Ex. 1 — On considère X et Y deux v.a.r. de Bernoulli sur un espace probabilisé fini (Ω, P).

1. Montrer que $E(XY) = P\big((X=1)\cap(Y=1)\big)$.
2. Montrer que X et Y sont indépendantes ssi leur covariance est nulle.

Ex. 2 — Soit X dont la loi est donnée par $P(X=0)=1/6$, $P(X=1)=P(X=-1)=1/4$ et $P(X=2)=P(X=-2)=1/6$. Soit $Y=X^2$.

1. Donner la loi du couple (X,Y). En déduire la loi de Y.
2. X et Y sont-elles indépendantes ? Calculer $\mathrm{cov}(X,Y)$.

Ex. 3 — On considère l'expérience suivante : on lance une pièce parfaitement équilibrée et on note X_1 le résultat : $(X_1=0)$ si on obtient pile et $(X_1=1)$ si on obtient face. Si $(X_1=0)$ on lance une pièce truquée dont la probabilité d'obtenir face est double de celle d'obtenir pile, sinon on relance la pièce honnête. On note X_2 le résultat du second lancer. On note $X=X_2$ et $Y=X_1+X_2$.

1. Calculer la loi de probabilité associée à la pièce truquée.
2. a) Donner la loi conjointe de X et de Y.
   b) Donner les lois marginales du couple (X,Y). X et Y sont-elles indépendantes ?
   c) Calculer la loi de Y conditionnée à X.
   d) Calculer la loi de la v.a.r. XY.
3. a) Calculer successivement $E(X)$, $E(Y)$, $V(X)$, $V(Y)$, $\mathrm{cov}(X,Y)$.

Ex. 4 — On lance deux dés parfaitement équilibrés. Soit T la somme des points obtenus, X le reste de la division de T par 2 et Y le reste de la division de T par 5.

1. Donner la loi conjointe de (X,Y).
2. En déduire les lois marginales de X et Y. Sont-elles indépendantes ?

Ex. 5 — On lance deux dés à 6 faces honnêtes. On note alors X le plus grand des numéros obtenus et Y le plus petit.

1. Déterminer les lois de X et de Y.
2. Calculer $E(X)$ et $E(Y)$, comparer ces espérances et commenter.
3. Calculer $V(X)$ et $V(Y)$.
4. Retrouver directement $V(X+Y)$ et en déduire $\mathrm{cov}(X,Y)$?

Ex. 6 — On lance n dés équilibrés et, pour tout entier i compris entre 1 et 6, on note X_i la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si la face i est apparue au moins une fois et à 0 sinon.

1. Donner la loi de X_i.
2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de numéros de faces différents obtenus. Calculer l'espérance de X.
3. a) Pour $(i,j)\in [\![1\,;6]\!]^2$, $i\neq j$, déterminer la loi conjointe de (X_i,X_j). En déduire $\mathrm{cov}(X_i,X_j)$.
   b) Calculer $V(X)$.

Ex. 7 — Un sac contient n jetons numérotés de 1 à n. On tire successivement et sans remise 2 jetons de ce sac. On note X le numéro du premier jeton tiré et Y le numéro du deuxième jeton tiré.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer $P_{(X=i)}(Y=j)$ pour $(i,j)\in [\![1\,;n]\!]^2$. Les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Calculer la covariance du couple (X,Y).

Ex. 8 — Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $\{1,2,\dots,n\}$. Soit Y la variable aléatoire définie par $Y=(X+1)^2$. Calculer la covariance de X et de Y.

Ex. 9 — Soient X et Y deux v.a.r. discrètes admettant des variances $V(X)$ et $V(Y)$. On pose $Z=X+Y$ et $T=X-Y$.

1. Montrer que si Z et T sont indépendantes alors $V(X)=V(Y)$.
2. Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes de même lois prenant les valeurs 1, 2, 3 avec la probabilité $\frac{1}{3}$.
   a) Montrer que $V(X)=V(Y)$.
   b) Déterminer les lois de Z et de T. Sont-elles indépendantes ?

