Nombres complexes

I — Définition de $\mathbb{C}$ – Écriture algébrique

Définition 1.1 — Nombres complexes
*On appelle **ensemble des nombres complexes** et on note $\mathbb{C}$ l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des deux opérations suivantes*

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \ \forall (x',y')\in\mathbb{R}^2,$$

addition $\qquad (x,y)+(x',y') \overset{\text{déf.}}{=} (xx',yy')$

multiplication $\qquad (x,y)\times(x',y') \overset{\text{déf.}}{=} (xx'-yy',xy'+x'y)$

Définition 1.2 — Partie réelle, partie imaginaire
Soit z un nombre complexe. Il existe un unique couple (x,y) de réels tels que $z=x+\mathrm{i}y$.

*Le réel x est la **partie réelle** de z notée $\mathrm{Re}(z)$ et y est sa **partie imaginaire**, notée $\mathrm{Im}(z)$.*

*Si $\mathrm{Re}(z)=0$, on dit que z est un **imaginaire pur** et si $\mathrm{Im}(z)=0$ on dit que z est un **réel**.*

On identifie le sous-ensemble $\{(x,0)\ \text{ avec }\ x\in\mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^2$ avec $\mathbb{R}$. L'ensemble des imaginaires purs est noté $\mathrm{i}\mathbb{R}$.

Propriété 1.3 — Propriété des parties réelles et imaginaires
Soit $(z,z')\in\mathbb{C}^2$

$$\mathrm{Re}(z+z')=\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Re}(z') \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(z+z')=\mathrm{Im}(z)+\mathrm{Im}(z')$$

Si $\lambda\in\mathbb{R}$ alors

$$\mathrm{Re}(\lambda z)=\lambda\,\mathrm{Re}(z) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(\lambda z)=\lambda\,\mathrm{Im}(z)$$

Théorème 1.4 — Cas d'égalité
Soit $(x,x',y,y')\in\mathbb{R}^4$:

$$x+\mathrm{i}\,y=x'+\mathrm{i}\,y' \iff x=x' \qquad \text{et} \qquad y=y'$$

Définition 1.5 — Conjugué d'un complexe
Soit $z=x+\mathrm{i}y\in\mathbb{C}$, avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

On appelle conjugué *de z et on note $\overline{z}$ le complexe $\overline{z}\overset{\text{déf.}}{=}x-\mathrm{i}\,y$.*

Propriété 1.6 — Conjugaison et opérations
Soit $(z,z')\in\mathbb{C}^2$

$$\overline{\overline{z}} = z \qquad \overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$$

$$\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'} \qquad \overline{z^n} = \overline{z}^n \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$$

Propriété 1.7 — Forme algébrique de l'inverse
Si $z \in \mathbb{C}^*$, $z = x + \mathrm{i}y$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{x}{x^2+y^2} - \mathrm{i}\frac{y}{x^2+y^2}$$

Propriété 1.8 — *Soit $z \in \mathbb{C}$:*

- $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ *et* $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$;
- *z est réel si et seulement si $z = \overline{z}$ et z est imaginaire pur si et seulement si $z = -\overline{z}$.*

II — Notation exponentielle

Théorème & Définition 2.1 — Coordonnées polaires
Soit $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Il existe un couple (ρ, θ) de réels tels que

$$\rho \in \mathbb{R}_+, \quad \theta \in \mathbb{R}, \qquad x = \rho\cos\theta \qquad \text{et} \qquad y = \rho\sin\theta$$

- *Le réel ρ est unique : $\rho^2 = x^2 + y^2$. C'est* le ***module*** *de z.*
- *Si $z = 0$ alors θ est quelconque dans $\mathbb{R}$.*
- *Si $z \neq 0$ alors θ est défini à 2π près. Chaque valeur possible de θ est* un ***argument*** *de z. L'unique réel $\theta_0 \in]-\pi\,;\,\pi]$ vérifiant la relation précédente s'appelle* l'***argument principal*** *de z. L'ensemble des arguments de z est*

$$\{\theta_0 + 2k\pi, \ \text{avec} \ k \in \mathbb{Z}\}$$

Théorème 2.2 — Notation exponentielle

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Il existe un couple $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ tel que

$$z = \rho e^{i\theta} \overset{\text{déf.}}{=} \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

