Sommes

BCPST 1, 9/2018

Les bases

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Écrire à l'aide du signe $\sum$ les sommes suivantes, pour $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ une partie finie de $\mathbb{R}$:

1. somme de tous les éléments de E ;
2. somme des inverses des éléments de E (quand cet inverse existe) ;
3. somme des éléments de E qui sont des entiers ;
4. somme des éléments de E multiplié par leur successeur dans l'énumération de E (quand il existe).

Exercice 2

Soit i, j et n trois entiers naturels non nuls, avec $j \geqslant i$. Que valent les sommes ci-dessous ?

$$\sum_{k=1}^{n} 0 \quad ; \quad \sum_{k=1}^{n} 1 \quad ; \quad \sum_{k=0}^{n} 1 \quad ; \quad \sum_{k=1}^{n} n \quad ; \quad \sum_{k=i}^{j} 1.$$

Exercice 3 — *Indices pairs et impairs*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1 ; n]\!]$.

1. Quel est le k–ième nombre pair ? Le k–ième nombre impair ?
2. Écrire et calculer la somme
   a) des entiers pairs compris entre 1 et $2n$;
   b) des entiers impairs compris entre 1 et $2n$ (deux écritures possibles) ;
   c) des entiers pairs compris entre 0 et n.

Exercice 4

Parmi les expressions suivantes, lesquelles sont égales à n, lesquelles sont différentes ? Justifier.

$$\sum_{k=0}^{n} 1 \qquad \sum_{k=0}^{n-1} 1 \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{n} \qquad \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k}{n}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{h=0}^{n-1} h \qquad \sum_{k=1}^{n} k - \sum_{h=2}^{n-1} h \qquad \sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{h=2}^{n-2} h$$

$$\sum_{k=n}^{n} 1 \qquad \sum_{k=n}^{n} k.$$

Exercice 5

Soient n et k deux entiers tels que $1 \leqslant k \leqslant n$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies ?

1. $\dfrac{n!}{(n-k)!}$ est un nombre entier ;
2. $\dfrac{k!}{n!}$ est un nombre entier ;
3. il y a $n-k$ entiers compris entre k et n ;
4. la somme des entiers compris entre k et n est $(n+k)(n-k+1)/2$.

Exercice 6

Soient n un entier non nul. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies ?

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 3^k = \frac{3^{n+1}-1}{2}$;
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} 3^k = \frac{3^{n-1}-1}{2}$;
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k = 4^n$;
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^k = 4^n - 3$;
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 3^k = 4^n - 3^n$;
6. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} 3^k = 4^n - 1 - 3n$;

Exercice 7 — *Sommes télescopiques*

1. Soit $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $n+1$ réels ($n \in \mathbb{N}$). Montrer que

$$\sum_{i=0}^{n} x_i - x_{i+1} = x_0 - x_{n+1}$$

$$\text{et} \qquad \sum_{i=0}^{n} x_{i+1} - x_i = x_{n+1} - x_0$$

   Que valent $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i - x_{i+1}$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{i+1} - x_i$?

2. Calculer explicitement les sommes suivantes :
   a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

   Indication : $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$

   b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$;

   c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{2k+1}{2}a\right) \cos\left(\frac{a}{2}\right)$

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$.

Exercice 8

Soit $a \in [\,0\,;\,1\,[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a^k}{(1-a^k)(1-a^{k+1})}$$

En considérant la somme $(1-a)u_n$, montrer que

$$S_n = \frac{a(1-a^n)}{(1-a)^2(1-a^{n+1})}$$

Exercice 9

1. Soit $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ une famille de $n+1$ réels. Démontrer que

$$\sum_{k=0}^{n-1} k(a_k - a_{k+1}) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) - n a_n$$

On pourra faire apparaître une somme télescopique.

2. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k2^k$.

Calculs de sommes

Exercice 10

Calculer en fonction de l'entier naturel n les sommes suivantes

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k(1-k)$;
2. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+2} k(1-k)$;
3. $\displaystyle\sum_{k=n}^{n^2} k^2$;
4. $\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} k^2$.

Exercice 11

Calculer les sommes suivantes

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+2} k(2-k)$;
2. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} (k+1)(k-1)$;
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k$;
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(n-k)k}{2}$.

Exercice 12

Dans cet exercice n, m et p sont trois entiers non nuls, a et x deux complexes. Calculer les sommes suivantes

$$\sum_{k=0}^{n} x^{2k} \qquad \sum_{k=0}^{n} x^{2k+1} \qquad \sum_{k=0}^{n} a^k 2^{3k} x^{-k} \quad (\text{où } x \neq 0)$$

$$\sum_{i=0}^{n} (i^2+n+3) \qquad \sum_{0\leqslant k\leqslant n} \frac{p}{q+1}$$

Coefficients binomiaux

Exercice 13

Calculer les sommes suivantes

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{3}{k}$;
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}$;
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k-1}$;
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-3)^{n-k}$;
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k} 2^{k-1}$;
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k-1} 3^k 2^{-k}$.

