Les bases

Ex. 1 — Résoudre

$$(\Sigma_1)\begin{cases} 2x+y+z=5 \\ 2x+13y-7z=-1 \\ x-y+z=1 \end{cases}$$

puis

$$(\Sigma_1')\begin{cases} x+3y-7z+t=1 \\ 2x+2y+z+2t=0 \\ x-y-2z+t=-1 \\ x+7y-4z+t=3 \end{cases}$$

Ex. 2 — Résoudre dans $\mathbb{R}^4$

$$(S_2)\begin{cases} x+4y+3z+t=1 \\ 2x+5y+4z-t=4 \\ x-3y-2z+3t=5 \end{cases} \quad (S_2')\begin{cases} x+y+2z+3t=1 \\ x+y+z-t=2 \end{cases}$$

$$(S_2'')\begin{cases} x+2y+3z+4t=10 \\ 2x-y+z-t=1 \\ 3x+y+4z+3t=11 \\ -2x+6y+4z+10t=18 \end{cases}$$

Ex. 3 — Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, en discutant suivant les réels a, b, c et d, le système linéaire suivant

$$(\Sigma_3)\begin{cases} x-y-z=a \\ 2x+y-z=b \\ x+y-3z=c \\ 2x-y-z=d \end{cases}$$

Ex. 4 — Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{R}^4$ le système

$$(\Sigma_4)\begin{cases} \lambda x+y+z+t=1 \\ x+\lambda y+z+t=1 \\ x+y+\lambda z+t=1 \\ x+y+z+\lambda t=1 \end{cases}$$

Ex. 5 — Résoudre en fonction du paramètre λ le système homogène

$$\begin{cases} (2-\lambda)x+3y-3z=0 \\ 3x+(2-\lambda)y-3z=0 \\ -3x-3y-(2+\lambda)z=0 \end{cases}$$

Ex. 6 — MÉTHODE DU DÉTERMINANT On considère un système 2×2 de la forme

$$(\Sigma)\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases} \quad (a,b,c,d,e,f)\in\mathbb{R}^6.$$

1. On suppose que $ad-bc\neq 0$. Montrer que dans ce cas (Σ) est un système de Cramer, et exprimer ses solutions en fonction de a, b, c, d, e et f.
2. Traiter le cas $ad-bc=0$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ et discuter suivant la valeur de m le système suivant
$$\begin{cases} mx-y=m^2 \\ x+(m-2)y=2m \end{cases}.$$
4. Résoudre et discuter en fonction des paramètres m et a, les solutions du système
$$\begin{cases} (2m-3)x+(m-1)y=m+a \\ (5-m)x+(m+1)y=m-2 \end{cases}$$

Entraînement

Ex. 7 — Résoudre les systèmes linéaires

1. $(\Sigma_1)\begin{cases} -x+2y+3z=2 \\ 4x+5y+6z=0 \\ 7x+8y+9z=0 \end{cases}$
(solution : $(-1,2,-1)$) ;
2. $(\Sigma_2)\begin{cases} x+3y+4z=6 \\ 7x-5z=-3 \\ 3x+y-z=3 \end{cases}$
(solution : $(-4,10,-5)$) ;
3. $(\Sigma_3)\begin{cases} x+y+z=1 \\ 3x+2y=14 \\ -2x-2y-2z=0 \end{cases}$;
4. $(\Sigma_4)\begin{cases} 2x-y+z=6 \\ x-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=3 \end{cases}$;
5. $(\Sigma_5)\begin{cases} 3x-4y+2z+t=1 \\ y+z-t=0 \\ -3x+6y-3t=-1 \end{cases}$.

Ex. 8 — Résoudre les systèmes linéaires

1. $(\Sigma_1)\begin{cases} 2x-3y+5z=-4 \\ 4x-y=2 \\ 2x+y+z=0 \end{cases}$
(solution : $(1/2,0,-1)$) ;

2. $(\Sigma_2)\begin{cases} 2x-3y+z-4t=12 \\ -x+2z+t=0 \\ x+3z=-24 \\ y+z+2t=0 \end{cases}$
(solution : $(3,-33,-9,21)$) ;
3. $2x+3y-z=0$;
4. $(\Sigma_4)\begin{cases} 3x-4y+2z+t=1 \\ y+z-t=0 \\ 12y-7t=4 \\ -3x+6y-3t=-1 \end{cases}$.

Ex. 9 — Résoudre dans $\mathbb{R}^3$

$$(\Sigma_9)\begin{cases} x+y+3z=4 \\ 2x+5y+z=6 \\ 3x+6y+2z=7 \end{cases} \quad (\Sigma_9')\begin{cases} 3x+2y-z=1 \\ x-y+z=0 \\ x+y-2z=-1 \end{cases}$$

$$(\Sigma_9'')\begin{cases} 4x+8z=-2 \\ y-6z=2 \\ 5x-y+z=2 \end{cases}$$

Ex. 10 — Résoudre dans $\mathbb{R}^4$

$$(\Sigma_{10})\begin{cases} -2x-y+4t=2 \\ 2x+3y+3z+2t=14 \\ x+2y+z+t=7 \\ -x-z+t=-1 \end{cases}$$

Réponse : $(0,2,2,1)$

Ex. 11 — Discuter selon les quadruplets (a,b,c,d) de réels, l'existence de solutions au système

$$\begin{cases} x+2y+4z+5t=a \\ x-y+z-t=b \\ -x-y-3z-3t=c \\ x+4y+6z+9t=d \end{cases}$$

et le résoudre quand c'est possible.

