Suites classiques

Ex. 1 — Les 1201 premiers termes d'une suite arithmétique de raison 0,01 ont pour somme 4804. Quel est son premier terme ?

Ex. 2 —
1. Déterminer toutes les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + n^2$.
2. Déterminer toutes les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + 2^n$.
3. Déterminer toutes les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = (n+1)^2 u_n$.
4. Déterminer toutes les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2^n u_n$.

Ex. 3 — Donner le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 3u_n$.

Ex. 4 — On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$. Exprimer u_n en fonction de n et étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ex. 5 — On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -4u_n + 15$. Exprimer u_n en fonction de n et étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ex. 6 —
1. Vérifier que la formule $f(x) = \dfrac{-x+18}{3x+2}$ définit une fonction de l'intervalle $[0,9]$ dans lui-même.
2. Montrer que la suite u définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie
3. a) Montrer que la suite v donnée par $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 3}$ est bien définie.
   b) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique et déterminer sa raison.
   c) En exprimant u_n en fonction de v_n, donner une expression de u_n en fonction de n.
4. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de la série de terme général u_n.

Ex. 7 — On cherche le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 25$, $u_1 = 31$ et

$$\forall n \in [\![2\ ;\ +\infty [\![, \quad u_n - 4u_{n-1} + 4u_{n-2} = n^2 + n + 1.$$

1. Chercher une suite particulière $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la forme $\left(an^2 + bn + c\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation (mais pas nécessairement les conditions initiales).
2. Quelle relation vérifie la suite $(u_n - z_n)_{n\in\mathbb{N}}$? En déduire $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ex. 8 —
1. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(u_n + 2v_n) \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{3}(2u_n + v_n) \end{cases}$$

Déterminer u_n et v_n en fonction de n, u_0 et v_0 de deux façons différentes :
   a) En établissant une relation de récurrence d'ordre 2 sur u et sur v.
   b) En faisant apparaître une suite matricielle géométrique.
2. On pose $a_0 = 1$ et $a_0 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = \sqrt[3]{a_n b_n^2} \\ b_{n+1} = \sqrt[3]{a_n^2 b_n} \end{cases}$$

Vérifier que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies. Les expliciter en fonction de n et déterminer leurs limites respectives.

Basiques

Ex. 9 — Vrai ou faux ?
1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et minorée par 2, alors elle converge vers 2.
2. Le produit de deux suites minorées est une suite minorée.
3. Si $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.
4. Si u et v sont deux suites bornées alors uv est une suite bornée.
5. Si u et v sont deux suites, si u et uv sont bornées, alors v est bornée.
6. La suite $\left(\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.
7. Toute suite convergente est monotone.
8. Toute suite monotone est convergente.
9. Si $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Ex. 10 — Quel est le plus grand terme de la suite définie par
1. $u_n = -3n^2 + 19n - 28$;
2. $u_n = \dfrac{(3{,}5)^n}{n!}$;
3. $u_n = \dfrac{6^n}{n!}$.

Ex. 11 — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers relatifs. Montrer que si u est convergente alors elle est stationnaire (c'est-à-dire constante à partir d'un certain rang).

Suites adjacentes

Ex. 12 — Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes :

$$\forall n \in [\![3 \,;\, +\infty [\![,\quad u_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k^2+1},$$
$$v_n = u_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}$$

Ex. 13 — Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente en montrant que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2}, \quad u_n = S_{2n}, \quad v_n = S_{2n+1}.$$

Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de sa limite.

Ex. 14 — Soient a_0 et b_0 deux réels fixés. On définit par récurrence les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_{n+1} = \dfrac{2a_n + b_n}{3}$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n + 2b_n}{3}$.

1. Montrer que ces deux suites sont adjacentes.
2. En calculant $a_n + b_n$, montrer qu'elles convergent vers $\dfrac{a_0 + b_0}{2}$.

Exercices classiques

Ex. 15 — À l'aide d'un encadrement, montrer que la suite de terme général

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

est convergente et donner sa limite.

