

# SUITES NUMÉRIQUES

BCPST I, 2018

## SUITES CLASSIQUES

### EXERCICE 1

Donner le terme général de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 1$ ,  $u_1 = 2$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+2} = 3u_n$ .

### EXERCICE 2

On définit une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $u_0 = 5$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = -4u_n + 15$ . Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$  et étudier la convergence de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

### EXERCICE 3

On cherche le terme général de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 25$ ,  $u_1 = 31$  et

$$\forall n \in \llbracket 2 ; +\infty \llbracket, \quad u_n - 4u_{n-1} + 4u_{n-2} = n^2 + n + 1.$$

1. Chercher une suite particulière  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de la forme  $(an^2 + bn + c)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant la relation (mais pas nécessairement les conditions initiales).
2. Quelle relation vérifie la suite  $(u_n - z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ? En déduire  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

### EXERCICE 4

1. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + v_n) \end{cases}$$

Déterminer  $u_n$  et  $v_n$  en fonction de  $n$ ,  $u_0$  et  $v_0$  de deux façons différentes :

- a) En établissant une relation de récurrence d'ordre 2 sur  $u$  et sur  $v$ .
  - b) En faisant apparaître une suite matricielle géométrique.
2. On pose  $a_0 = 1$  et  $a_0 = 2$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = \sqrt[3]{a_n b_n^2} \\ b_{n+1} = \sqrt[3]{a_n^2 b_n} \end{cases}$$

Vérifier que  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont bien définies. Les expliciter en fonction de  $n$  et déterminer leurs limites respectives.

### EXERCICE 5

On définit une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $u_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$ . Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$  et étudier la convergence de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .  
INDICATION : On pourra définir correctement et étudier la suite  $v_n = \ln(u_n)$ .

EXERCICE 6 — *Pas classiques, mais à savoir faire.*

1. Déterminer toutes les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = u_n + n^2$ .
2. Déterminer toutes les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = u_n + 2^n$ .
3. Déterminer toutes les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = (n+1)^2 u_n$ .
4. Déterminer toutes les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = 2^n u_n$ .

### ★ EXERCICE 7 — À comprendre

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R}_+^*$ , on pose  $f_n(x) = x^n + \ln x$ .

1. Montrer que l'équation  $f_n(x) = 0$  admet une unique solution. On note  $u_n$  cette solution.
2. Déterminer le signe de  $f_n(0)$  et de  $f_n(1)$ . En déduire que  $u_n \in ]0 ; 1[$ .
3. Calculer  $f_{n+1}(u_n)$  et en déduire la monotonie de  $u$ , puis sa convergence. Quelle est sa limite?

## ÉLÉMENTAIRES

### EXERCICE 8

Vrai ou faux?

1. Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite décroissante et minorée par 2, alors elle converge vers 2.
2. Le produit de deux suites minorées est une suite minorée.
3. Si  $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent.
4. Si  $u$  et  $v$  sont deux suites bornées alors  $uv$  est une suite bornée.

5. Si  $u$  et  $v$  sont deux suites, si  $u$  et  $uv$  sont bornées, alors  $v$  est bornée.
6. La suite  $\left( \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 1.
7. Toute suite convergente est monotone.
8. Toute suite monotone est convergente.
9. Si  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  convergent, alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

EXERCICE 9

Quel est le plus grand terme de la suite définie par

1.  $u_n = -3n^2 + 19n - 28$ ;
2.  $u_n = \frac{(3,5)^n}{n!}$ ;
3.  $u_n = \frac{6^n}{n!}$ .

EXERCICE 10

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'entiers relatifs. Montrer que si  $u$  est convergente alors elle est stationnaire (c'est-à-dire constante à partir d'un certain rang).

ÉTUDES DE CONVERGENCE

EXERCICE 11

À l'aide d'un encadrement, montrer que la suite de terme général

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

est convergente et donner sa limite.

EXERCICE 12

Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}}$$

En déduire le comportement de la suite de terme général  $u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$

EXERCICE 13

Soit  $x \in \mathbb{R}_+$ . Convergence et limite éventuelle des suites définies par

$$(1) \quad u_n = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}; \quad (2) \quad u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \lfloor kx \rfloor;$$

$$(3) \quad u_n = \frac{\lfloor 2^n x \rfloor}{\lfloor 3^n x \rfloor}.$$

EXERCICE 14

Étude de  $u_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$ .

1. Démontrer que  $\forall x \in [0; 1], x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$ .
2. En déduire un encadrement de  $u_n$ .
3. Limite et équivalent?

EXERCICE 15 — Série harmonique

1. Démontrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$$

2. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k+1} \leq \ln(1+k) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

3. On pose  $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ , pour  $n \in \mathbb{N}^*$ . À l'aide de l'inégalité précédente, démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n+1) + \frac{n}{n+1}$$

4. Étudier alors la convergence de  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .
5. Démontrer que  $H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$ .

