Nombres complexes

I — Définition de $\mathbb{C}$ – Écriture algébrique

Définition 1.1 — Nombres complexes
On appelle ***ensemble des nombres complexes*** *et on note $\mathbb{C}$ l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des deux opérations suivantes*

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \forall (x',y')\in\mathbb{R}^2,$$

addition $\quad (x,y)+(x',y') \overset{\text{déf.}}{=} (xx',yy')$

multiplication $\quad (x,y)\times(x',y') \overset{\text{déf.}}{=} (xx'-yy',xy'+x'y)$

Définition 1.2 — Partie réelle, partie imaginaire
Soit z un nombre complexe. Il existe un unique couple (x,y) de réels tels que $z=x+\mathrm{i}y$.
Le réel x est la ***partie réelle*** *de z notée $\mathrm{Re}(z)$; le réel y est sa* ***partie imaginaire****, notée $\mathrm{Im}(z)$.*
On identifie le sous-ensemble $\{z\in\mathbb{C},\quad \mathrm{Im}(z)=0\}$ avec $\mathbb{R}$.
Si $\mathrm{Re}(z)=0$, z est un ***imaginaire pur****. L'ensemble des imaginaires purs est noté $\mathrm{i}\mathbb{R}$.*

Propriété 1.3 — Propriété des parties réelles et imaginaires
Soit $(z,z')\in\mathbb{C}^2$

$$\mathrm{Re}(z+z')=\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Re}(z') \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(z+z')=\mathrm{Im}(z)+\mathrm{Im}(z')$$

Si $\lambda\in\mathbb{R}$ alors

$$\mathrm{Re}(\lambda z)=\lambda\,\mathrm{Re}(z) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(\lambda z)=\lambda\,\mathrm{Im}(z)$$

Théorème 1.4 — Cas d'égalité
Soit $(x,x',y,y')\in\mathbb{R}^4$:

$$x+\mathrm{i}y=x'+\mathrm{i}y' \iff x=x' \qquad \text{et} \qquad y=y'$$

Définition 1.5 — Conjugué d'un complexe
Soit $z=x+\mathrm{i}y\in\mathbb{C}$, avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.
On appelle conjugué *de z et on note $\overline{z}$ le complexe $\overline{z}\overset{\text{déf.}}{=}x-iy$.*

Propriété 1.6 — Conjugaison et opérations
Soit $(z,z')\in\mathbb{C}^2$

$$\overline{\overline{z}}=z \qquad \overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$$

$$\overline{zz'}=\overline{z}\,\overline{z'} \qquad \overline{z^n}=\overline{z}^n \quad (n\in\mathbb{N}) \qquad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\overline{z}}$$

Propriété 1.7 — Forme algébrique de l'inverse

Si $z \in \mathbb{C}^*$, $z = x + \mathrm{i}y$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{x}{x^2+y^2} - \mathrm{i}\frac{y}{x^2+y^2}$$

Propriété 1.8 — *Soit $z \in \mathbb{C}$:*

- $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ *et* $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$;
- *z est réel si et seulement si $z = \overline{z}$ et z est imaginaire pur si et seulement si $z = -\overline{z}$.*

II — Notation exponentielle

Définition 2.1 — Module d'un nombre complexe
Soit $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Le nombre x^2+y^2 est un réel positif. Par définition, on note

$$|z| \overset{\text{déf.}}{=} \sqrt{x^2+y^2}$$

*que l'on appelle le **module** du nombre complexe z.*

Propriété 2.2 — Propriétés du module
Soit $(z,z') \in \mathbb{C}^2$

$$\left|zz'\right| = |z|\left|z'\right| \qquad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

$$|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0 \qquad |z| = |\overline{z}|$$

$$|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z| \qquad |\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|$$

Théorème 2.3 — Inégalité triangulaire
Soit $(z,z') \in \mathbb{C}^2$

$$\left|z+z'\right| \leqslant |z| + \left|z'\right| \quad \text{et} \quad \left||z| - \left|z'\right|\right| \leqslant \left|z-z'\right|$$