**Propriété 2.3 — ** *D'après ce qui précède, on a la relation fondamentale*

$$\boxed{e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}\, e^{i\beta}}$$

et donc

$$e^{-i\alpha} = \frac{1}{e^{i\alpha}} \qquad e^{i(\alpha-\beta)} = \frac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}}$$

$$\left(e^{i\alpha}\right)^n = e^{in\alpha} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

Propriété 2.4 — Cas d'égalité

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, de notations exponentielles $z = \rho e^{i\alpha}$ et $z' = \rho' e^{i\beta}$

$$z = z' \iff \rho = \rho' \quad \text{et} \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ \alpha = \beta + 2k\pi$$

Propriété 2.5 — Propriétés du module

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$:

$$\left|zz'\right| = |z|\left|z'\right| \qquad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

$$|z| = 0 \iff z = 0 \qquad |z| = |\overline{z}|$$

$$|\mathrm{Re}\,(z)| \leqslant |z| \qquad |\mathrm{Im}\,(z)| \leqslant |z|$$

Théorème 2.6 — Inégalité triangulaire

Si z et z' sont deux complexes, alors

$$\left|z+z'\right| \leqslant |z|+\left|z'\right| \qquad \textit{et} \qquad \left||z|-\left|z'\right|\right| \leqslant \left|z-z'\right|$$

Corollaire 2.7 — *Soit* $(a,b,c)\in\mathbb{C}^3$ *:* $\quad |c-a| \leqslant |b-a|+|c-b|$

Propriété 2.8 — *Soit* $(z,z')\in(\mathbb{C}^*)^2$.

On note parfois $\arg(z)$ *un argument de* z*. Dans ce cas*

- $\arg(zz') = \arg(z)+\arg(z') \quad [2\pi]$
- $\arg(az) = \arg(z) \quad [2\pi]$ *si* $a\in\mathbb{R}_+^*$
- $\arg(az) = \pi+\arg(z) \quad [2\pi]$ *si* $a\in\mathbb{R}_-^*$
- $\arg(z^n) = n\arg(z) \quad [2\pi]$
- $\arg(1/z) = -\arg(z) \quad [2\pi]$
- $\arg(z/z') = \arg(z)-\arg(z') \quad [2\pi]$
- $\arg(\overline{z}) = -\arg(z) \quad [2\pi]$

III — Applications des nombres complexes

Définition 3.1 — Exponentielle complexe

Soit $z\in\mathbb{C}$*. On note* $z=x+\mathrm{i}y$ *avec* $(x,y)\in\mathbb{R}$*.*

On définit l'exponentielle de z par

$$\exp(z) \overset{\text{déf.}}{=} \exp(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x\,(\cos(y)+\mathrm{i}\sin(y))$$

Propriété 3.2 — *Soit z et z' deux complexes. On a*

$$\exp(z+z') = \exp(z)\ \exp(z')$$

Propriété 3.3 — *Soit* $\theta\in\mathbb{R}$*. Par définition* $\cos\theta \overset{\text{déf.}}{=} \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ *et* $\sin\theta \overset{\text{déf.}}{=} \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$

Proposition 3.4 — Formules d'Euler

Soit $\theta\in\mathbb{R}$*,*

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}$$

Proposition 3.5 — Formules de Moivre

Soit $\theta\in\mathbb{R}$*. On a*

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = (\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos(n\theta)+\mathrm{i}\sin(n\theta)$$

ou de manière équivalente

$$\cos(n\theta) = \operatorname{Re}\Big[\,(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n\,\Big]$$
$$\sin(n\theta) = \operatorname{Im}\Big[\,(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n\,\Big]$$