EXERCICE 16 — Moyenne arithmético-géométrique

Soit  $a$  et  $b$  deux réels positifs tels que  $0 < a < b$ .

On définit les deux suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  :

$$u_0 = a, \quad v_0 = b,$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

1. a) Montrer que  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2, \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ .

- b) Montrer par récurrence, en utilisant le résultat de la question précédente, que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a \leq u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n \leq b.$$

- c) En déduire que les deux suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont convergentes.

On note  $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  et  $l' = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ . Justifier avec soin que  $0 < l \leq l'$ .

2. a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n})^2.$$

puis que

$$l' - l = \frac{1}{2}(\sqrt{l'} - \sqrt{l})^2.$$

b) Montrer que si  $l \neq l'$  alors  $\sqrt{l'} + \sqrt{l} = \frac{1}{2}(\sqrt{l'} - \sqrt{l})$ .

c) En tirant une contradiction du résultat précédent, en déduire que  $l = l'$ .

On appelle la limite commune des suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la moyenne arithmético-géométrique de  $a$  et  $b$ .

3. a) Que valent les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  quand  $a = 0$  et  $b > a$ ? Quelles sont leurs limites?

b) Que valent les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  quand  $a = b$ ? Quelles sont leurs limites?

#### EXERCICE 17

Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$$

En déduire la convergence et la limite de

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right).$$

#### EXERCICE 18 — Série exponentielle

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ .

1. a) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, n! \geq 2^{n-1}$
- b) En déduire que la suite  $u$  est majorée.
- c) Démontrer que la suite  $u$  est convergente.

2. Soit  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite définie par  $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$ .

Montrer que les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sont adjacentes, et retrouver le résultat précédent.

3. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $I_n = \int_0^1 \frac{t^n e^{-t}}{n!} dt$ .

a) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $I_n = \frac{1}{e} \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$ .

b) Montrer que, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $eI_0 = u_n + eI_n - 1$ .

c) Démontrer que  $I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

d) En déduire la limite de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

### CALCULS DE LIMITE

#### EXERCICE 19

Calculer les limites quand  $n$  tend vers  $+\infty$  de

1.  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ;
2.  $b_n = \frac{7^{n+1} + 6^{n+1}}{7^n + 6^n}$ ;
3.  $c_n = \frac{n^2 - 6n + 3}{n^4 + 2n}$ ;
4.  $d_n = 2^n \sin(\theta/2^n)$ ;
5.  $e_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n$ ;
6.  $f_n = \sqrt[n]{n^2}$ .

#### EXERCICE 20

À l'aide d'équivalents, calculer les limites en  $+\infty$

des suites suivantes :

1.  $a_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ ;
2.  $c_n = \frac{1}{n}(\cos(1/n) - 1)^{-1}(\sqrt[3]{1 + 1/n} - 1)$ ;
3.  $d_n = \frac{n^2 + \cos n}{2^n + \sin n}$ ;
4.  $e_n = \frac{e^{1/\sqrt{n}} - 1}{\sqrt{n} - \sqrt{n+2}}$ ;
5.  $f_n = \frac{(\ln n)^2 + \sqrt{n^2 + 1}}{\cos(n!) + n^2}$ ;
6.  $g_n = \frac{1000^n + n!}{n! + n^{1000}}$ ;
7.  $l_n = \frac{2n + \ln n}{\sqrt{2n+1} + \exp(\sin(1/n)) - 1}$ ;
8.  $m_n = \frac{\exp(\sin(1/n)) - 1}{(1/2)^n + n^2}$ ;
9.  $r_n = \frac{\sqrt[3]{1 + \sin(1/n)} - e^{1/3n}}{\sin(1/n) + \tan(1/n)}$ .

#### EXERCICE 21

Donner le terme général des suites :

1.  $u_0 = 1, u_1 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{1}{2}u_n$ ;
2.  $u_0 = 1, u_1 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 10u_{n+1} - 21u_n$ ;
3.  $u_0 = 1, u_1 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$ ;
4.  $u_0 = 1, u_1 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} + 2u_n$ ;

## SUITES ADJACENTES

### EXERCICE 22

Montrer que les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont adjacentes :

$$\forall n \in \llbracket 3 ; +\infty \llbracket, \quad u_n = \sum_{k=3}^n \frac{1}{k^2 + 1},$$

$$v_n = u_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}$$

### EXERCICE 23

Montrer que la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente en montrant que les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont adjacentes :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k^2}, \quad u_n = S_{2n}, \quad v_n = S_{2n+1}.$$

Donner une valeur approchée à  $10^{-2}$  près de sa limite.

### EXERCICE 24

Soient  $a_0$  et  $b_0$  deux réels fixés. On définit par récurrence les suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3}$  et  $b_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n}{3}$ .

1. Montrer que ces deux suites sont adjacentes.
2. En calculant  $a_n + b_n$ , montrer qu'elles convergent vers  $\frac{a_0 + b_0}{2}$ .

