Applications

Notations du chapitre — *Dans tout ce chapitre, E et F sont deux ensembles non vides.*

I — Définition

Définition 1.1 — Application de E dans F

*On appelle **application** la donnée*

- *de deux ensembles non vides E et F ;*
- *d'un sous-ensemble Γ de $E \times F$ telle que*

$$\forall x \in E, \quad \exists! y \in F, \qquad (x, y) \in \Gamma.$$

Notation L'ensemble des applications de E dans F est souvent noté F^E, ou encore $\mathscr{F}(E, F)$.

II — Changement des ensembles de départ et d'arrivée

Définition 2.1 — Application induite

Soit E et F deux ensembles non vides et $f : E \longrightarrow F$.

Si B est un sous-ensemble de F qui contient $f\langle E\rangle$, alors f définit naturellement une application de E dans B

$$: \left| \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$

*Cette application, qui est différente de f, est dite **induite** par f sur B.*

Définition 2.2 — Restriction

Soit E et F deux ensembles non vides, $f : E \longrightarrow F$ et A un sous-ensemble de E.

L'application de A dans F définie par

$$: \left| \begin{array}{rcl} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$

*est la **restriction** de f à A. On la note f_A.*

Définition 2.3 — Prolongement

Soit E et F deux ensembles non vides, $f : E \longrightarrow F$ et A un sous-ensemble de E.

Toute fonction g définie de E dans F, telle que $g_A = f$ est un ***prolongement*** *de f sur E.*

III — Images, antécédents

Définition 3.1 — Image d'un élément de E, antécédent d'un élément de F

Soit E et F deux ensembles, $f : E \longrightarrow F$, $x \in E$ et $y \in F$.

*Si $y = f(x)$, on dit que y est l'****image de x*** *et que x est un* ***antécédent*** *de y.*

Définition 3.2 — Égalité entre deux applications

Deux applications f et g sont égales si et seulement si elles ont même ensemble de départ E, même ensemble d'arrivée F et si

$$\forall x \in E, \qquad f(x) = g(x)$$

Définition 3.3 — Image d'un sous-ensemble de E

Soit E et F deux ensembles non vides, f une application de E dans F et A un sous-ensemble de E.

On appelle ***image*** *de A et on note $f\langle A\rangle$ l'ensemble*

$$f\langle A\rangle = \{f(x) \ \ \textit{avec} \ \ x \in A\}$$

(c'est un sous-ensemble de F).

Définition 3.4 — Image réciproque d'un sous-ensemble de F

Soit E et F deux ensembles non vides, $f : E \longrightarrow F$, B un sous-ensemble de F.

On appelle ***image réciproque*** *de B et on note $f^{-1}\langle B\rangle$ l'ensemble*

$$f^{-1}\langle B\rangle = \{x \in E \ \ \textit{tel que} \ \ f(x) \in B\}$$

(c'est un sous-ensemble de E).

IV — Composée

Définition 4.1 — Composée de deux fonctions

Soit E, F et G trois ensembles non vides, $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux fonctions.

On appelle ***composée de f et de g*** *la fonction $g \circ f$ définie par*

$$g \circ f \ : \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow G \\ x \longmapsto g(f(x)) \end{array} \right.$$

Propriété 4.2 — Associativité de la composée

Soit E_1, E_2, E_3 et E_4 quatre ensembles non vides et $f_1 : E_1 \longrightarrow E_2$, $f_2 : E_2 \longrightarrow E_3$, $f_3 : E_3 \longrightarrow E_4$.

La composée de fonctions est associative :

$$f_3 \circ (f_2 \circ f_1) = (f_3 \circ f_2) \circ f_1 = f_3 \circ f_2 \circ f_1$$

Propriété 4.3 — Élément neutre pour la composition

Soit E un ensemble non vide.

La composée de fonctions de E dans E est une opération interne de E^E qui admet un élément neutre, la fonction Id_E définie par

$$Id_E \ : \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto x \end{array} \right.$$

Ainsi $$\forall f \in E^E, \qquad f \circ Id_E = Id_E \circ f = f$$

V — Injection, surjection, bijection

Définition 5.1 — Injectivité, surjectivité.

Soit E et F deux ensembles non vides et $f \ : \ E \longrightarrow F$.

1) *On dit que f est* ***injective*** *si deux éléments distincts de E n'ont pas la même image*

$$\forall x \in E, \quad \forall x' \in E, \qquad x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$$

ou encore, par contraposée,

$$\forall x \in E, \quad \forall x' \in E, \qquad f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

2) *On dit que f est* ***surjective*** *si tous les éléments de F ont un antécédent dans E*

$$\forall y \in F, \quad \exists x \in E, \qquad f(x) = y$$

ce qui s'écrit aussi $f\langle E\rangle = F$

Définition 5.2 — Bijection de E dans F

Soit E et F deux ensembles non vides et $f \ : \ E \longrightarrow F$ une application de E dans F.

L'application f est ***bijective*** *si et seulement si il existe une fonction $g \ : \ F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f g = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$. Dans ce cas cette application g est est bijective. On l'appelle la* ***bijection réciproque*** *de f et on la note f^{-1}.*

Théorème 5.3 — Caractérisation de la bijection

Soit E et F deux ensembles non vides et $f \ : \ E \longrightarrow F$.

L'application f est ***bijective*** *si et seulement si elle est à la fois injective et surjective*

$$\forall y \in F, \quad \exists! x \in E, \qquad f(x) = y$$

Propriété 5.4 — Composée de deux bijections

La composée de deux bijections f_1 et f_2 est une bijection, et de plus $(f_2 \circ f_1)^{-1} = f_1^{-1} \circ f_2^{-1}$.

Théorème 5.5 — Cas des fonctions numériques

Soit f est une fonction strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Alors f est injective. Elle réalise donc une bijection de I dans $f\langle I\rangle$. Sa bijection réciproque f^{-1} est strictement monotone et de même monotonie que f.

Leurs graphes dans un repère orthonormé se déduisent l'un de l'autre par la symétrie orthogonale d'axe $y = x$.