Systèmes à paramètres

Ex. 12 — Résoudre le système d'inconnues $(x,y,z)\in\mathbb{C}^3$ et de paramètre $\lambda\in\mathbb{C}$

$$(\Sigma_{12})\begin{cases} \lambda x+y+z=\lambda^2 \\ x+\lambda y+z=\lambda \\ x-y+\lambda z=0 \end{cases}$$

Ex. 13 — Résoudre le système d'inconnues $(x,y,z)\in\mathbb{C}^3$ et de paramètre $a\in\mathbb{C}$

$$(\Sigma_{13})\begin{cases} ax-2y+z=4 \\ x-ay+3z=-2 \\ 2x-3y+4az=8 \end{cases}$$

Ex. 14 — Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Discuter et résoudre

$$(S_{14})\begin{cases} \lambda x+y+z=0 \\ x+\lambda y+z=0 \\ (2\lambda+1)x+3y+(\lambda+2)z=0 \end{cases}$$

Ex. 15 — Résoudre dans $\mathbb{C}^3$

$$(\Sigma_{15})\begin{cases} x+\beta y+\beta^2 z=0 \\ \overline{\beta}x+y+\beta z=0 \\ \overline{\beta}^2 x+\overline{\beta}y+z=0 \end{cases}$$

$$(\Sigma_{15}')\begin{cases} x+y+z=a \\ x+jy+j^2z=b \\ x+j^2y+jz=c \end{cases}$$

β, a, b et c sont trois paramètres complexes, et $j=\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$.

Ex. 16 — Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système

$$(\Sigma_{16})\begin{cases} x+ay+a^2z=a' \\ \overline{a}x+y+az=b' \\ \overline{a}^2x+\overline{a}y+z=c' \end{cases}$$

On discutera suivant la valeur des paramètres complexes a, a', b', c'.

Ex. 17 — Résoudre le système d'inconnues complexes et de paramètre complexe m

$$(\Sigma_m)\begin{cases} x+y+mz=m \\ x+my-z=1 \\ x+y-z=1 \end{cases}$$

Ex. 18 — Résoudre le système d'inconnues $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$, de paramètres complexes a, b

$$(\Sigma_{a,b}) \begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}$$

Ex. 19 — Résoudre le système d'inconnues $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$, de paramètres complexes a, b, c

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + by + cz = 0 \\ a^2x + b^2y + c^2z = 0 \end{cases}$$

où a, b et c sont les racines complexes de $t^3 - t + 1 = 0$.

Ex. 20 — Résoudre le système d'inconnues $(x, y, z, t) \in \mathbb{C}^4$ et de paramètres $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$

$$(\Sigma_{20}) \begin{cases} \lambda x + y + z + t = 1 \\ x + \lambda y + z + t = \mu \\ x + y + \lambda z + t = \mu^2 \\ x + y + z + \lambda t = \mu^3 \end{cases}$$

Ex. 21 — Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Discuter et résoudre les systèmes suivants

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = 2 \\ 2x - 2y + 3z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = \lambda + 2 \\ x + \lambda y + z = 4 - \lambda \\ (2\lambda + 1)x + 3y + (\lambda + 2)z = 2\lambda + 7 \end{cases}$$

Utilisation des systèmes

Ex. 22 — Résoudre

$$(\Sigma_{22}) \begin{cases} x - 2y + 3z - 4t = 4 \\ y - z + t = -3 \\ x + 3y - 3t = 1 \\ -5y + 3z - t = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \text{ est minimum} \end{cases}$$

Ex. 23 — Résoudre

$$(\Sigma_{23}) \begin{cases} x + 2y + z - t = 5 \\ -2x + y - 2z - 3t = -5 \\ 3x - 2y - z - 3t = 3 \\ -x + y + z + 2t = 0 \\ xy + yz + zt + tx \text{ est maximum} \end{cases}$$

Ex. 24 — Établir

$$\exists!(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\},$$
$$\frac{x^2 + 1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3}$$

★ **Ex. 25** — Résoudre le système d'inconnues $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, de paramètres complexes $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a_1 \\ x_1 + x_3 = a_2 \\ \cdots \\ x_1 + x_n = a_{n-1} \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a_n \end{cases}$$

Divers

Ex. 26 — Soit λ et μ deux réels. Déterminer le nombre de solutions, et résoudre dans $\mathbb{R}^4$, le système suivant

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ \lambda x + y + z + t = 0 \\ x + \lambda y + z + t = \mu \\ x + y + \lambda z + t = \mu + 1 \\ x + y + z + \lambda t = \mu - 1 \end{cases}$$

Ex. 27 — Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, en discutant sur le paramètre réel α

1. $$\begin{cases} \alpha x + (\alpha - 1)y + z = 2\alpha \\ x + y + \alpha z = 2\alpha \\ \alpha x + (\alpha + 1)y + z = 2\alpha \end{cases}$$
2. $$\begin{cases} x + \alpha y + 2\alpha z = 0 \\ \alpha x - \alpha y + z = 0 \\ 2\alpha x - 4y + \alpha z = 0 \end{cases}$$

Ex. 28 — Soit $m \in \mathbb{R}$. Discuter et résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes suivants

$$\begin{cases} x + my + z = 1 \\ mx + y + (m-1)z = m \\ x + y + z = m + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1-m)x + (2m+1)y + (2m+2)z = m \\ mx + my = 2m + 2 \\ 2x + (m+1)y + (m-1)z = m^2 - 2m + 9 \end{cases}$$