Vecteurs aléatoires

bcpst 1, 2018

Exercice 1

On considère X et Y deux v.a.r. de Bernoulli sur un espace probabilisé fini (Ω, P).

1. Montrer que
$$E(XY) = P\big((X=1)\cap(Y=1)\big)$$
2. Montrer que X et Y sont indépendantes ssi leur covariance est nulle.

Exercice 2

Soit X dont la loi est donnée par $P(X=0)=1/6$, $P(X=1)=P(X=-1)=1/4$ et $P(X=2)=P(X=-2)=1/6$. Soit $Y=X^2$.

1. Donner la loi du couple (X,Y). En déduire la loi de Y.
2. X et Y sont-elles indépendantes ? Calculer $\text{cov}(X,Y)$.

Exercice 3

On considère l'expérience suivante : on lance une pièce parfaitement équilibrée et on note X_1 le résultat : $(X_1=0)$ si on obtient pile et $(X_1=1)$ si on obtient face. Si $(X_1=0)$ on lance une pièce truquée dont la probabilité d'obtenir face est double de celle d'obtenir pile, sinon on relance la pièce honnête. On note X_2 le résultat du second lancer. On note $X=X_2$ et $Y=X_1+X_2$.

1. Calculer la loi de probabilité associée à la pièce truquée.
2. a) Donner la loi conjointe de X et de Y.
   b) Donner les lois marginales du couple (X,Y). X et Y sont-elles indépendantes ?
   c) Calculer les loi de Y conditionnée à $(X=x)$.
   d) Calculer la loi de la v.a.r. XY.
3. a) Calculer successivement $E(X)$, $E(Y)$, $V(X)$, $V(Y)$, $\text{cov}(X,Y)$.

Exercice 4

On lance deux dés parfaitement équilibrés. Soit T la somme des points obtenus, X le reste de la division de T par 2 et Y le reste de la division de T par 5.

1. Donner la loi conjointe de (X,Y).
2. En déduire les lois marginales de X et Y. Sont-elles indépendantes ?

Exercice 5

On lance deux dés à 6 faces honnêtes. On note alors X le plus grand des numéros obtenus et Y le plus petit.

1. Déterminer les lois de X et de Y.
2. Calculer $E(X)$ et $E(Y)$, comparer ces espérances et commenter.
3. Calculer $V(X)$ et $V(Y)$.
4. Retrouver directement $V(X+Y)$ et en déduire $\text{cov}(X,Y)$?

Exercice 6

On lance n dés équilibrés et, pour tout entier i compris entre 1 et 6, on note X_i la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si la face i est apparue au moins une fois et à 0 sinon.

1. Donner la loi de X_i.
2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de numéros de faces différents obtenus. Calculer l'espérance de X.
3. a) Pour $(i,j)\in [\![1\,;6]\!]^2$, $i\neq j$, déterminer la loi conjointe de (X_i,X_j). En déduire $\text{cov}(X_i,X_j)$.
   b) Calculer $V(X)$.

Exercice 7

Un sac contient n jetons numérotés de 1 à n. On tire successivement et sans remise 2 jetons de ce sac. On note X le numéro du premier jeton tiré et Y le numéro du deuxième jeton tiré.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer $P_{(X=i)}(Y=j)$ pour $(i,j)\in [\![1\,;n]\!]^2$. Les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Calculer la covariance du couple (X,Y).

Exercice 8

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $\{1,2,...,n\}$. Soit Y la variable aléatoire définie par $Y=(X+1)^2$. Calculer la covariance de X et de Y.

EXERCICE 9

Soient X et Y deux v.a.r. discrètes admettant des variances $V(X)$ et $V(Y)$. On pose $Z=X+Y$ et $T=X-Y$.

1. Montrer que si Z et T sont indépendantes alors $V(X)=V(Y)$.
2. Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes de même lois prenant les valeurs 1, 2, 3 avec la probabilité $\frac{1}{3}$.
   a) Montrer que $V(X)=V(Y)$.
   b) Déterminer les lois de Z et de T. Sont-elles indépendantes ?

EXERCICE 10

Soient X et Y deux v.a.r. discrètes telles que :

$$E(X)=E(Y)=m \quad (m\neq 0) \quad V(X)=\sigma_1^2 \quad V(Y)=\sigma_2^2$$

$$\mathrm{cov}(X,Y)=\mu \quad V(X-Y)\neq 0$$

Soit $Z=aX+bY$. Déterminer a et b pour que $E(Z)=m$ et que $V(Z)$ soit minimale.

EXERCICE 11

Une urne contient a boules blanches et b boules noires ($a+b\geqslant 3$). On tire successivement 3 boules sans remise. Soient X, Y, et Z les v.a.r. respectivement égales à 1 si la première, la deuxième et la troisième boule tirée est blanche, et à 0 sinon.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (Y,Z).
2. En déduire les lois de Y et de Z.
3. Calculer $\mathrm{cov}(Y,Z)$ puis $\rho(Y,Z)$.

