Suites numériques

bcpst 1, 3/2018

Suites classiques

Exercice 1
Donner le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 3u_n$.

Exercice 2
On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -4u_n + 15$. Exprimer u_n en fonction de n et étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3
On cherche le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 25$, $u_1 = 31$ et

$$\forall n \in [\![2\,;+\infty [\![, \quad u_n - 4u_{n-1} + 4u_{n-2} = n^2 + n + 1.$$

1. Chercher une suite particulière $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la forme $\left(an^2 + bn + c\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation (mais pas nécessairement les conditions initiales).
2. Quelle relation vérifie la suite $(u_n - z_n)_{n\in\mathbb{N}}$? En déduire $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4

1. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(u_n + 2v_n) \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{3}(2u_n + v_n) \end{cases}$$

   Déterminer u_n et v_n en fonction de n, u_0 et v_0 de deux façons différentes :
   a) En établissant une relation de récurrence d'ordre 2 sur u et sur v.
   b) En faisant apparaître une suite matricielle géométrique.
2. On pose $a_0 = 1$ et $a_0 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = \sqrt[3]{a_n b_n^2} \\ b_{n+1} = \sqrt[3]{a_n^2 b_n} \end{cases}$$

   Vérifier que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies. Les expliciter en fonction de n et déterminer leurs limites respectives.

Exercice 5
On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$. Exprimer u_n en fonction de n et étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Indication : *On pourra définir correctement et étudier la suite $v_n = \ln(u_n)$.*

Exercice 6 — Pas classiques, mais à savoir faire.

1. Déterminer toutes les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + n^2$.
2. Déterminer toutes les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + 2^n$.
3. Déterminer toutes les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = (n+1)^2 u_n$.
4. Déterminer toutes les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2^n u_n$.

★ **Exercice 7 — À comprendre**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $f_n(x) = x^n + \ln x$.
1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution. On note u_n cette solution.
2. Déterminer le signe de $f_n(0)$ et de $f_n(1)$. En déduire que $u_n \in \,]0\,;1[$.
3. Calculer $f_{n+1}(u_n)$ et en déduire la monotonie de u, puis sa convergence. Quelle est sa limite ?

Élémentaires

Exercice 8
Vrai ou faux ?
1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et minorée par 2, alors elle converge vers 2.
2. Le produit de deux suites minorées est une suite minorée.
3. Si $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.
4. Si u et v sont deux suites bornées alors uv est une suite bornée.

5. Si u et v sont deux suites, si u et uv sont bornées, alors v est bornée.
6. La suite $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.
7. Toute suite convergente est monotone.
8. Toute suite monotone est convergente.
9. Si $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 9

Quel est le plus grand terme de la suite définie par

1. $u_n = -3n^2 + 19n - 28$;
2. $u_n = \dfrac{(3{,}5)^n}{n!}$;
3. $u_n = \dfrac{6^n}{n!}$.

Exercice 10

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers relatifs. Montrer que si u est convergente alors elle est stationnaire (c'est-à-dire constante à partir d'un certain rang).

Études de convergence

Exercice 11

À l'aide d'un encadrement, montrer que la suite de terme général

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

est convergente et donner sa limite.

Exercice 12

1. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \;\; \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{k}}$$

En déduire le comportement de la suite de terme général $\quad u_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Exercice 13

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Convergence et limite éventuelle des suites définies par

$$(1) \quad u_n = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}; \quad (2) \quad u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor;$$

$$(3) \quad u_n = \frac{\lfloor 2^n x \rfloor}{\lfloor 3^n x \rfloor}.$$

Exercice 14

Étude de $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

1. Démontrer que $\forall x \in [\,0\,;\,1\,],\, x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x$.
2. En déduire un encadrement de u_n.
3. Limite et équivalent ?

Exercice 15 — Série harmonique

1. Démontrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$$

2. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k+1} \leqslant \ln(1+k) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$

3. On pose $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide de l'inégalité précédente, démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \;\; \ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant \ln(n+1) + \frac{n}{n+1}$$

4. Étudier alors la convergence de $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
5. Démontrer que $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Exercice 16 — Moyenne arithmético-géométrique

Soit a et b deux réels positifs tels que $0 < a < b$. On définit les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$u_0 = a, \;\; v_0 = b,$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, \;\; u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, \;\; v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

1. a) Montrer que $\forall (x, y) \in {\mathbb{R}_+}^2$, $\dfrac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$.

   b) Montrer par récurrence, en utilisant le résultat de la question précédente, que

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \;\; a \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant b.$$

   c) En déduire que les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.
   On note $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $l' = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
   Justifier avec soin que $0 < l \leqslant l'$.

