Applications linéaires

Notations du chapitre — *Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E et F sont deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.*

I — Définitions et opérations

Définition 1.1 — *Une application f de E dans F est dite* linéaire *si et seulement si elle vérifie les deux propriétés suivantes :*

1) $\forall (u,v)\in E^2, \qquad f(u+v)=f(u)+f(v);$
2) $\forall \lambda\in\mathbb{K},\ \ \forall u\in E, \qquad f(\lambda u)=\lambda f(u).$

Vocabulaire et notations

- Une application linéaire est parfois qualifiée de **morphisme** d'espaces vectoriels.
- Si les espaces de départ et d'arrivée sont indentiques ($F=E$) on parle d'**endomorphisme**.
- Si l'application est bijective, on parle d'**isomorphisme**.
- Enfin un endomorphisme bijectif est un **automorphisme**.

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathscr{L}(E,F)$. L'ensemble des endomorphismes $\mathscr{L}(E)$, et celui des automorphismes $GL(E)$.

Propriété 1.2 — *Soit f et g deux applications linéaires de E dans F et $\alpha\in\mathbb{K}$. Alors $f+g$ et αf sont deux applications linéaires de E dans F.*

Théorème 1.3 — Linéarité de la bijection réciproque
Soit f une application linéaire bijective de E dans F.
La bijection réciproque f^{-1} de f est une applications linéaires de F dans E.

Propriété 1.4 — Composée d'applications linéaires
Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$–espace vectoriel. Soit f une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G.
Alors $g\circ f$ est une application linéaire de E dans G.

Propriété 1.5 — Distributivité de la composition sur l'addition
Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$–espace vectoriel.

1) *Si f_1 et f_2 sont deux application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G alors*
$$g\circ(f_1+f_2)\circ g = g\circ f_1 + g\circ f_2$$
2) *Si g_1 et g_2 sont deux application linéaire de F dans G et f une application linéaire de E dans F alors*
$$(g_1+g_2)\circ f = g_1\circ f + g_2\circ f$$

Notation puissance Soit $f\in\mathscr{L}(E)$ et $n\in\mathbb{N}^*$. On note
- $f^n = f\circ f\circ\cdots\circ f$ (f composée n fois avec elle-même) ;
- et $f^0=\mathrm{Id}_E$ par convention.
- Si f est bijective, on note $f^{-n}=(f^{-1})^n$.

Les propriétés caractéristiques de la notation puissance sont vérifiées.

II — Noyau, image d'une application linéaire

Définition 2.1 — Noyau d'une application linéaire
Soit E et F deux espaces vectoriels et $f\in\mathscr{L}(E,F)$.
L'ensemble des solutions de l'équation $f(u)=0_F$, d'inconnue $u\in E$, s'appelle le ***noyau de f***. *On le note $\operatorname{Ker} f$:*
$$\operatorname{Ker} f=\{u\in E\ \ \textit{tel que}\ \ f(u)=0_F\}$$

Propriété 2.2 — $\operatorname{Ker} f$ *est un sous-espace vectoriel de* E.

Théorème 2.3 — Injectivité et noyau
Soit E *et* F *deux espaces vectoriels et* $f \in \mathscr{L}(E,F)$.
f *est injective si et seulement si* $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.

Théorème 2.4 — Image d'un espace vectoriel par une application linéaire
Soit f *est une application linéaire de* E *dans* F. *Alors pour tout sev* G *de* E, *l'ensemble* $f\langle G\rangle$ *est un sous-espace vectoriel de* F.

Définition 2.5 — Image d'une application linéaire
Soit E *et* F *deux espaces vectoriels et* $f \in \mathscr{L}(E,F)$.
L'ensemble $f\langle E\rangle$ *s'appelle l'image de* f. *On le note* $\operatorname{Im} f$.

Théorème 2.6 — Image et surjectivité
Soit E *et* F *deux espaces vectoriels et* $f \in \mathscr{L}(E,F)$.
f *est surjective si et seulement si* $\operatorname{Im} f = F$

III — Applications linéaires en dimension finie

Théorème 3.1 — Caractérisation d'une application linéaire
Soit E *et* F *deux espaces vectoriels,* E *étant de dimension finie* p.
Une application linéaire de E *dans* F *est entièrement déterminée par l'image des vecteurs d'une base de* E.

