

Comparaison de fonction

I — Négligeabilité

Définition 1.1 — On dit que f est négligeable devant g au voisinage de x_0 si et seulement si $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$.

Dans ces conditions, on note « $f = o(g)$ au voisinage de x_0 », ou bien $f = o_{x_0}(g)$, ou simplement (lorsque le contexte est clair) $f = o(g)$.

Propriété 1.2 — Prépondérants classiques en $+\infty$

$$\begin{aligned} \alpha < \beta &\iff x^\alpha = o(x^\beta) & \alpha > 0 &\implies \ln(x) = o(x^\alpha) \\ \alpha > 0 &\implies x^\alpha = o(e^x) & \alpha > 0 &\implies e^{-x} = o(1/x^\alpha) \end{aligned}$$

Propriété 1.3 — Prépondérants classiques en 0

$$\alpha > \beta \iff x^\alpha = o(x^\beta) \quad \alpha > 0 \implies \ln(x) = o(1/x^\alpha)$$

Propriété 1.4 — Calcul avec des o

- (transitivité) si $f = o(g)$ et $g = o(h)$ alors $f = o(h)$;
- si $f_1 = o(g)$ et $f_2 = o(g)$ alors $f_1 + f_2 = o(g)$;
- si $f = o(g)$ et si $\alpha \in \mathbb{R}^*$ alors $\alpha f = o(g)$;

- si $f_1 = o(g_1)$ et $f_2 = o(g_2)$ alors $f_1 f_2 = o(g_1 g_2)$.

II — Équivalence

Définition 2.1 — On dit que f et g sont équivalentes au voisinage de x_0 si et seulement si $f(x)/g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1$.

Dans ces conditions, on note « $f \sim g$ au voisinage de x_0 », ou bien $f \sim_{x_0} g$ ou plus simplement (lorsque le contexte est clair) $f \sim g$.

Propriété 2.2 — Au voisinage de x_0 , $f = g + o(g) \iff f \sim g$.

Proposition 2.3 — Calcul avec des équivalents

Au voisinage d'un point x_0 :

- 1) si $f \sim g$ et si $g \sim h$ alors $f \sim h$;
- 2) si $f_1 \sim g_1$ et si $f_2 \sim g_2$ alors $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$;
- 3) si $f \sim g$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $f^\alpha \sim g^\alpha$ (sous réserve d'existence);
- 4) si $f \sim g$ et si g est de signe constant au voisinage de x_0 alors f et g sont de même signe au voisinage de x_0 .

Proposition 2.4 — Si $f \sim g$ et si $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1$ alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1$ (la limite 1 peut être infinie).

Théorème 2.5 — Approximation affine d'une fonction

Si f est dérivable en a et si $f'(a) \neq 0$, alors

$$f(x) - f(a) \sim af'(a)(x - a)$$

$$\iff f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + o(x - a)$$