EXERCICE 12

Soit $n\in\mathbb{N}$. Deux élèves tapent indépendamment l'un de l'autre sur une machine à calculer un nombre au hasard entre 0 et n. Soit S la variable aléatoire égale à la somme des deux nombres tapés.

1. Déterminer la loi de S et calculer son espérance.
2. En fait la machine à une capacité de calcul limitée, et si le résultat obtenu est exactement $2n$ elle affiche un résultat au hasard entre 0 et $2n-1$.
   Soit T la variable aléatoire égale au nombre affiché pour la somme des deux nombres tapés par les deux étudiants.
   Calculer la loi et l'espérance de T.

EXERCICE 13

Soit X et Y deux v.a.r. indépendantes suivant toutes les deux une loi $\mathscr{B}(3,1/2)$. Soit $Z=X-Y$. Déterminer la loi de Z. Z et X sont-elles indépendantes ? Calculer $\mathrm{cov}(X,Z)$.

EXERCICE 14

On choisit au hasard deux nombres entiers compris (au sens large) entre -2 et 2, les paires de nombres étant équiprobables.

1. Donner l'espace probabilisé adapté à cette expérience.
2. Calculer la probabilité d'avoir choisi le nombre 0.
3. On note X le produit des deux nombres choisis. Déterminer la loi et l'espérance de X. Représenter graphiquement la fonction de répartition de X.

EXERCICE 15

Une urne U_1 contient n boules numérotées de 1 à n. Une urne U_2 contient des boules rouges en proportion p. On tire une boule au hasard dans U_1 et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée. Si $X=k$, on tire k fois une boule dans U_2 avec remise et on appelle Y le nombre de boules rouges tirées.

1. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
2. Déterminer la loi de Y sachant $X=k$.
3. Déterminer la loi du couple (X,Y).
4. $\mathrm{cov}(X,Y)$?

EXERCICE 16

On considère une suite de tirage successifs et sans remise dans une urne contenant $n-2$ boules rouges et 2 blanches. On note X le rang d'apparition de la première blanche et Y celui de la seconde.

1. Donner la loi du couple (X,Y).

2. En déduire les lois de X et Y, et leurs espérances.
3. $\operatorname{cov}(X,Y)$?

Exercice 17

On dispose de n boîtes numérotées de 1 à n. La boîte numéro k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard une boîte, puis une boule dans cette boîte. Soit X le numéro de la boîte et Y le numéro de la boule.

1. Donner la loi du couple (X,Y).
2. Calculer $P(X=Y)$.
3. Donner la loi de Y et son espérance.

Exercice 18

On dispose au hasard n boules dans N tiroirs. Y_T désigne le nombre de boules dans un tiroir T donné. X est le nombre de tiroirs vides.

1. Donner la loi de Y_T.
2. Donner la loi du couple (X,Y_T) dans les cas $N=2$ et $N=3$.
3. Toujours pour $N=2$ et $N=3$, donner la loi de X.
4. Calculer l'espérance de X dans le cas général (sans chercher la loi de X). On pourra introduire la v.a.r. X_T qui vaut 1 si le tiroir T est vide et 0 sinon.

Exercice 19

Deux urnes contiennent chacune n jetons numérotés de 1 à n. On tire un jeton dans chaque urne, ce qui donne deux entiers X_1 et X_2. On note alors X le plus petit numéro tiré et Y le plus grand.

1. Donner la loi du couple (X,Y).
2. En déduire la loi de X et celle de Y, puis leurs espérances.
3. $\operatorname{cov}(X,Y)$?

Exercice 20

Soit X une variable aléatoire uniforme sur $[\![1\,;n]\!]$, Y une variable aléatoire uniforme sur $[\![1\,;X]\!]$ et Z une variable aléatoire uniforme sur $[\![1\,;Y]\!]$. Déterminer les lois de X, Y et Z ainsi que leurs espérances.

Exercice 21

Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On écrit sur n papiers les racines complexes n-ième de l'unité : $\omega_k=\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)$ avec $0\leqslant k\leqslant n-1$.
Sur chaque papier on écrit un des complexes ω_k, puis on place ces papiers dans une urne. On en tire alors un au hasard.

1. Soit Θ la v.a.r. égale à l'argument de la racine obtenue (argument compris dans l'intervalle $[0,2\pi[$).
   Déterminer la loi de Θ, calculer $E(\Theta)$ et $V(\Theta)$.
2. On note X et Y respectivement les parties réelles et imaginaires du complexe obtenu lors du tirage précédent.
   Calculer $E(X)$ et $E(Y)$. Les v.a.r. X et Y sont-elles centrées ?
3. Calculer $E(X,Y)$ puis donner la valeur de $\operatorname{cov}(X,Y)$.
4. Les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes ?
5. Calculer $V(X+Y)$ le plus simplement possible.