Ex. 16 — 1. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{k}}$$

En déduire le comportement de la suite de terme général $\quad u_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Ex. 17 — Moyenne arithmético-géométrique
Soit a et b deux réels positifs tels que $0 < a < b$. On définit les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$u_0 = a, \quad v_0 = b,$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

1. a) Montrer que $\forall (x,y) \in {\mathbb{R}_+}^2, \quad \dfrac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$.
   b) Montrer par récurrence, en utilisant le résultat de la question précédente, que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant b.$$
   c) En déduire que les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.
   On note $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $l' = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$. Justifier avec soin que $0 < l \leqslant l'$.
2. a) Montrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n})^2.$$
   puis que
   $$l' - l = \frac{1}{2}\left(\sqrt{l'} - \sqrt{l}\right)^2.$$
   b) Montrer que si $l \neq l'$ alors $\sqrt{l'} + \sqrt{l} = \dfrac{1}{2}(\sqrt{l'} - \sqrt{l})$.
   c) En tirant une contradiction du résultat précédent, en déduire que $l = l'$.
   On appelle la limite commune des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la moyenne arithmético-géométrique de a et b.
3. a) Que valent les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand $a = 0$ et $b > a$? Quelles sont leurs limites ?
   b) Que valent les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand $a = b$? Quelles sont leurs limites ?

Ex. 18 — Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$$

En déduire la convergence et la limite de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.

Ex. 19 — Série exponentielle Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

1. a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n! \geqslant 2^{n-1}$
   b) En déduire que la suite u est majorée.
   c) Démontrer que la suite u est convergente.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = u_n + \dfrac{1}{n \cdot n!}$.
   Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes, et retrouver le résultat précédent.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n \mathrm{e}^{-t}}{n!}\,\mathrm{d}t$.
   a) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \dfrac{1}{\mathrm{e}}\dfrac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$.
   b) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{e}I_0 = u_n + \mathrm{e}I_n - 1$.
   c) Démontrer que $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
   d) En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Calculs de limite

Ex. 20 — Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Convergence et limite éventuelle des suites définies par

$$(1)\quad u_n = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}; \quad (2)\quad u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor;$$
$$(3)\quad u_n = \frac{\lfloor 2^n x \rfloor}{\lfloor 3^n x \rfloor}.$$

Ex. 21 — Calculer les limites quand n tend vers $+\infty$ de

1. $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$;
2. $b_n = \frac{7^{n+1} + 6^{n+1}}{7^n + 6^n}$;
3. $c_n = \frac{n^2 - 6n + 3}{n^4 + 2n}$;
4. $d_n = 2^n \sin(\theta/2^n)$;
5. $e_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n$;
6. $f_n = \sqrt[n]{n^2}$.

Ex. 22 — À l'aide d'équivalents, calculer les limites en $+\infty$ des suites suivantes :

1. $a_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$;
2. $c_n = \frac{1}{n}(\cos(1/n) - 1)^{-1}(\sqrt[3]{1+1/n} - 1)$;
3. $d_n = \frac{n^2 + \cos n}{2^n + \sin n}$;
4. $e_n = \frac{\mathrm{e}^{1/\sqrt{n}} - 1}{\sqrt{n} - \sqrt{n+2}}$;
5. $f_n = \frac{(\ln n)^2 + \sqrt{n^2+1}}{\cos(n!) + n^2}$;
6. $g_n = \frac{1000^n + n!}{n! + n^{1000}}$;
7. $l_n = \sqrt{2n+1} + 2n + \ln n$
8. $m_n = \frac{\exp(\sin(1/n)) - 1}{(1/2)^n + n^2}$;
9. $r_n = \frac{\sqrt[3]{1 + \sin(1/n)} - \mathrm{e}^{1/3n}}{\sin(1/n) + \tan(1/n)}$.

Ex. 23 — Étude de $u_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

1. Démontrer que $\forall x \in [\,0\,;1\,], x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x$.
2. En déduire un encadrement de u_n.
3. Limite et équivalent ?