Propriété 3.2 — *Soit* E *et* F *deux espaces vectoriels,* $f \in \mathscr{L}(E,F)$ *et* $(e_1,\dots,e_p)$ *une base quelconque de* E.
$(f(e_1),\dots,f(e_p))$ *est une famille génératrice de* $\operatorname{Im} f$.

Attention, en toute généralité, ce n'est pas une base !

Définition 3.3 — Rang d'une application linéaire
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. *On appelle* ***rang*** *de* f *la dimension de l'espace vectoriel* $\operatorname{Im} f$: $\operatorname{rg} f \overset{\text{déf.}}{=} \dim(\operatorname{Im} f)$.

Théorème 3.4 — Théorème du rang
Soit E *et* F *deux espaces vectoriels,* E *de dimension finie et* $f \in \mathscr{L}(E,F)$.
$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E$.

Corollaire 3.5 — *Soit* f *une application linéaire entre deux espace vectoriel* E *et* F *de dimensions finies.*

1) f *est injective si et seulement si* $\operatorname{rg} f = \dim E$;
2) f *est surjective si et seulement si* $\operatorname{rg} f = \dim F$;
3) f *est bijective si et seulement si* $\operatorname{rg} f = \dim E = \dim F$;

Corollaire 3.6 — *Si* F *est de dimension finie et si* $\dim F = \dim E$ *alors on a l'équivalence*

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective}$$

Propriété 3.7 — *Soit* E *et* F *deux espaces vectoriels,* E *de dimension finie (resp.* F *de dimension finie) et* $f \in \mathscr{L}(E,F)$.
S'il existe un isomorphisme entre E *et* F *alors* F *est aussi de dimension finie (resp.* E *est aussi de dimension finie) et* $\dim E = \dim F$.

IV — Matrice d'une application linéaire

Définition 4.1 — Matrice d'une application linéaire
Soit E et F deux espaces vectoriels, E et F de dimensions finies, $\mathscr{B} = \left(e_1, e_2, \dots, e_p\right)$ une base de E et $\mathscr{C} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ une base de F. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
*On appelle **matrice de l'application linéaire** f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ la matrice de la famille $(f(e_1), \dots, f(e_p))$ dans la base $\mathscr{C}$.*

Dans le cas d'un endomorphisme, on convient de prendre *la même base* au départ et à l'arrivée. On note simplement $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f)$ dans ce cas.

Théorème 4.2 — Unicité de la matrice
Deux bases étant données, à une matrice correspond une unique application linéaire.

Corollaire 4.3 — *Soit $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Il existe une unique application linéaire f de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ dont M est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.*

Théorème 4.4 — Opérations et représentation matricielle
Soit E et F deux espaces vectoriels, E et F de dimensions finies, $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{C}$ une base de F.

1) $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}\mathscr{C}}(f+g) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}\mathscr{C}}(f) + \mathrm{mat}_{\mathscr{B}\mathscr{C}}(g)$;
2) *pour* $\lambda \in \mathbb{K}$, $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}\mathscr{C}}(\lambda f) = \lambda\, \mathrm{mat}_{\mathscr{B}\mathscr{C}}(f)$.

Théorème 4.5 — Utilisation du produit matriciel – I
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et M la matrice représentant f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$. Si u est un vecteur de u représenté par $U_{\mathscr{B}}$ dans la base $\mathscr{B}$ alors $M \times U_{\mathscr{B}}$ représente $f(u)$ dans la base $\mathscr{C}$.

Théorème 4.6 — Utilisation du produit matriciel – II
Soit f et g deux endomorphismes représentés respectivement par M et N dans la base $\mathscr{B}$ de E. Alors MN représente $f \circ g$ dans la base $\mathscr{B}$.

Théorème 4.7 — Utilisation du produit matriciel – III
Soit f un endomorphisme représenté par la matrice M dans la base $\mathscr{B}$.
L'endorphisme f est bijectif si et seulement si M est inversible.
De plus, dans ce cas $M^{-1} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f^{-1})$.

Théorème 4.8 — Matrice d'une application linéaire et rang
Soit f un endomorphisme représenté par la matrice M dans la base $\mathscr{B}$.

$$\mathrm{rg}\, f = \mathrm{rg}\, M$$