Ex. 10 — Soient X et Y deux v.a.r. discrètes telles que :

$$E(X) = E(Y) = m \quad (m \neq 0) \quad V(X) = \sigma_1^2 \quad V(Y) = \sigma_2^2$$

$$\text{cov}(X, Y) = \mu \quad V(X - Y) \neq 0$$

Soit $Z = aX + bY$. Déterminer a et b pour que $E(Z) = m$ et que $V(Z)$ soit minimale.

Ex. 11 — Une urne contient a boules blanches et b boules noires ($a + b \geqslant 3$). On tire successivement 3 boules sans remise. Soient X, Y, et Z les v.a.r. respectivement égales à 1 si la première, la deuxième et la troisième boule tirée est blanche, et à 0 sinon.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (Y, Z).
2. En déduire les lois de Y et de Z.
3. Calculer $\text{cov}(Y, Z)$ puis $\rho(Y, Z)$.

Ex. 12 — Soit $n \in \mathbb{N}$. Deux élèves tapent indépendamment l'un de l'autre sur une machine à calculer un nombre au hasard entre 0 et n. Soit S la variable aléatoire égale à la somme des deux nombres tapés.

1. Déterminer la loi de S et calculer son espérance.
2. En fait la machine à une capacité de calcul limitée, et si le résultat obtenu est exactement $2n$ elle affiche un résultat au hasard entre 0 et $2n - 1$.
   Soit T la variable aléatoire égale au nombre affiché pour la somme des deux nombres tapés par les deux étudiants.
   Calculer la loi et l'espérance de T.

Ex. 13 — Soit X et Y deux v.a.r. indépendantes suivant toutes les deux une loi $\mathscr{B}(3, 1/2)$. Soit $Z = X - Y$. Déterminer la loi de Z. Z et X sont-elles indépendantes ? Calculer $\text{cov}(X, Z)$.

Ex. 14 — On choisit au hasard deux nombres entiers compris (au sens large) entre -2 et 2, les paires de nombres étant équiprobables.

1. Donner l'espace probabilisé adapté à cette expérience.
2. Calculer la probabilité d'avoir choisi le nombre 0.
3. On note X le produit des deux nombres choisis. Déterminer la loi et l'espérance de X. Représenter graphiquement la fonction de répartition de X.

Ex. 15 — Une urne U_1 contient n boules numérotées de 1 à n. Une urne U_2 contient des boules rouges en proportion p. On tire une boule au hasard dans U_1 et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée. Si $X = k$, on tire k fois une boule dans U_2 avec remise et on appelle Y le nombre de boules rouges tirées.

1. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
2. Déterminer la loi de Y sachant $X = k$.
3. Déterminer la loi du couple (X, Y).

Ex. 16 — On considère une suite de tirage successifs et sans remise dans une urne contenant $n - 2$ boules rouges et 2 blanches. On note X le rang d'apparition de la première blanche et Y celui de la seconde.

1. Donner la loi du couple (X, Y).
2. En déduire les lois de X et Y, et leurs espérances.

Ex. 17 — On dispose de n boîtes numérotées de 1 à n. La boîte numéro k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard une boîte, puis une boule dans cette boîte. Soit X le numéro de la boîte et Y le numéro de la boule.

1. Donner la loi du couple (X, Y).
2. Calculer $P(X = Y)$.
3. Donner la loi de Y et son espérance.

Ex. 18 — On dispose au hasard n boules dans N tiroirs. Y_T désigne le nombre de boules dans un tiroir T donné. X est le nombre de tiroirs vides.

1. Donner la loi de Y_T.
2. Donner la loi du couple (X, Y_T) dans les cas $N = 2$ et $N = 3$.
3. Toujours pour $N = 2$ et $N = 3$, donner la loi de X.
4. Calculer l'espérance de X dans le cas général (sans chercher la loi de X). On pourra introduire la v.a.r. X_T qui vaut 1 si le tiroir T est vide et 0 sinon.

Ex. 19 — Deux urnes contiennent chacune n jetons numérotés de 1 à n. On tire un jeton dans chaque urne, ce qui donne deux entiers X_1 et X_2. On note alors X le plus petit numéro tiré et Y le plus grand.