Ex. 24 — Série harmonique 1. Démontrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$$

2. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k+1} \leqslant \ln(1+k) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$

3. On pose $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
À l'aide de l'inégalité précédente, démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant \ln(n+1) + \frac{n}{n+1}$$

4. Étudier alors la convergence de $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
5. Démontrer que $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Ex. 25 — Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $f_n(x) = x^n + \ln x$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution. On note u_n cette solution.
2. Déterminer le signe de $f_n(0)$ et de $f_n(1)$. En déduire que $u_n \in \,]0\,;1[$.
3. Calculer $f_{n+1}(u_n)$ et en déduire la monotonie de u, puis sa convergence. Quelle est sa limite ?

Ex. 26 — Donner le terme général des suites :

1. $u_0 = 1,\ u_1 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{1}{2}u_n$;
2. $u_0 = 1,\ u_1 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 10u_{n+1} - 21u_n$;
3. $u_0 = 1,\ u_1 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$;
4. $u_0 = 1,\ u_1 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} + 2u_n$;

Suites $u_{n+1} = f(u_n)$

Ex. 27 — La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n}$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est elle majorée ?

Ex. 28 — Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$.

Ex. 29 — Étude de la suite définie par $u_0 = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n^2 + 1}$

Ex. 30 — Étude de la suite définie par $u_0 = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2 + u_n}$

1. Étudier la fonction $f \,:\, x \mapsto \frac{1}{2+x}$ sur l'intervalle I qui vous semble le plus judicieux.
2. Montrer que la suite u est bien définie.
3. Étudier les points fixes de f. On notera α le point fixe positif de f.
4. a) Montrer que $\forall x \in [\,0\,;1\,], \quad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{4}$.
   b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$.
   c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n |1 - \alpha|$.
   Montrer que u est convergente. Que pouvez-vous dire de la monotonie de u ?

Ex. 31 — Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

1. $u_0 = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.
2. $u_1 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \dfrac{1}{2^n}}$.
3. $u_0 \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{n}\mathrm{e}^{-u_n}$. (Donner un équivalent de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$)

Ex. 32 — Étude de la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{2}{u_n^2+1}$

1. Étudier la fonction $f \ : \ x \mapsto \dfrac{2}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Étudier les points fixes de f.
3. On pose $g = f \circ f$.
   a) Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g \circ g(x) - x = -\dfrac{(x-1)^3(x^2+x+2)}{(1+x^2)^2+4}$.
   b) On suppose $u_0 \in [0\ ;\ 1[$. En déduire la monotonie de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer alors que u est convergente.
   c) Traiter le cas $u_0 \in [1\ ;\ +\infty[$.

Étude de suites

Ex. 33 — On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée telle que la suite $(u_{n+1}-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Ex. 34 — Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, alors la suite de terme général $v_n = \dfrac{1}{n+1}(u_0 + u_1 + \cdots + u_n)$ est monotone et de même monotonie que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ex. 35 — Étude de la convergence de la suite de terme général $u_n = \lfloor a^n \rfloor^{1/n}$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$ fixé.

Ex. 36 — Soit u la suite de terme général

$$u_n = \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n+1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n+2)} = \frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(2k+1)}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(2k)}$$

1. Étudier la monotonie de u et en déduire que u est convergente.
2. Soit v la suite de terme général $v_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+2}}$. Montrer que $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.
3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n < v_n$. Quel est la limite u ?

Ex. 37 —
1. Étudier la convergence des suites géométriques complexes.
2. Soit x et y deux suites réelles telles que

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{1}{2}(x_n - y_n) \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{2}(x_n + y_n) \end{cases}$$

Étudier la convergence de la suite complexe $z = x + iy$, puis celle des suites x et y.

Ex. 38 — On pose $u_0 = -1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_n = \frac{1}{2}\left(u_n + \sqrt{u_n^2 + 2^{-n}}\right)$$

1. Étudier la monotonie de u.
2. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_{n+1} - u_n \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^{-n}$.
3. En déduire que u converge.

Divers

Ex. 39 — Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_{2n} - S_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.
2. La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle convergente ?
3. Démontrer que $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.?

Ex. 40 — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels convergeant vers 0 et telle que $u_n + u_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

1. Montre que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante alors $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$.
   Indication : *On pourra observer* $a_n = n(u_n + u_{n+1})$.
2. Et si on ne suppose plus $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante ?
   Indication : *On pourra observer* $u_n = \dfrac{1}{2n} + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.