Exercice 22

Soit $n\in\mathbb{N}$. Dans une urne contenant initialement n boules numérotées de 1 à n, on effectue deux tirages successifs d'une boule selon le protocole suivant : si on note k le numéro de la boule tirée au premier tirage, celle-ci est remise dans l'urne avec k boules supplémentaires portant toutes le numéro k et on effectue alors un second tirage.
On note X_1 et X_2 les variables aléatoires égales aux numéros respectifs des boules tirées aux permier et second tirages.

1. Déterminer la loi de X_1, son espérance et sa variance.
2. Déterminer la loi de X_2 et montrer que $E(X_2)=\dfrac{1-n}{2}+\dfrac{3n-1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$.
3. Calculer $\operatorname{cov}(X_1,X_2)$.

Exercice 23

On lance m dés non truqués.

1. Soit X_1 la v.a.r. égale au nombre de dés amenant le 6. Donner sans calcul la loi de X_1, son espérance et sa variance.

2. On relance les dés qui n'ont pas amené de 6. Soit X_2 le nombre de ceux qui amènent 6 lors de la deuxième relance.
   a) Calculer $P(X_2 = k/X_1 = l)$, pour $0 \leqslant k \leqslant m-l$.
   b) Montrer que $\binom{m}{l}\binom{m-l}{k} = \binom{m}{k}\binom{m-k}{l}$.
   c) En appliquant convenablement la formule des probabilités totales, déduire des question précédentes la loi de X_2, puis donner l'espérance et la variance de X_2.
3. Soit X_n la v.a.r. égale au nombre de dés amenant 6 au bout de n relances (y compris le premier lancer).
   Déterminer la loi de X_n et donner sans calcul son espérance et sa variance.

Exercice 24

Deux personnes lancent indépendamment l'une de l'autre une pièce équilibrée n fois de suite. On note X et Y les variables aléatoires définies par le nombre de faces obtenues par chaque personne.

1. Quelles sont les lois de probabilité de X et de Y ?
2. Calculer les probabilités de événements $(X = Y)$, $(X < Y)$ et $(X > Y)$.
3. Calculer la loi et l'espérance de $Z = \inf(X, Y)$.

Exercice 25

Une v.a.r. X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p_1)$. Soit Y une v.a.r. telle que, pour $k \in [\![0 \,;\, n]\!]$, la loi de Y sachant $(X = k)$ est la loi binomiale $\mathscr{B}(k, p_2)$ (avec p_1 et p_2 dans $]0 \,;\, 1[$).

Démontrer que la loi de Y est la loi $\mathscr{B}(n, p_1 p_2)$

Indication : *On rappelle que* $\binom{b}{a}\binom{c}{b} = \binom{c}{a}\binom{c-a}{b-a}$ *pour a, b et c dans* $\mathbb{N}$.

Ce résultat était-il prévisible ?

Exercice 26 — *Tirages simultanés*

Une urne contient n jetons numérotées de 1 à n. On en tire k simultanément, puis on les range dans l'ordre croissant. Pour $i \in [\![1 \,;\, k]\!]$, on note X_i le i–ième numéro ainsi obtenu (X_1 est donc le plus petit et X_k le plus grand).

1. Déterminer un univers adapté à cette expérience sur lequel on utilise l'équiprobabilité.
2. Pour $i \in [\![1 \,;\, k]\!]$, calculer directement la loi de X_i.
3. En déduire la formule sommatoire
$$\sum_{j=i}^{n-k+i} \binom{j-1}{i-1} \times \binom{n-j}{k-i} = \binom{n}{k}$$
4. À l'aide de ce dernier résultat et de la « petite formule », en déduire l'espérance de X_i.
5. a) Pour $i \in [\![1 \,;\, k]\!]$, déterminer la loi du couple (X_i, X_{i+1}).
   b) Démontrer que $X_{i+1} - X_i$ a la même loi que X_1. Retrouver ainsi $E(X_i)$.

Exercice 27

N personnes $P_1, \dots, P_N$ se transmettent une information binaire (un 0 ou un 1). Chaque personne transforme son information en son contraire avec une probabilité p, ou la transmet fidèlement avec une probabilité $q = 1 - p$.

On note X_i l'information transmise par la personne i $(1 \leqslant i \leqslant N)$, la personne 1 recevant l'information 1.

1. Quelle est la loi de X_i ?
   On établira une relation entre la loi de X_i et celle de X_{i+1}.
2. Quelle est la limite de $P(x_n = 1)$ lorsque n tend vers $+\infty$?
3. Déterminer $\mathrm{cov}(X_i, X_j)$.
4. Quelle est la probabilité que la 1re personne ait transmis correctement l'information, sachant que la N-ième personne la reçoit correctement ?