

Équations linéaires

BCPST I, I2/2017

Les bases

Exercice 1

Résoudre

$$(\Sigma_1) \begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ 2x + 13y - 7z = -1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

puis

$$(\Sigma'_1) \begin{cases} x + 3y - 7z + t = 1 \\ 2x + 2y + z + 2t = 0 \\ x - y - 2z + t = -1 \\ x + 7y - 4z + t = 3 \end{cases}$$

Exercice 2

Résoudre dans \mathbb{R}^4

$$(S_2) \begin{cases} x + 4y + 3z + t = 1 \\ 2x + 5y + 4z - t = 4 \\ x - 3y - 2z + 3t = 5 \end{cases} \quad (S'_2) \begin{cases} x + y + 2z + 3t = 1 \\ x + y + z - t = 2 \end{cases}$$

$$(S''_2) \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 10 \\ 2x - y + z - t = 1 \\ 3x + y + 4z + 3t = 11 \\ -2x + 6y + 4z + 10t = 18 \end{cases}$$

Exercice 3

Résoudre dans \mathbb{R}^3 , en discutant suivant les réels a, b, c et d , le système linéaire suivant

$$(\Sigma_3) \begin{cases} x - y - z = a \\ 2x + y - z = b \\ x + y - 3z = c \\ 2x - y - z = d \end{cases}$$

Exercice 4

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Résoudre dans \mathbb{R}^4 le système

$$(\Sigma_4) \begin{cases} \lambda x + y + z + t = 1 \\ x + \lambda y + z + t = 1 \\ x + y + \lambda z + t = 1 \\ x + y + z + \lambda t = 1 \end{cases}$$

Exercice 5

Résoudre en fonction du paramètre λ le système homogène

$$\begin{cases} (2-\lambda)x + 3y - 3z = 0 \\ 3x + (2-\lambda)y - 3z = 0 \\ -3x - 3y - (2+\lambda)z = 0 \end{cases}$$

Exercice 6 — Méthode du déterminant

On considère un système 2×2 de la forme

$$(\Sigma) \begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases} \quad (a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6.$$

1. On suppose que $ad - bc \neq 0$. Montrer que dans ce cas (Σ) est un système de Cramer, et exprimer ses solutions en fonction de a, b, c, d, e et f .
2. Traiter le cas $ad - bc = 0$.
3. Résoudre dans \mathbb{C}^2 et discuter suivant la valeur de m le système suivant

$$\begin{cases} mx - y = m^2 \\ x + (m-2)y = 2m \end{cases}$$

4. Résoudre et discuter en fonction des paramètres m et a , les solutions du système

$$\begin{cases} (2m-3)x + (m-1)y = m+a \\ (5-m)x + (m+1)y = m-2 \end{cases}$$

Entraînement

Exercice 7

Résoudre les systèmes linéaires

1. $(\Sigma_1) \begin{cases} -x + 2y + 3z = 2 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \\ 7x + 8y + 9z = 0 \end{cases}$
(solution : $(-1, 2, -1)$);
2. $(\Sigma_2) \begin{cases} x + 3y + 4z = 6 \\ 7x - 5z = -3 \\ 3x + y - z = 3 \end{cases}$
(solution : $(-4, 10, -5)$);
3. $(\Sigma_3) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x + 2y = 14; \\ -2x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$
4. $(\Sigma_4) \begin{cases} 2x - y + z = 6 \\ x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 3 \end{cases}$;
5. $(\Sigma_5) \begin{cases} 3x - 4y + 2z + t = 1 \\ y + z - t = 0 \\ -3x + 6y - 3t = -1 \end{cases}$.

Exercice 8

Résoudre les systèmes linéaires

$$1. (\Sigma_1) \begin{cases} 2x - 3y + 5z = -4 \\ 4x - y = 2 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$

(solution : $(1/2, 0, -1)$);

$$2. (\Sigma_2) \begin{cases} 2x - 3y + z - 4t = 12 \\ -x + 2z + t = 0 \\ x + 3z = -24 \\ y + z + 2t = 0 \end{cases}$$

(solution : $(3, -33, -9, 21)$);

$$3. 2x + 3y - z = 0;$$

$$4. (\Sigma_4) \begin{cases} 3x - 4y + 2z + t = 1 \\ y + z - t = 0 \\ 12y - 7t = 4 \\ -3x + 6y - 3t = -1 \end{cases}$$

Exercice 9

Résoudre dans \mathbb{R}^3

$$(\Sigma_9) \begin{cases} x + y + 3z = 4 \\ 2x + 5y + z = 6 \\ 3x + 6y + 2z = 7 \end{cases} \quad (\Sigma'_9) \begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ x - y + z = 0 \\ x + y - 2z = -1 \end{cases}$$

$$(\Sigma''_9) \begin{cases} 4x + 8z = -2 \\ y - 6z = 2 \\ 5x - y + z = 2 \end{cases}$$

Exercice 10

Résoudre dans \mathbb{R}^4

$$(\Sigma_{10}) \begin{cases} -2x - y + 4t = 2 \\ 2x + 3y + 3z + 2t = 14 \\ x + 2y + z + t = 7 \\ -x - z + t = -1 \end{cases}$$

RÉPONSE : $(0, 2, 2, 1)$

Exercice 11

Discuter selon les quadruplets (a, b, c, d) de réels, l'existence de solutions au système

$$\begin{cases} x + 2y + 4z + 5t = a \\ x - y + z - t = b \\ -x - y - 3z - 3t = c \\ x + 4y + 6z + 9t = d \end{cases}$$

et le résoudre quand c'est possible.

