

# Applications

---

**Notations du chapitre** — Dans tout ce chapitre,  $E$  et  $F$  sont deux ensembles non vides.

---

## I — Définition

### Définition 1.1 — Application de $E$ dans $F$

On appelle **application** la donnée

- de deux ensembles non vides  $E$  et  $F$ ;
- d'un sous-ensemble  $\Gamma$  de  $E \times F$  telle que

$$\forall x \in E, \quad \exists ! y \in F, \quad (x, y) \in \Gamma.$$

**Notation** L'ensemble des applications de  $E$  dans  $F$  est souvent noté  $F^E$ , ou encore  $\mathcal{F}(E, F)$ .

## II — Changement des ensembles de départ et d'arrivée

### Définition 2.1 — Application induite

Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles non vides et  $f : E \rightarrow F$ .

Si  $B$  est un sous-ensemble de  $F$  qui contient  $f(E)$ , alors  $f$  définit naturellement une application de  $E$  dans  $B$

$$\begin{array}{l} : E \rightarrow B \\ | \\ x \mapsto f(x) \end{array}$$

Cette application, qui est différente de  $f$ , est dite **induite** par  $f$  sur  $B$ .

### Définition 2.2 — Restriction

Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles non vides,  $f : E \rightarrow F$  et  $A$  un sous-ensemble de  $E$ .

L'application de  $A$  dans  $F$  définie par

$$\begin{array}{l} : A \rightarrow F \\ | \\ x \mapsto f(x) \end{array}$$

est la **restriction** de  $f$  à  $A$ . On la note  $f_A$ .

**Définition 2.3 — Prolongement**

Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles non vides,  $f : E \longrightarrow F$  et  $A$  un sous-ensemble de  $E$ .

Toute fonction  $g$  définie de  $E$  dans  $F$ , telle que  $g_A = f$  est un **prolongement** de  $f$  sur  $E$ .

**III — Images, antécédents****Définition 3.1 — Image d'un élément de  $E$ , antécédent d'un élément de  $F$** 

Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles,  $f : E \longrightarrow F$ ,  $x \in E$  et  $y \in F$ .

Si  $y = f(x)$ , on dit que  $y$  est l'**image** de  $x$  et que  $x$  est un **antécédent** de  $y$ .

**Définition 3.2 — Égalité entre deux applications**

Deux applications  $f$  et  $g$  sont égales si et seulement si elles ont même ensemble de départ  $E$ , même ensemble d'arrivée  $F$  et si

$$\forall x \in E, \quad f(x) = g(x)$$

**Définition 3.3 — Image d'un sous-ensemble de  $E$** 

Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles non vides,  $f$  une application de  $E$  dans  $F$  et  $A$  un sous-ensemble de  $E$ .

On appelle **image** de  $A$  et on note  $f \langle A \rangle$  l'ensemble

$$f \langle A \rangle = \{f(x) \text{ avec } x \in A\}$$

(c'est un sous-ensemble de  $F$ ).

**Définition 3.4 — Image réciproque d'un sous-ensemble de  $F$** 

Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles non vides,  $f : E \longrightarrow F$ ,  $B$  un sous-ensemble de  $F$ .

On appelle **image réciproque** de  $B$  et on note  $f^{-1} \langle B \rangle$  l'ensemble

$$f^{-1} \langle B \rangle = \{x \in E \text{ tel que } f(x) \in B\}$$

(c'est un sous-ensemble de  $E$ ).

**IV — Composée****Définition 4.1 — Composée de deux fonctions**

Soit  $E$ ,  $F$  et  $G$  trois ensembles non vides,  $f : E \longrightarrow F$  et  $g : F \longrightarrow G$  deux fonctions.

On appelle **composée de  $f$  et de  $g$**  la fonction  $g \circ f$  définie par

$$g \circ f : \begin{cases} E \longrightarrow G \\ x \longmapsto g(f(x)) \end{cases}$$

**Propriété 4.2 — Associativité de la composée**

Soit  $E_1, E_2, E_3$  et  $E_4$  quatre ensembles non vides et  $f_1 : E_1 \longrightarrow E_2, f_2 : E_2 \longrightarrow E_3, f_3 : E_3 \longrightarrow E_4$ .

La composée de fonctions est associative :

$$f_3 \circ (f_2 \circ f_1) = (f_3 \circ f_2) \circ f_1 = f_3 \circ f_2 \circ f_1$$

**Propriété 4.3 — Élément neutre pour la composition**

Soit  $E$  un ensemble non vide.

La composée de fonctions de  $E$  dans  $E$  est une opération interne de  $E^E$  qui admet un élément neutre, la fonction  $Id_E$  définie par

$$Id_E : \begin{cases} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto x \end{cases}$$

Ainsi  $\forall f \in E^E, \quad f \circ Id_E = Id_E \circ f = f$

**V — Injection, surjection, bijection**

**Définition 5.1 — Injectivité, surjectivité.**

Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles non vides et  $f : E \longrightarrow F$ .

1) On dit que  $f$  est **injective** si deux éléments distincts de  $E$  n'ont pas la même image

$$\forall x \in E, \quad \forall x' \in E, \quad x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$$

ou encore, par contraposée,

$$\forall x \in E, \quad \forall x' \in E, \quad f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

2) On dit que  $f$  est **surjective** si tous les éléments de  $F$  ont un antécédent dans  $E$

$$\forall y \in F, \quad \exists x \in E, \quad f(x) = y$$

ce qui s'écrit aussi  $f \langle E \rangle = F$

**Définition 5.2 — Bijection de  $E$  dans  $F$**

Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles non vides et  $f : E \longrightarrow F$  une application de  $E$  dans  $F$ .

L'application  $f$  est **bijective** si et seulement si il existe une fonction  $g : F \longrightarrow E$  telle que  $g \circ f = Id_E$  et  $f \circ g = Id_F$ . Dans ce cas cette application  $g$  est est **bijective**. On l'appelle la **bijection réciproque** de  $f$  et on la note  $f^{-1}$ .

**Théorème 5.3 — Caractérisation de la bijection**

Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles non vides et  $f : E \longrightarrow F$ .

L'application  $f$  est **bijective** si et seulement si elle est à la fois injective et surjective

$$\forall y \in F, \quad \exists! x \in E, \quad f(x) = y$$

**Propriété 5.4 — Composée de deux bijections**

La composée de deux bijections  $f_1$  et  $f_2$  est une bijection, et de plus  $(f_2 \circ f_1)^{-1} = f_1^{-1} \circ f_2^{-1}$ .

**Théorème 5.5 — Cas des fonctions numériques**

Soit  $f$  est une fonction strictement monotone sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

Alors  $f$  est injective. Elle réalise donc une bijection de  $I$  dans  $f \langle I \rangle$ . Sa bijection réciproque  $f^{-1}$  est strictement monotone et de même monotonie que  $f$ .

Leurs graphes dans un repère orthonormé se déduisent l'un de l'autre par la symétrie orthogonale d'axe  $y = x$ .

