathbb{C}^*$, $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $z = r e^{i\theta}$.

Tout nombre réel θ vérifiant la relation précédente est **un argument** de z .

Propriété 2.11 — Soit $z \in \mathbb{C}$, θ et θ' deux arguments de z . Alors

$$\exists k \in \mathbb{Z}, \quad \theta' = \theta + 2k\pi$$

Propriété 2.12 — Propriété de l'argument

Soit $(z, z') \in (\mathbb{C}^*)^2$.

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \quad [2\pi]$
- $\arg(az) = \arg(z) \quad [2\pi] \quad \text{si } a \in \mathbb{R}_+^*$
- $\arg(az) = \pi + \arg(z) \quad [2\pi] \quad \text{si } a \in \mathbb{R}_-^*$
- $\arg(z^n) = n \arg(z) \quad [2\pi]$
- $\arg(1/z) = -\arg(z) \quad [2\pi]$
- $\arg(z/z') = \arg(z) - \arg(z') \quad [2\pi]$
- $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) \quad [2\pi]$

III — Applications des nombres complexes

Définition 3.1 — Exponentielle d'un nombre complexe

Soit $z \in \mathbb{C}$. On note $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}$.

On définit l'exponentielle de z par

$$\exp(z) \stackrel{\text{déf.}}{=} \exp(x) e^{iy} = e^x (\cos(y) + i \sin(y))$$

Propriété 3.2 — Soit z et z' deux complexes. On a

$$\exp(z + z') = \exp(z) \exp(z')$$

Proposition 3.3 — Formules d'Euler

Soit $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Proposition 3.4 — Formules de Moivre

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a

$$e^{in\theta} = (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

ou de manière équivalente

$$\cos(n\theta) = \operatorname{Re} \left[(\cos \theta + i \sin \theta)^n \right]$$

$$\sin(n\theta) = \operatorname{Im} \left[(\cos \theta + i \sin \theta)^n \right]$$