Exercice 14

Calculer les sommes suivantes

1. $\sum_{p=0}^{n} p\binom{n}{p}$
2. $\sum_{p=0}^{n} p(-3)^p\binom{n}{p}$

Exercice 15

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

Exercice 16

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{R}$. On pose $S_n(q) = \sum_{k=0}^{n} q^k$

1. En exprimant $(1-q)S_n$, calculer S_n en fonction de q et n.
2. Soit $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, tels que $j \leqslant i$. Calculer $\sum_{k=i}^{j} q^k$.
3. a) Justifier que $S_n(q)$ définit une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer sa dérivée de deux façons différentes.
   b) En déduire la valeur de $T_n(q) = \sum_{k=0}^{n} kq^{k-1}$.
4. Comment calculer $U_n(q) = \sum_{k=1}^{n} \frac{q^k}{k+1}$?

Exercice 17

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \qquad B_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$$

$$P_n = \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} \qquad \text{et} \qquad I_n = \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k}$$

On calculera $P_n + I_n$ et $P_n - I_n$.

Exercice 18

Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geqslant 2$ et $x \in \mathbb{R}$. On cherche à calculer les sommes

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1} \quad T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}x^{k-2}$$

Utiliser la petite formule et la formule du binôme pour calculer $S_n(x)$ et $T_n(x)$.

Exercice 19

Soit n et p deux entiers naturels. Montrer par récurrence que $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

Exercice 20

Démontrer (k, p et n étant des entiers naturels)

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \binom{p}{k}\binom{n}{p}$$

Exercice 21

Montrer les formules suivantes (en utilisant éventuellement l'exercice 20)

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 2^p\binom{n}{p}$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} (-1)^k\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 0$
3. ★ $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}\Big/\binom{n}{k} = \frac{n+1}{n+1-m}$

Autres grands opérateurs

Exercice 22

Que valent les expressions suivantes ?

1. $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} k$
2. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k$
3. $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} \left]i\,;i+1\right[$
4. $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} \left[i\,;i+1\right[$
5. $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} \left[i\,;i+1\right]$
6. $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} \left[0\,;\frac{1}{i}\right]$

Exercice 23

Calculer, en fonction de n, les produits suivants

1. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (2k)$;
2. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (2k+1)$;
3. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1-\frac{1}{k}\right)$.
4. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1-\frac{1}{k^2}\right)$.

Exercice 24

1. Pour k et n dans $\mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} i$, $\displaystyle\prod_{i=k}^{k+n} i$.
2. a) Montrer par récurrence sur n que
$$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{p+i}{p} = \binom{p+n}{p+1}$$
   b) Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=0}^{p-1}(i+j)$.

Exercices d'entraînement

Exercice 25

Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} k! \leqslant (n+1)!$$

Exercice 26

Soit a et r dans $\mathbb{R}$. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de raison r et de premier term a.

1. Exprimer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n, a et r.
2. Exprimer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (u_k)^2$ en fonction de n, a et r.

Exercice 27

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $(a_1,\dots,a_n)$ et $(b_1,\dots,b_n)$ deux n-uplets de nombres réels. Démontrer l'identité

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 + \sum_{1\leqslant k<l\leqslant n} (a_k b_l - a_l b_k)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$

En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}$$

Exercice 28

Soit $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{p}{q}\right)^k = \frac{1}{q^{n+1}} \frac{p^{n+1} - q^{n+1}}{p - q}$$

Exercice 29

Montrer les égalités suivantes

1. $\forall n \geqslant 0, \quad \sum_{k=0}^{n} k(k!) = (n+1)! - 1$
2. $\forall n \geqslant 1, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

Exercice 30

Montrer par récurrence que pour n et k dans $\mathbb{N}^*$,

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{(p-1)!}{(p+k)!} = \frac{1}{k\,.\,k!} - \frac{n!}{k(n+k)!}$$

Exercice 31

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\omega = \exp\left(\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}\right)$. Calculer

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k$$
$$T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}$$
$$U_n = \sum_{k=0}^{n} \left|\omega^k - 1\right|$$
$$V_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \omega^k.$$

Exercice 32

1. Montrer que, pour tout n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$, on a

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j$$

2. En déduire la valeur de $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} i \times j$.

Exercice 33

Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k^2$.

Indication : *On pourra calculer S_0 et S_1, deviner une formule générale, et la démontrer par récurrence.*