2. a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ v_{n+1}-u_{n+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{v_n}-\sqrt{u_n})^2.$$

puis que

$$l'-l = \frac{1}{2}\left(\sqrt{l'}-\sqrt{l}\right)^2.$$

b) Montrer que si $l \neq l'$ alors $\sqrt{l'}+\sqrt{l} = \frac{1}{2}(\sqrt{l'}-\sqrt{l})$.

c) En tirant une contradiction du résultat précédent, en déduire que $l = l'$.
On appelle la limite commune des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la moyenne arithmético-géométrique de a et b.

3. a) Que valent les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand $a = 0$ et $b > a$? Quelles sont leurs limites ?

b) Que valent les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand $a = b$? Quelles sont leurs limites ?

Exercice 17

Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ x-\frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$$

En déduire la convergence et la limite de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$.

Exercice 18 — Série exponentielle

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$.

1. a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad n! \geqslant 2^{n-1}$

b) En déduire que la suite u est majorée.

c) Démontrer que la suite u est convergente.

2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = u_n + \dfrac{1}{n\cdot n!}$.
Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes, et retrouver le résultat précédent.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n e^{-t}}{n!}\,dt$.

a) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \dfrac{1}{e}\dfrac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$.

b) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, $eI_0 = u_n + eI_n - 1$.

c) Démontrer que $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

d) En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Calculs de limite

Exercice 19

Calculer les limites quand n tend vers $+\infty$ de

1. $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$;
2. $b_n = \dfrac{7^{n+1}+6^{n+1}}{7^n+6^n}$;
3. $c_n = \dfrac{n^2-6n+3}{n^4+2n}$;
4. $d_n = 2^n \sin(\theta/2^n)$;
5. $e_n = \left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n}\right)^n$;
6. $f_n = \sqrt[n]{n^2}$.

Exercice 20

À l'aide d'équivalents, calculer les limites en $+\infty$ des suites suivantes :

1. $a_n = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$;
2. $c_n = \dfrac{1}{n}(\cos(1/n)-1)^{-1}(\sqrt[3]{1+1/n}-1)$;
3. $d_n = \dfrac{n^2+\cos n}{2^n+\sin n}$;
4. $e_n = \dfrac{e^{1/\sqrt{n}}-1}{\sqrt{n}-\sqrt{n+2}}$;
5. $f_n = \dfrac{(\ln n)^2+\sqrt{n^2+1}}{\cos(n!)+n^2}$;
6. $g_n = \dfrac{1000^n+n!}{n!+n^{1000}}$;
7. $l_n = \sqrt{2n+1}+2n+\ln n$
8. $m_n = \dfrac{\exp(\sin(1/n))-1}{(1/2)^n+n^2}$;
9. $r_n = \dfrac{\sqrt[3]{1+\sin(1/n)}-e^{1/3n}}{\sin(1/n)+\tan(1/n)}$.

Exercice 21

Donner le terme général des suites :

1. $u_0 = 1,\ u_1 = 1,\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{1}{2}u_n$;
2. $u_0 = 1,\ u_1 = 1,\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 10u_{n+1} - 21u_n$;
3. $u_0 = 1,\ u_1 = 1,\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$;
4. $u_0 = 1,\ u_1 = 1,\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} + 2u_n$;

Suites adjacentes

Exercice 22

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes :

$$\forall n \in [\![3\ ;\ +\infty [\![,\ \ u_n = \sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k^2+1},$$
$$v_n = u_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}$$

Exercice 23

Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente en montrant que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k^2},\quad u_n=S_{2n},\quad v_n=S_{2n+1}.$$

Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de sa limite.

Exercice 24

Soient a_0 et b_0 deux réels fixés. On définit par récurrence les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_{n+1}=\dfrac{2a_n+b_n}{3}$ et $b_{n+1}=\dfrac{a_n+2b_n}{3}$.

1. Montrer que ces deux suites sont adjacentes.
2. En calculant a_n+b_n, montrer qu'elles convergent vers $\dfrac{a_0+b_0}{2}$.

Suites $u_{n+1}=f(u_n)$

Exercice 25

1. Vérifier que la formule $f(x)=\dfrac{-x+18}{3x+2}$ définit une fonction de l'intervalle $[0,9]$ dans lui-même.
2. Montrer que la suite u définie par $u_0=3$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$ est bien définie
3. a) Montrer que la suite v donnée par $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n=\dfrac{u_n-2}{u_n+3}$ est bien définie.
   b) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique et déterminer sa raison.
   c) En exprimant u_n en fonction de v_n, donner une expression de u_n en fonction de n.
4. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de la série de terme général u_n.

