

Applications linéaires

Notations du chapitre — Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} et E et F sont deux espaces vectoriels sur \mathbb{K} .

I — Définitions et opérations

Définition 1.1 — Une application f de E dans F est dite **linéaire** si et seulement si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

- 1) $\forall (u, v) \in E^2, \quad f(u + v) = f(u) + f(v);$
- 2) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall u \in E, \quad f(\lambda u) = \lambda f(u).$

Vocabulaire et notations

- Une application linéaire est parfois qualifiée de **morphisme** d'espaces vectoriels.
- Si les espaces de départ et d'arrivée sont indentiques ($F = E$) on parle d'**endomorphisme**.
- Si l'application est bijective, on parle d'**isomorphisme**.
- Enfin un endomorphisme bijectif est un **automorphisme**.

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$. L'ensemble des endomorphismes $\mathcal{L}(E)$, et celui des automorphismes $GL(E)$.

Propriété 1.2 — Soit f et g deux applications linéaires de E dans F et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors $f + g$ et αf sont deux applications linéaires de E dans F .

Théorème 1.3 — Linéarité de la bijection réciproque

Soit f une application linéaire bijective de E dans F .

La bijection réciproque f^{-1} de f est une applications linéaires de F dans E .

Propriété 1.4 — Composée d'applications linéaires

Soit E, F et G trois \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit f une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G .

Alors $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G .

Propriété 1.5 — Distributivité de la composition sur l'addition

Soit E, F et G trois \mathbb{K} -espace vectoriel.

- 1) Si f_1 et f_2 sont deux application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G alors

$$g \circ (f_1 + f_2) \circ g = g \circ f_1 + g \circ f_2$$

- 2) Si g_1 et g_2 sont deux application linéaire de F dans G et f une application linéaire de E dans F alors

$$(g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f$$

Notation puissance Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note

- $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$ (f composée n fois avec elle-même);
- et $f^0 = \text{Id}_E$ par convention.
- Si f est bijective, on note $f^{-n} = (f^{-1})^n$.

Les propriétés caractéristiques de la notation puissance sont vérifiées.

II — Noyau, image d'une application linéaire

Définition 2.1 — Noyau d'une application linéaire

Soit E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

L'ensemble des solutions de l'équation $f(u) = 0_F$, d'inconnue $u \in E$, s'appelle le **noyau de f** . On le note $\text{Ker } f$:

$$\text{Ker } f = \{u \in E \text{ tel que } f(u) = 0_F\}$$

Propriété 2.2 — $\text{Ker } f$ est un sous-espace vectoriel de E .

Théorème 2.3 — Injectivité et noyau

Soit E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

f est injective si et seulement si $\text{Ker } f = \{0_E\}$.

Théorème 2.4 — Image d'un espace vectoriel par une application linéaire

Soit f est une application linéaire de E dans F . Alors pour tout sev G de E , l'ensemble $f \langle G \rangle$ est un sous-espace vectoriel de F .

Définition 2.5 — Image d'une application linéaire

Soit E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

L'ensemble $f \langle E \rangle$ s'appelle l'image de f . On le note $\text{Im } f$.

Théorème 2.6 — Image et surjectivité

Soit E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

f est surjective si et seulement si $\text{Im } f = F$

III — Applications linéaires en dimension finie

Théorème 3.1 — Caractérisation d'une application linéaire

Soit E et F deux espaces vectoriels, E étant de dimension finie p .

Une application linéaire de E dans F est entièrement déterminée par l'image des vecteurs d'une base de E .

Propriété 3.2 — Soit E et F deux espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et (e_1, \dots, e_p) une base quelconque de E .

$(f(e_1), \dots, f(e_p))$ est une famille génératrice de $\text{Im } f$.

Attention, en toute généralité, ce n'est pas une base !

Définition 3.3 — Rang d'une application linéaire

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle **rang** de f la dimension de l'espace vectoriel $\text{Im } f$: $\text{rg } f \stackrel{\text{déf}}{=} \dim(\text{Im } f)$.

Théorème 3.4 — Théorème du rang

Soit E et F deux espaces vectoriels, E de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = \dim E.$$

Corollaire 3.5 — Soit f une application linéaire entre deux espace vectoriel E et F de dimensions finies.

- 1) f est injective si et seulement si $\text{rg } f = \dim E$;
 - 2) f est surjective si et seulement si $\text{rg } f = \dim F$;
 - 3) f est bijective si et seulement si $\text{rg } f = \dim E = \dim F$;
-

Corollaire 3.6 — Si F est de dimension finie et si $\dim F = \dim E$ alors on a l'équivalence

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective}$$

Propriété 3.7 — Soit E et F deux espaces vectoriels, E de dimension finie (resp. F de dimension finie) et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

S'il existe un isomorphisme entre E et F alors F est aussi de dimension finie (resp. E est aussi de dimension finie) et $\dim E = \dim F$.

IV — Matrice d'une application linéaire

Définition 4.1 — Matrice d'une application linéaire

Soit E et F deux espaces vectoriels, E et F de dimensions finies, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{C} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ une base de F . Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

On appelle **matrice de l'application linéaire** f dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{C} la matrice de la famille $(f(e_1), \dots, f(e_p))$ dans la base \mathcal{C} .

Dans le cas d'un endomorphisme, on convient de prendre la même base au départ et à l'arrivée. On note simplement $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f)$ dans ce cas.

Théorème 4.2 — Unicité de la matrice

Deux bases étant données, à une matrice correspond une unique application linéaire.

Corollaire 4.3 — Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Il existe une unique application linéaire f de \mathbb{K}^p dans \mathbb{K}^n dont M est la matrice dans la base canonique de \mathbb{K}^n .

Théorème 4.4 — Opérations et représentation matricielle

Soit E et F deux espaces vectoriels, E et F de dimensions finies, \mathcal{B} une base de E et \mathcal{C} une base de F .

- 1) $\text{mat}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(f + g) = \text{mat}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(f) + \text{mat}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(g)$;
- 2) pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $\text{mat}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\lambda f) = \lambda \text{mat}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(f)$.

Théorème 4.5 — Utilisation du produit matriciel – I

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et M la matrice représentant f dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{C} . Si u est un vecteur de u représenté par $U_{\mathcal{B}}$ dans la base \mathcal{B} alors $M \times U_{\mathcal{B}}$ représente $f(u)$ dans la base \mathcal{C} .

Théorème 4.6 — Utilisation du produit matriciel – II

Soit f et g deux endomorphismes représentés respectivement par M et N dans la base \mathcal{B} de E . Alors MN représente $f \circ g$ dans la base \mathcal{B} .

Théorème 4.7 — Utilisation du produit matriciel – III

Soit f un endomorphisme représenté par la matrice M dans la base \mathcal{B} .

L'endomorphisme f est bijectif si et seulement si M est inversible.

De plus, dans ce cas $M^{-1} = \text{mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1})$.

Théorème 4.8 — Matrice d'une application linéaire et rang

Soit f un endomorphisme représenté par la matrice M dans la base \mathcal{B} .

$$\text{rg } f = \text{rg } M$$