Systèmes à paramètres

Exercice 12

Résoudre le système d'inconnues $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ et de paramètre $\lambda \in \mathbb{C}$

$$(\Sigma_{12}) \begin{cases} \lambda x + y + z = \lambda^2 \\ x + \lambda y + z = \lambda \\ x - y + \lambda z = 0 \end{cases}$$

Exercice 13

Résoudre le système d'inconnues $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ et de paramètre $a \in \mathbb{C}$

$$(\Sigma_{13}) \begin{cases} ax - 2y + z = 4 \\ x - ay + 3z = -2 \\ 2x - 3y + 4az = 8 \end{cases}$$

Exercice 14

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Discuter et résoudre

$$(S_{14}) \begin{cases} \lambda x + y + z = 0 \\ x + \lambda y + z = 0 \\ (2\lambda + 1)x + 3y + (\lambda + 2)z = 0 \end{cases}$$

Exercice 15

Résoudre dans \mathbb{C}^3

$$(\Sigma_{15}) \begin{cases} x + \beta y + \beta^2 z = 0 \\ \bar{\beta} x + y + \beta z = 0 \\ \bar{\beta}^2 x + \bar{\beta} y + z = 0 \end{cases}$$

$$(\Sigma'_{15}) \begin{cases} x + y + z = a \\ x + jy + j^2 z = b \\ x + j^2 y + jz = c \end{cases}$$

β, a, b et c sont trois paramètres complexes, et $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

Exercice 16

Résoudre dans \mathbb{C} le système

$$(\Sigma_{16}) \begin{cases} x + ay + a^2 z = a' \\ \bar{a} x + y + az = b' \\ \bar{a}^2 x + \bar{a} y + z = c' \end{cases}$$

On discutera suivant la valeur des paramètres complexes a, a', b', c' .

Exercice 17

Résoudre le système d'inconnues complexes et de paramètre complexe m

$$(\Sigma_m) \begin{cases} x + y + mz = m \\ x + my - z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

Exercice 18

Résoudre le système d'inconnues $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$, de paramètres complexes a, b

$$(\Sigma_{a,b}) \begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}$$

Exercice 19

Résoudre le système d'inconnues $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$, de paramètres complexes a, b, c

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + by + cz = 0 \\ a^2x + b^2y + c^2z = 0 \end{cases}$$

où a, b et c sont les racines complexes de $t^3 - t + 1 = 0$.

Exercice 20

Résoudre le système d'inconnues $(x, y, z, t) \in \mathbb{C}^4$ et de paramètres $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$

$$(\Sigma_{20}) \begin{cases} \lambda x + y + z + t = 1 \\ x + \lambda y + z + t = \mu \\ x + y + \lambda z + t = \mu^2 \\ x + y + z + \lambda t = \mu^3 \end{cases}$$

Exercice 21

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Discuter et résoudre les systèmes suivants

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = 2 \\ 2x - 2y + 3z = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda x + y + z = \lambda + 2 \\ x + \lambda y + z = 4 - \lambda \\ (2\lambda + 1)x + 3y + (\lambda + 2)z = 2\lambda + 7 \end{cases}$$

Utilisation des systèmes**Exercice 22**

Résoudre

$$(\Sigma_{22}) \begin{cases} x - 2y + 3z - 4t = 4 \\ y - z + t = -3 \\ x + 3y - 3t = 1 \\ -5y + 3z - t = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \text{ est minimum} \end{cases}$$

Exercice 23

Résoudre

$$(\Sigma_{23}) \begin{cases} x + 2y + z - t = 5 \\ -2x + y - 2z - 3t = -5 \\ 3x - 2y - z - 3t = 3 \\ -x + y + z + 2t = 0 \\ xy + yz + zt + tx \text{ est maximum} \end{cases}$$

Exercice 24

Établir

$$\exists!(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\},$$

$$\frac{x^2 + 1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3}$$

★ Exercice 25

Résoudre le système d'inconnues $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, de paramètres complexes $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a_1 \\ x_1 + x_3 = a_2 \\ \dots \\ x_1 + x_n = a_{n-1} \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = a_n \end{cases}$$

Divers**Exercice 26**

Soit λ et μ deux réels. Déterminer le nombre de solutions, et résoudre dans \mathbb{R}^4 , le système suivant

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ \lambda x + y + z + t = 0 \\ x + \lambda y + z + t = \mu \\ x + y + \lambda z + t = \mu + 1 \\ x + y + z + \lambda t = \mu - 1 \end{cases}$$

Exercice 27

Résoudre dans \mathbb{R}^3 , en discutant sur le paramètre réel α

$$1. \begin{cases} ax + (\alpha - 1)y + z = 2\alpha \\ x + y + \alpha z = 2\alpha \\ \alpha x + (\alpha + 1)y + z = 2\alpha \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x + \alpha y + 2\alpha z = 0 \\ \alpha x - \alpha y + z = 0 \\ 2\alpha x - 4y + \alpha z = 0 \end{cases}$$