Exercice 26

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0=a\in\mathbb{R}_+^*$ et $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=\sqrt{u_n^2+u_n}$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est elle majorée ?

Exercice 27

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_1=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad u_{n+1}=\sqrt{1+u_n}$.

Exercice 28

Étude de la suite définie par $u_0=1,\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=\dfrac{u_n}{u_n^2+1}$

Exercice 29

Étude de la suite définie par $u_0=1,\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=\dfrac{1}{2+u_n}$

1. Étudier la fonction $f\ :\ x\mapsto\dfrac{1}{2+x}$ sur l'intervalle I qui vous semble le plus judicieux.
2. Montrer que la suite u est bien définie.
3. Étudier les points fixes de f. On notera α le point fixe positif de f.
4. a) Montrer que $\forall x\in[0\,;1],\quad \left|f'(x)\right|\leqslant\dfrac{1}{4}$.
   b) En déduire que $\forall n\in\mathbb{N},\quad |u_{n+1}-\alpha|\leqslant\dfrac{1}{4}|u_n-\alpha|$.
   c) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\quad |u_n-\alpha|\leqslant\left(\dfrac{1}{4}\right)^n|1-\alpha|$.
   Montrer que u est convergente. Que pouvez-vous dire de la monotonie de u ?

Exercice 30

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

1. $u_0=1\qquad \forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=\dfrac{u_n}{1+u_n}$.
2. $u_1=1,\quad \forall n\in\mathbb{N}^*,\quad u_{n+1}=\sqrt{u_n^2+\dfrac{1}{2^n}}$.
3. $u_0\in\mathbb{R},\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=\dfrac{1}{n}\mathrm{e}^{-u_n}$. (Donner un équivalent de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$)

Exercice 31

Étude de la suite définie par $u_0\in\mathbb{R}_+^*,\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=\dfrac{2}{u_n^2+1}$

1. Étudier la fonction $f\ :\ x\mapsto\dfrac{2}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Étudier les points fixes de f.
3. On pose $g=f\circ f$.
   a) Montrer que, pour $x\in\mathbb{R}_+^*$, $g\circ g(x)-x=-\dfrac{(x-1)^3(x^2+x+2)}{(1+x^2)^2+4}$.
   b) On suppose $u_0\in[0\,;1[$. En déduire la monotonie de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer alors que u est convergente.
   c) Traiter le cas $u_0\in[1\,;+\infty[$.

Étude de suites

Exercice 32

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée telle que la suite $(u_{n+1}-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice 33

Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, alors la suite de terme général $v_n = \dfrac{1}{n+1}(u_0 + u_1 + \cdots + u_n)$ est monotone et de même monotonie que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 34

Étude de la convergence de la suite de terme général $u_n = \lfloor a^n \rfloor^{1/n}$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$ fixé.

Exercice 35

Soit u la suite de terme général

$$u_n = \frac{1\times 3\times\cdots\times(2n+1)}{2\times 4\times\cdots\times(2n+2)} = \frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(2k+1)}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(2k)}$$

1. Étudier la monotonie de u et en déduire que u est convergente.
2. Soit v la suite de terme général $v_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+2}}$.
   Montrer que $\quad \forall n\in\mathbb{N}, \quad 0 < \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.
3. En déduire que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n < v_n$. Quel est la limite u ?

Exercice 36

1. Étudier la convergence des suites géométriques complexes.
2. Soit x et y deux suites réelles telles que

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{1}{2}(x_n - y_n) \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{2}(x_n + y_n) \end{cases}$$

   Étudier la convergence de la suite complexe $z = x + iy$, puis celle des suites x et y.

Exercice 37

On pose $u_0 = -1$ et

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \ u_n = \frac{1}{2}\left(u_n + \sqrt{u_n^2 + 2^{-n}}\right)$$

1. Étudier la monotonie de u.
2. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^{-n}$.
3. En déduire que u converge.

Divers

Exercice 38

Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

1. Démontrer que $\forall n\in\mathbb{N}, S_{2n} - S_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.
2. La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle convergente ?
3. Démontrer que $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Exercice 39

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels convergeant vers 0 et telle que $u_n + u_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

1. Montre que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante alors $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$.
   INDICATION : *On pourra observer* $a_n = n(u_n + u_{n+1})$.
2. Et si on ne suppose plus $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante ?
   INDICATION : *On pourra observer* $u_n = \dfrac{1}{2n} + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.