Applications linéaires

Notations du chapitre — *Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E et F sont deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.*

I — Définitions et opérations

Définition 1.1 — *Une application f de E dans F est dite* linéaire *si et seulement si elle vérifie les deux propriétés suivantes :*

1) $\forall (u,v) \in E^2, \qquad f(u+v) = f(u) + f(v)$;
2) $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall u \in E, \qquad f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

Vocabulaire et notations

- Une application linéaire est parfois qualifiée de **morphisme** d'espaces vectoriels.
- Si les espaces de départ et d'arrivée sont indentiques ($F = E$) on parle d'**endomorphisme**.
- Si l'application est bijective, on parle d'**isomorphisme**.
- Enfin un endomorphisme bijectif est un **automorphisme**.

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathscr{L}(E,F)$. L'ensemble des endomorphismes $\mathscr{L}(E)$, et celui des automorphismes $GL(E)$.

Propriété 1.2 — *Soit f et g deux applications linéaires de E dans F et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors $f+g$ et αf sont deux applications linéaires de E dans F.*

Théorème 1.3 — Linéarité de la bijection réciproque
Soit f une application linéaire bijective de E dans F.
La bijection réciproque f^{-1} de f est une applications linéaires de F dans E.

Propriété 1.4 — Composée d'applications linéaires
Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$–espace vectoriel. Soit f une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G.
Alors $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G.

Propriété 1.5 — Distributivité de la composition sur l'addition
Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$–espace vectoriel.

1) *Si f_1 et f_2 sont deux application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G alors*

$$g \circ (f_1 + f_2) \circ g = g \circ f_1 + g \circ f_2$$

2) *Si g_1 et g_2 sont deux application linéaire de F dans G et f une application linéaire de E dans F alors*

$$(g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f$$

Notation puissance Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note

- $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (f composée n fois avec elle-même) ;
- et $f^0 = \mathrm{Id}_E$ par convention.
- Si f est bijective, on note $f^{-n} = (f^{-1})^n$.

Les propriétés caractéristiques de la notation puissance sont vérifiées.

II — Noyau, image d'une application linéaire

Définition 2.1 — Noyau d'une application linéaire
Soit E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
*L'ensemble des solutions de l'équation $f(u) = 0_F$, d'inconnue $u \in E$, s'appelle le **noyau de f**. On le note $\operatorname{Ker} f$:*

$$\operatorname{Ker} f = \{u \in E \ \textit{ tel que } \ f(u) = 0_F\}$$

Propriété 2.2 — *$\operatorname{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Théorème 2.3 — Injectivité et noyau
Soit E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
f est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.

Théorème 2.4 — Image d'un espace vectoriel par une application linéaire
Soit f est une application linéaire de E dans F. Alors pour tout sev G de E, l'ensemble $f\langle G\rangle$ est un sous-espace vectoriel de F.

Définition 2.5 — Image d'une application linéaire
Soit E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
L'ensemble $f\langle E\rangle$ s'appelle l'image de f. On le note $\operatorname{Im} f$.

Théorème 2.6 — Image et surjectivité
Soit E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} f = F$

III — Applications linéaires en dimension finie

Théorème 3.1 — Caractérisation d'une application linéaire
Soit E et F deux espaces vectoriels, E étant de dimension finie p.
Une application linéaire de E dans F est entièrement déterminée par l'image des vecteurs d'une base de E.

Propriété 3.2 — *Soit E et F deux espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $(e_1, \ldots, e_p)$ une base quelconque de E.*
$(f(e_1), \ldots, f(e_p))$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$.

Attention, en toute généralité, ce n'est pas une base !

Définition 3.3 — Rang d'une application linéaire
*Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On appelle **rang** de f la dimension de l'espace vectoriel $\operatorname{Im} f$:*
$\operatorname{rg} f \overset{\text{déf.}}{=} \dim(\operatorname{Im} f))$.

Théorème 3.4 — Théorème du rang
Soit E et F deux espaces vectoriels, E de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E$.

Corollaire 3.5 — *Soit f une application linéaire entre deux espace vectoriel E et F de dimensions finies.*

1) *f est injective si et seulement si $\operatorname{rg} f = \dim E$;*
2) *f est surjective si et seulement si $\operatorname{rg} f = \dim F$;*
3) *f est bijective si et seulement si $\operatorname{rg} f = \dim E = \dim F$;*

Corollaire 3.6 — *Si F est de dimension finie et si* $\dim F = \dim E$ *alors on a l'équivalence*

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective}$$

Propriété 3.7 — *Soit E et F deux espaces vectoriels, E de dimension finie (resp. F de dimension finie) et $f \in \mathscr{L}(E,F)$.*
S'il existe un isomorphisme entre E et F alors F est aussi de dimension finie (resp. E est aussi de dimension finie) et $\dim E = \dim F$.

IV — Matrice d'une application linéaire

Définition 4.1 — Matrice d'une application linéaire
Soit E et F deux espaces vectoriels, E et F de dimensions finies, $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathscr{C} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ une base de F. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.
On appelle ***matrice de l'application linéaire*** *f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ la matrice de la famille $(f(e_1), \dots, f(e_p))$ dans la base $\mathscr{C}$.*

Dans le cas d'un endomorphisme, on convient de prendre *la même base* au départ et à l'arrivée. On note simplement $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f)$ dans ce cas.

Théorème 4.2 — Unicité de la matrice
Deux bases étant données, à une matrice correspond une unique application linéaire.

Corollaire 4.3 — *Soit $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Il existe une unique application linéaire f de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ dont M est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.*

Théorème 4.4 — Opérations et représentation matricielle
Soit E et F deux espaces vectoriels, E et F de dimensions finies, $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{C}$ une base de F.

1) $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}\mathscr{C}}(f+g) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}\mathscr{C}}(f) + \mathrm{mat}_{\mathscr{B}\mathscr{C}}(g)$;

2) pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}\mathscr{C}}(\lambda f) = \lambda\, \mathrm{mat}_{\mathscr{B}\mathscr{C}}(f)$.

Théorème 4.5 — Utilisation du produit matriciel – I
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et M la matrice représentant f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$. Si u est un vecteur de u représenté par $U_{\mathscr{B}}$ dans la base $\mathscr{B}$ alors $M \times U_{\mathscr{B}}$ représente $f(u)$ dans la base $\mathscr{C}$.

Théorème 4.6 — Utilisation du produit matriciel – II
Soit f et g deux endomorphismes représentés respectivement par M et N dans la base $\mathscr{B}$ de E. Alors MN représente $f \circ g$ dans la base $\mathscr{B}$.

Théorème 4.7 — Utilisation du produit matriciel – III
Soit f un endomorphisme représenté par la matrice M dans la base $\mathscr{B}$.
L'endorphisme f est bijectif si et seulement si M est inversible.
De plus, dans ce cas $M^{-1} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f^{-1})$.

Théorème 4.8 — Matrice d'une application linéaire et rang
Soit f un endomorphisme représenté par la matrice M dans la base $\mathscr{B}$.

$$\mathrm{rg}\, f = \mathrm{rg}\, M$$