## SUITES $u_{n+1} = f(u_n)$

### EXERCICE 25

1. Vérifier que la formule  $f(x) = \frac{-x + 18}{3x + 2}$  définit une fonction de l'intervalle  $[0, 9]$  dans lui-même.
2. Montrer que la suite  $u$  définie par  $u_0 = 3$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$  est bien définie
3. a) Montrer que la suite  $v$  donnée par  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 3}$  est bien définie.  
b) Montrer que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique et déterminer sa raison.  
c) En exprimant  $u_n$  en fonction de  $v_n$ , donner une expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

4. Étudier la convergence de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , de la série de terme général  $u_n$ .

### EXERCICE 26

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est définie par  $u_0 = a \in \mathbb{R}_+^*$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n}$ .

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est-elle majorée ?

### EXERCICE 27

Étudier la convergence de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_1 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$ .

### EXERCICE 28

Étude de la suite définie par  $u_0 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n^2 + 1}$

### EXERCICE 29

Étude de la suite définie par  $u_0 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2 + u_n}$

1. Étudier la fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{2+x}$  sur l'intervalle  $I$  qui vous semble le plus judicieux.
2. Montrer que la suite  $u$  est bien définie.
3. Étudier les points fixes de  $f$ . On notera  $\alpha$  le point fixe positif de  $f$ .
4. a) Montrer que  $\forall x \in [0; 1], |f'(x)| \leq \frac{1}{4}$ .  
b) En déduire que  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|$ .  
c) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |1 - \alpha|$ .

Montrer que  $u$  est convergente. Que pouvez-vous dire de la monotonie de  $u$  ?

### EXERCICE 30

Étudier la convergence de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

1.  $u_0 = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}$ .
2.  $u_1 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}}$ .
3.  $u_0 \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{n} e^{-u_n}$ . (Donner un équivalent de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ )

EXERCICE 31

Étude de la suite définie par  $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \frac{2}{u_n^2 + 1}$

1. Étudier la fonction  $f : x \mapsto \frac{2}{1+x^2}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
2. Étudier les points fixes de  $f$ .
3. On pose  $g = f \circ f$ .
  - a) Montrer que, pour  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $g \circ g(x) - x = -\frac{(x-1)^3(x^2+x+2)}{(1+x^2)^2+4}$ .
  - b) On suppose  $u_0 \in [0; 1[$ . En déduire la monotonie de  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ . Montrer alors que  $u$  est convergente.
  - c) Traiter le cas  $u_0 \in [1; +\infty[$ .

ÉTUDE DE SUITES

EXERCICE 32

On considère une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  bornée telle que la suite  $(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est monotone. Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente.

EXERCICE 33

Montrer que si la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est monotone, alors la suite de terme général  $v_n = \frac{1}{n+1}(u_0 + u_1 + \dots + u_n)$  est monotone et de même monotonie que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

EXERCICE 34

Étude de la convergence de la suite de terme général  $u_n = \lfloor a^n \rfloor^{1/n}$  avec  $a \in \mathbb{R}_+^*$  fixé.

EXERCICE 35

Soit  $u$  la suite de terme général

$$u_n = \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n+1)}{2 \times 4 \times \dots \times (2n+2)} = \frac{\prod_{k=0}^n (2k+1)}{\prod_{k=0}^n (2k)}$$

1. Étudier la monotonie de  $u$  et en déduire que  $u$  est convergente.
2. Soit  $v$  la suite de terme général  $v_n = \frac{1}{\sqrt{n+2}}$ . Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{v_{n+1}}{v_n}$ .

3. En déduire que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n < v_n$ . Quel est la limite  $u$ ?

EXERCICE 36

1. Étudier la convergence des suites géométriques complexes.
2. Soit  $x$  et  $y$  deux suites réelles telles que
 
$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n - y_n) \\ y_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n) \end{cases}$$

Étudier la convergence de la suite complexe  $z = x + iy$ , puis celle des suites  $x$  et  $y$ .

EXERCICE 37

On pose  $u_0 = -1$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{2} \left( u_{n-1} + \sqrt{u_{n-1}^2 + 2^{-n}} \right)$$

1. Étudier la monotonie de  $u$ .
2. Démontrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_{n+1} - u_n \leq \frac{1}{2}(\sqrt{2})^{-n}$ .
3. En déduire que  $u$  converge.

DIVERS

EXERCICE 38

Soit  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

1. Démontrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$ .
2. La suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est-elle convergente?
3. Démontrer que  $S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ .

EXERCICE 39

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels convergeant vers 0 et telle que  $u_n + u_{n+1} \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$ .

1. Montre que si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante alors  $u_n \sim_{+\infty} \frac{1}{2n}$ .  
INDICATION : On pourra observer  $a_n = n(u_n + u_{n+1})$ .
2. Et si on ne suppose plus  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  décroissante?

INDICATION : On pourra observer  $u_n = \frac{1}{2n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ .

