Comparaison de fonction

I — Négligeabilité

Définition 1.1 — *On dit que f est négligeable devant g au voisinage de x_0 si et seulement si* $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$.
Dans ces conditions, on note « $f = o(g)$ au voisinage de x_0 », ou bien $f \underset{x_0}{=} \mathrm{o}(g)$, ou simplement (lorsque le contexte est clair) $f = \mathrm{o}(g)$.

Propriété 1.2 — Prépondérants classiques en $+\infty$

$$\alpha < \beta \iff x^\alpha = \mathrm{o}(x^\beta) \qquad \alpha > 0 \implies \ln(x) = \mathrm{o}(x^\alpha)$$
$$\alpha > 0 \implies x^\alpha = \mathrm{o}(\mathrm{e}^x) \qquad \alpha > 0 \implies \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{o}(1/x^\alpha)$$

Propriété 1.3 — Prépondérants classiques en 0

$$\alpha > \beta \iff x^\alpha = \mathrm{o}(x^\beta) \qquad \alpha > 0 \implies ln(x) = \mathrm{o}(1/x^\alpha)$$

Propriété 1.4 — Calcul avec des o

- *(transitivité) si $f = \mathrm{o}(g)$ et $g = \mathrm{o}(h)$ alors $f = \mathrm{o}(h)$;*
- *si $f_1 = \mathrm{o}(g)$ et $f_2 = \mathrm{o}(g)$ alors $f_1 + f_2 = \mathrm{o}(g)$;*
- *si $f = \mathrm{o}(g)$ et si $\alpha \in \mathbb{R}^*$ alors $\alpha f = \mathrm{o}(g)$;*
- *si $f_1 = \mathrm{o}(g_2)$ et $f_2 = \mathrm{o}(g_2)$ alors $f_1 f_2 = \mathrm{o}(g_1 g_2)$.*

II — Équivalence

Définition 2.1 — *On dit que f et g sont équivalentes au voisinage de x_0 si et seulement si $f(x)/g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 1$.*
Dans ces conditions, on note « $f \sim g$ au voisinage de x_0 », ou bien $f \underset{x_0}{\sim} g$ ou plus simplement (lorsque le contexte est clair) $f \sim g$.

Propriété 2.2 — *Au voisinage de x_0, $f = g + \mathrm{o}(g) \iff f \sim g$.*

Proposition 2.3 — Calcul avec des équivalents
Au voisinage d'un point x_0 :

1) *si $f \sim g$ et si $g \sim h$ alors $f \sim h$;*
2) *si $f_1 \sim g_1$ et si $f_2 \sim g_2$ alors $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$;*
3) *si $f \sim g$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $f^\alpha \sim g^\alpha$* (sous réserve d'existence)*;*
4) *si $f \sim g$ et si g est de signe constant au voisinage de x_0 alors f et g sont de même signe au voisinage de x_0.*

Proposition 2.4 — *Si $f \sim g$ et si $g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} l$ alors $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} l$ (la limite l peut être infinie).*

Théorème 2.5 — Approximation affine d'une fonction
Si f est dérivable en a et si $f'(a) \neq 0$, alors

$$f(x) - f(a) \sim af'(a)(x-a)$$
$$\iff \quad f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \mathrm{o}(x-a)$$