

Applications

Notations du chapitre — Dans tout ce chapitre, E et F sont deux ensembles non vides.

I — Définition

Définition 1.1 — Application de E dans F

On appelle **application** la donnée

- de deux ensembles non vides E et F ;
- d'un sous-ensemble Γ de $E \times F$ telle que

$$\forall x \in E, \quad \exists ! y \in F, \quad (x, y) \in \Gamma.$$

Notation L'ensemble des applications de E dans F est souvent noté F^E , ou encore $\mathcal{F}(E, F)$.

Définition 1.2 — Égalité entre deux applications

Deux applications f et g sont égales si et seulement si elles ont même ensemble de départ E , même ensemble d'arrivée F et si

$$\forall x \in E, \quad f(x) = g(x)$$

II — Image, antécédent

Définition 2.1 — Image d'un élément de E , antécédent d'un élément de F

Soit E et F deux ensembles, $f : E \rightarrow F$, $x \in E$ et $y \in F$.

Si $y = f(x)$, on dit que **y est l'image de x** et que **x est un antécédent de y** .

Définition 2.2 — Image d'un sous-ensemble de E

Soit E et F deux ensembles non vides, f une application de E dans F et A un sous-ensemble de E .

On appelle **image** de A et on note $f \langle A \rangle$ l'ensemble

$$f \langle A \rangle = \{f(x) \text{ avec } x \in A\}$$

(c'est un sous-ensemble de F).

Définition 2.3 — Image réciproque d'un sous-ensemble de F

Soit E et F deux ensembles non vides, $f : E \rightarrow F$, B un sous-ensemble de F .

On appelle **image réciproque** de B et on note $f^{-1} \langle B \rangle$ l'ensemble

$$f^{-1} \langle B \rangle = \{x \in E \text{ tel que } f(x) \in B\}$$

(c'est un sous-ensemble de E).

III — Injection, surjection, bijection

Définition 3.1 — Injectivité

Soit E et F deux ensembles non vides et $f : E \longrightarrow F$.

On dit que f est **injective** si deux éléments distincts de E n'ont pas la même image

$$\forall x \in E, \quad \forall x' \in E, \quad x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')$$

ou encore, par contraposée,

$$\forall x \in E, \quad \forall x' \in E, \quad f(x) = f(x') \implies x = x'$$

On dit aussi que f est une **injection** ou que f est une **fonction injective**.

L'injectivité est une propriété de la fonction et de l'ensemble de départ, mais pas de l'ensemble d'arrivée.

Définition 3.2 — Surjectivité

Soit E et F deux ensembles non vides et $f : E \longrightarrow F$.

On dit que f est **surjective** si tous les éléments de F ont un antécédent dans E

$$\forall y \in F, \quad \exists x \in E, \quad f(x) = y$$

ce qui s'écrit aussi $f \langle E \rangle = F$

On dit aussi que f est une **surjection** ou que f est une **fonction surjective**.

La surjectivité est une propriété de la fonction, de l'ensemble de départ et de l'ensemble d'arrivée.

Définition 3.3 — Bijection de E dans F

Soit E et F deux ensembles non vides et $f : E \longrightarrow F$.

L'application f est **bijective** si et seulement si elle est à la fois injective et surjective

$$\forall y \in F, \quad \exists! x \in E, \quad f(x) = y$$

IV — Ensembles de départ et d'arrivée

Définition 4.1 — Application induite

Soit E et F deux ensembles non vides et $f : E \longrightarrow F$ et B est un sous-ensemble de F qui contient $f \langle E \rangle$. Alors f définit naturellement une application de E dans B

$$\begin{array}{l} : E \longrightarrow B \\ x \longmapsto f(x) \end{array}$$

Cette application, qui est différente de f , est dite **induite** par f sur B .

Définition 4.2 — Restriction

Soit E et F deux ensembles non vides, $f : E \longrightarrow F$, A un sous-ensemble de E .

L'application de A dans F définie par

$$\begin{array}{l} : A \longrightarrow F \\ x \longmapsto f(x) \end{array}$$

est la **restriction** de f à A . On la note f_A .

Définition 4.3 — Prolongement

Soit E et F deux ensembles non vides, $f : E \longrightarrow F$ et A un sous-ensemble de E .
Toute fonction g définie de E dans F , telle que $g_A = f$ est un **prolongement** de f sur E .

V — Composée

Définition 5.1 — Composée de deux fonctions

Soit E, F et G trois ensembles non vides, $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux fonctions.
On appelle **composée de f et de g** la fonction $g \circ f$ définie par

$$g \circ f : \begin{cases} E \longrightarrow G \\ x \longmapsto g(f(x)) \end{cases}$$

Propriété 5.2 — Associativité de la composée

Soit E_1, E_2, E_3 et E_4 quatre ensembles non vides et $f_1 : E_1 \longrightarrow E_2, f_2 : E_2 \longrightarrow E_3,$
 $f_3 : E_3 \longrightarrow E_4$.

La composée de fonctions est associative :

$$f_3 \circ (f_2 \circ f_1) = (f_3 \circ f_2) \circ f_1 = f_3 \circ f_2 \circ f_1$$

Propriété 5.3 — Élément neutre pour la composition

Soit E un ensemble non vide.

La composée de fonctions de E dans E est une opération interne de E^E qui admet un élément neutre, la fonction Id_E définie par

$$Id_E : \begin{cases} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto x \end{cases}$$

Ainsi $\forall f \in E^E, \quad f \circ Id_E = Id_E \circ f = f$

Théorème 5.4 — Caractérisation de la bijection

Soit E et F deux ensembles non vides et $f : E \longrightarrow F$ une application de E dans F .
L'application f est **bijective** si et seulement si il existe une fonction $g : F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$. Dans ce cas cette application g est est bijective. On l'appelle la **bijection réciproque** de f et on la note f^{-1} .

Propriété 5.5 — Composée de deux bijections

La composée de deux bijections f_1 et f_2 est une bijection, et de plus $(f_2 \circ f_1)^{-1} = f_1^{-1} \circ f_2^{-1}$.

Théorème 5.6 — Cas des fonctions numériques

Soit f est une fonction strictement monotone sur un intervalle I de \mathbb{R} .
Alors f est injective. Elle réalise donc une bijection de I dans $f(I)$. Sa bijection réciproque f^{-1} est strictement monotone et de même monotonie que f .
Leurs graphes dans un repère orthonormé se déduisent l'un de l'autre par la symétrie orthogonale d'axe $y = x$.