Corollaire 2.4 — *Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$:* $|c-a| \leqslant |b-a| + |c-b|$

Théorème & Définition 2.5 — Coordonnées polaires
Soit $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$, avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Il existe un couple (ρ,θ) de réels tels que

$$\rho \in \mathbb{R}_+, \quad \theta \in \mathbb{R}, \qquad x = \rho\cos\theta \quad \text{et} \quad y = \rho\sin\theta$$

- *Le réel ρ est unique : $\rho^2 = x^2+y^2$. On retrouve le module de z.*
- *Si $z = 0$ alors θ est quelconque dans $\mathbb{R}$.*
- *Si $z \neq 0$ alors θ est défini à 2π près. Chaque valeur possible de θ est un **argument** de z. L'unique réel $\theta_0 \in \left]-\pi\,;\,\pi\right]$ vérifiant la relation précédente s'appelle l'**argument principal** de z.*

Définition 2.6 — Notation exponentielle
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On note

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \overset{\text{déf.}}{=} \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha$$

Propriété 2.7 — Relation fondamentale

$$\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$$

et donc $\quad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}} \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha-\beta)} = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}} \qquad \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\alpha} \quad (n \in \mathbb{Z})$

Théorème 2.8 — Notation exponentielle
Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Il existe un couple $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ tel que

$$z = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Propriété 2.9 — Cas d'égalité
Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, de notations exponentielles $z = \rho e^{i\alpha}$ et $z' = \rho' e^{i\beta}$

$$z = z' \iff \rho = \rho' \quad \text{et} \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ \alpha = \beta + 2k\pi$$

Définition 2.10 — Argument d'un nombre complexe
Soit $z \in \mathbb{C}^*$, $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $z = r e^{i\theta}$.
*Tout nombre réel θ vérifiant la relation précédente est **un argument** de z.*

Propriété 2.11 — *Soit $z \in \mathbb{C}$, θ et θ' deux arguments de z. Alors*

$$\exists k \in \mathbb{Z}, \qquad \theta' = \theta + 2k\pi$$

Propriété 2.12 — Propriété de l'argument
Soit $(z, z') \in (\mathbb{C}^*)^2$.
- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \quad [2\pi]$
- $\arg(az) = \arg(z) \quad [2\pi]$ *si $a \in \mathbb{R}_+^*$*
- $\arg(az) = \pi + \arg(z) \quad [2\pi]$ *si $a \in \mathbb{R}_-^*$*
- $\arg(z^n) = n\arg(z) \quad [2\pi]$
- $\arg(1/z) = -\arg(z) \quad [2\pi]$
- $\arg(z/z') = \arg(z) - \arg(z') \quad [2\pi]$
- $\arg(\overline{z}) = -\arg(z) \quad [2\pi]$

III — Applications des nombres complexes

Définition 3.1 — Exponentielle d'un nombre complexe
Soit $z \in \mathbb{C}$. On note $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}$.
On définit l'exponentielle de z par

$$\exp(z) \overset{\text{déf.}}{=} \exp(x)\, e^{iy} = e^x\,(\cos(y) + i\sin(y))$$

Propriété 3.2 — *Soit z et z' deux complexes. On a*

$$\exp(z + z') = \exp(z)\ \exp(z')$$

Propriété 3.3 — *Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Par définition $\cos\theta = \mathrm{Re}(e^{i\theta})$ et $\sin\theta = \mathrm{Im}(e^{i\theta})$*

Proposition 3.4 — Formules d'Euler
Soit $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Proposition 3.5 — Formules de Moivre
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a

$$e^{in\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

ou de manière équivalente

$$\cos(n\theta) = \mathrm{Re}\Big[\,(\cos\theta + i\sin\theta)^n\,\Big]$$

$$\sin(n\theta) = \mathrm{Im}\left[\,(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n\,\right]$$