1. Donner la loi du couple (X, Y).
2. En déduire la loi de X et celle de Y, puis leurs espérances.
3. $\text{cov}(X, Y)$?

Ex. 20 — Soit X une variable aléatoire uniforme sur $[\![1\,;n]\!]$, Y une variable aléatoire uniforme sur $[\![1\,;X]\!]$ et Z une variable aléatoire uniforme sur $[\![1\,;Y]\!]$. Déterminer les lois de X, Y et Z ainsi que leurs espérances.

Ex. 21 — Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On écrit sur n papiers les racines complexes n-ième de l'unité : $\omega_k = \exp\left(\dfrac{2ik\pi}{n}\right)$ avec $0 \leqslant k \leqslant n-1$.
Sur chaque papier on écrit un des complexes ω_k, puis on place ces papiers dans une urne. On en tire alors un au hasard.

1. Soit Θ la v.a.r. égale à l'argument de la racine obtenue (argument compris dans l'intervalle $[0, 2\pi[$).
   Déterminer la loi de Θ, calculer $E(\Theta)$ et $V(\Theta)$.
2. On note X et Y respectivement les parties réelles et imaginaires du complexe obtenu lors du tirage précédent.
   Calculer $E(X)$ et $E(Y)$. Les v.a.r. X et Y sont-elles centrées ?
3. Calculer $E(X, Y)$ puis donner la valeur de $\text{cov}(X, Y)$.
4. Les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes ?
5. Calculer $V(X+Y)$ le plus simplement possible.

Ex. 22 — Soit $n \in \mathbb{N}$. Dans une urne contenant initialement n boules numérotées de 1 à n, on effectue deux tirages successifs d'une boule selon le protocole suivant : si on note k le numéro de la boule tirée au premier tirage, celle-ci est remise dans l'urne avec k boules supplémentaires portant toutes le numéro k et on effectue alors un second tirage.
On note X_1 et X_2 les variables aléatoires égales aux numéros respectifs des boules tirées aux permier et second tirages.

1. Déterminer la loi de X_1, son espérance et sa variance.
2. Déterminer la loi de X_2 et montrer que $E(X_2) = \dfrac{1-n}{2} + \dfrac{3n-1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+k}$.

Ex. 23 — On lance m dés non truqués.

1. Soit X_1 la v.a.r. égale au nombre de dés amenant le 6. Donner sans calcul la loi de X_1, son espérance et sa variance.
2. On relance les dés qui n'ont pas amené de 6. Soit X_2 le nombre de ceux qui amènent 6 lors de la deuxième relance.
   a) Calculer $P(X_2 = k/X_1 = l)$, pour $0 \leqslant k \leqslant m-l$.
   b) Montrer que $\dbinom{m}{l}\dbinom{m-l}{k} = \dbinom{m}{k}\dbinom{m-k}{l}$.
   c) En appliquant convenablement la formule des probabilités totales, déduire des question précédentes la loi de X_2, puis donner l'espérance et la variance de X_2.
3. Soit X_n la v.a.r. égale au nombre de dés amenant 6 au bout de n relances (y compris le premier lancer).
   Déterminer la loi de X_n et donner sans calcul son espérance et sa variance.

Ex. 24 — Deux personnes lancent indépendamment l'une de l'autre une pièce équilibrée n fois de suite. On note X et Y les variables aléatoires définies par le nombre de faces obtenues par chaque personne.

1. Quelles sont les lois de probabilité de X et de Y ?
2. Calculer les probabilités de événements $(X = Y)$, $(X < Y)$ et $(X > Y)$.
3. Calculer la loi et l'espérance de $Z = \inf(X, Y)$.

Ex. 25 — Modèle d'urne d'Ehrenfest *Ce modèle d'urne illustre la détente d'un gaz en physique statistique. Deux compartiments identiques contiennent un même gaz, mais dans des quantités différentes. Ils sont reliés par un tuyau fermé au début de l'expérience. On ouvre le tuyau. Les échanges*

de molécules de gaz entre les deux compartiments sont identifiés à l'échange des boules dans les urnes.
On répartit $2M$ boules numérotées de 1 à $2M$ dans deux urnes U et V. Cette répartition se fait de manière non précisée.
On effectue une succession de tirages d'un numéro, de façon uniforme, dans $[\![1 ; 2M]\!]$. À chaque tirage, on change d'urne la boule portant précisément le numéro sorti par le dé. On note X_n le nombre de boules dans l'urne U au bout de n tirages.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in X_{n+1}(\Omega)$, exprimer $P(X_{n+1} = k)$ en fonction de $P(X_n = k-1)$ et $P(X_n = k+1)$.
2. En multipliant la relation précédente par k et en la sommant, exprimer $E(X_{n+1})$ en fonction de $E(X_n)$.
3. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Commentaire ?

Ex. 26 — Une v.a.r. X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p_1)$. Soit Y une v.a.r. telle que, pour $k \in [\![0 ; n]\!]$, la loi de Y sachant $(X = k)$ est la loi binomiale $\mathscr{B}(k, p_2)$ (avec p_1 et p_2 dans $]0 ; 1[$).
Démontrer que la loi de Y est la loi $\mathscr{B}(n, p_1p_2)$
Indication : *On rappelle que* $\binom{b}{a}\binom{c}{b} = \binom{c}{a}\binom{c-a}{b-a}$ *pour a, b et c dans* $\mathbb{N}$.
Ce résultat était-il prévisible ?

Ex. 27 — Cas de plusieurs tirages simultanés
Une urne contient n jetons numérotées de 1 à n. On en tire k simultanément, puis on les range dans l'ordre croissant. Pour $i \in [\![1 ; k]\!]$, on note X_i le i–ième numéro ainsi obtenu (X_1 est donc le plus petit et X_k le plus grand).

1. Déterminer un univers adapté à cette expérience sur lequel on utilise l'équiprobabilité.
2. Pour $i \in [\![1 ; k]\!]$, calculer directement la loi de X_i.
3. En déduire la formule sommatoire
$$\sum_{j=i}^{n-k+i} \binom{j-1}{i-1} \times \binom{n-j}{k-i} = \binom{n}{k}$$
4. À l'aide de ce dernier résultat et de la « petite formule », en déduire l'espérance de X_i.
5. a) Pour $i \in [\![1 ; k]\!]$, déterminer la loi du couple (X_i, X_{i+1}).
   b) Démontrer que $X_{i+1} - X_i$ a la même loi que X_1. Retrouver ainsi $E(X_i)$.
   Indication : *La loi de* X_1 *a été étudié à l'exercice* **??**

Ex. 28 — N personnes $P_1, \dots, P_N$ se transmettent une information binaire (un 0 ou un 1). Chaque personne transforme son information en son contraire avec une probabilité p, ou la transmet fidèlement avec une probabilité $q = 1 - p$.

1. Quelle est la probabilité p_N pour que l'information parvienne non déformée à la N-ième personne ? On établira une relation entre p_N et p_{N-1} pour $n \geqslant 2$.
2. Quelle est la limite de $(p_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$?
3. Quelle est la probabilité que la 1^{re} personne ait transmis correctement l'information, sachant que la N-ième personne la reçoit correctement ?

Ex. 29 — Probabilités finies *(INA 08)* On lance, une bonne fois pour toute, une pièce équilibrée, que l'on ne retouche plus dans la suite.
On considère maintenant une urne dans laquelle se trouve, initialement, une boule blanche et une boule noire. On effectue des tirages successifs *avec remise* selon le protocole suivant :
– on tire une boule ;
– on rajoute une boule blanche si l'on avait tiré *pile*, et une boule noire si l'on avait tiré *face*.
Ainsi, au moment du k-ième tirage, on a $k + 1$ boules dans l'urne.

1. Calculer la probabilité d'avoir une boule blanche au k-ième tirage.
2. Sachant que l'on a eu une boule blanche au k-ième tirage, calculer la probabilité p_k d'avoir tiré *pile*. Calculer $\lim\limits_{k\to\infty} p_k$.
3. Calculer la probabilité d'avoir eu k boules blanches aux k premiers tirages.