

Les bases

Ex. 1 — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Écrire à l'aide du signe \sum les sommes suivantes, pour $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ une partie finie de \mathbb{R} :

- somme de tous les éléments de E ;
- somme des inverses des éléments de E (quand cet inverse existe) ;
- somme des éléments de E qui sont des entiers ;
- somme des éléments de E multiplié par leur successeur dans l'énumération de E (quand il existe) ;
- somme des éléments de E multipliés par leur indice.

Ex. 2 — Soit i, j et n trois entiers non nuls, avec $j \geq i$. Que valent les sommes ci-dessous ?

$$\sum_{k=1}^n 0 \quad ; \quad \sum_{k=1}^n 1 \quad ; \quad \sum_{k=1}^n n \quad ; \quad \sum_{k=0}^n 1 \quad ; \quad \sum_{k=i}^j 1.$$

Ex. 3 — Parmi les expressions suivantes, lesquelles sont égales à n , lesquelles sont différentes ? Justifier.

$$\sum_{k=0}^n 1 \quad \sum_{k=0}^{n-1} 1 \quad \sum_{k=1}^n \frac{2k}{n} \quad \sum_{k=1}^n \frac{2k}{n-1} \quad \sum_{k=1}^n k - \sum_{h=0}^{n-1} h \quad \sum_{k=1}^n k - \sum_{h=2}^{n-1} h \quad \sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{h=2}^{n-2} h \quad \sum_{k=n}^n 1$$

Ex. 4 — Soient n et k deux entiers tels que $1 \leq k \leq n$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies ?

- $\frac{n!}{(n-k)!}$ est un nombre entier ;
- $\frac{k!}{n!}$ est un nombre entier ;
- il y a $n-k$ entiers compris entre k et n ;
- il y a $(n-k+1)$ couples d'entiers compris entre k et n ;
- la somme des entiers compris entre k et n est $(n-k)(n-k+1)/2$;
- la moyenne des entiers compris entre k et n est $(n-k)/2$.

Ex. 5 — Soient n un entier non nul. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies ?

- $\sum_{k=0}^n 3^k = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$;
- $\sum_{k=1}^{n-1} 3^k = \frac{3^{n-1} - 1}{2}$;

- $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k = 4^n$;
- $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 3^k = 4^n - 3$;
- $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 3^k = 4^n - 3^n$;
- $\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} 3^k = 4^n - 1 - 3n$;

Ex. 6 — SOMMES TÉLESCOPIQUES

- Soit $x_0, x_1, \dots, x_n, n+1$ réels ($n \in \mathbb{N}$). Montrer que

$$\sum_{i=0}^n x_i - x_{i+1} = x_0 - x_{n+1} \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^n x_{i+1} - x_i = x_{n+1} - x_0$$

Que valent $\sum_{i=1}^n x_i - x_{i+1}$ et $\sum_{i=1}^n x_{i+1} - x_i$?

- Calculer explicitement les sommes suivantes :

a) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$

INDICATION : $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

b) $\sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$;

c) $\sum_{k=2}^n \ln\left(\frac{k^2}{k^2-1}\right)$.

Ex. 7 — Soit $a \in [0; 1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{a^k}{(1-a^k)(1-a^{k+1})}$$

En considérant la somme $(1-a)u_n$, montrer que

$$S_n = \frac{a(1-a^n)}{(1-a)^2(1-a^{n+1})}$$

Ex. 8 — 1. Soit $(a_k)_{0 \leq k \leq n}$ une famille de $n+1$ réels. Démontrer que

$$\sum_{k=0}^{n-1} k(a_k - a_{k+1}) = \left(\sum_{k=1}^n a_k\right) - na_n$$

On pourra faire apparaître une somme télescopique.

- En déduire $\sum_{k=0}^{n-1} k2^k$.

Ex. 9 — INDICES PAIRS ET IMPAIRS

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

- Quel est le k -ième nombre pair ? Le k -ième nombre impair ?
- Écrire et calculer la somme
 - des entiers pairs compris entre 1 et $2n$;

- b) des entiers impairs compris entre 1 et $2n$ (deux écritures possibles) ;
 c) des entiers pairs compris entre 0 et n .

Sommes classiques

Ex. 10 — Calculer en fonction de l'entier naturel n les sommes suivantes :

$$1. \sum_{k=1}^{n+1} k(1-k); \quad 3. \sum_{k=n}^{n^2} k^2;$$

$$2. \sum_{k=2}^{n+2} k(1-k); \quad 4. \sum_{k=-n}^n k^2.$$

Ex. 11 — Calculer les sommes suivantes :

$$1. \sum_{k=2}^n (k+1)(k-1); \quad 3. \sum_{k=0}^n \frac{(n-k)k}{2}.$$

$$2. \sum_{k=0}^n k(k^2-1);$$

Ex. 12 — Dans cet exercice n, m et p sont trois entiers non nuls, a et x deux complexes. Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^n x^{2k} \sum_{k=0}^n x^{2k+1} \sum_{k=0}^n a^k 2^{3k} x^{-k} \quad (\text{où } x \neq 0)$$

$$\sum_{i=0}^n (i^2 + n + 3) \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{p}{q+1}$$

Ex. 13 — Calculer les sommes suivantes

$$1. \sum_{k=0}^n \binom{3}{k}; \quad 4. \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-3)^{n-k};$$

$$2. \sum_{k=1}^n \binom{n}{k}; \quad 5. \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k} 2^{k-1};$$

$$3. \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k-1}; \quad 6. \sum_{k=0}^n \binom{n}{k-1} 3^k 2^{-k}.$$

Ex. 14 — Calculer les sommes suivantes

$$1. \sum_{p=0}^n p \binom{n}{p}$$

$$2. \sum_{p=0}^n p (-3)^p \binom{n}{p}$$

Ex. 15 — Montrer que $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

Ex. 16 — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

$$A_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \quad B_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$$

$$P_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^n \binom{n}{k} \quad \text{et} \quad I_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^n \binom{n}{k}$$

On calculera d'abord $P_n + I_n$ et $P_n - I_n$.

Ex. 17 — Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geq 2$ et $x \in \mathbb{R}$. On cherche à calculer les sommes

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^{k-1} \quad T_n(x) = \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} x^{k-2}$$

Utiliser la petite formule et la formule du binôme pour calculer $S_n(x)$ et $T_n(x)$.

Ex. 18 — 1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Montrer que $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

2. Soit n et p deux entiers naturels. Montrer par récurrence que $\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

Ex. 19 — 1. Démontrer, à partir du résultat de l'exercice 18, que $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ (considérer le cas $p = 1$).

2. Retrouver de même $\sum_{k=1}^n k^2$.

3. Calculer $\sum_{k=1}^n k^4$.

Ex. 20 — Démontrer (k, p et n étant des entiers naturels)

$$\binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = \binom{p}{k} \binom{n}{p}$$

Ex. 21 — Montrer les formules suivantes (en utilisant éventuellement l'exercice 20)

$$1. \sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = 2^p \binom{n}{p}$$

$$2. \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = 0$$

$$\star 3. \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} / \binom{n}{k} = \frac{n+1}{n+1-m}$$

Autres grands opérateurs

Ex. 22 — Que valent les expressions suivantes ?

$$1. \prod_{k=0}^n k \quad 4. \bigcup_{i=1}^n [i; i+1[$$

$$2. \prod_{k=1}^n k \quad 5. \bigcap_{i=1}^n [i; i+1]$$

$$3. \bigcup_{i=1}^n]i; i+1[\quad 6. \bigcap_{i=1}^n \left[0; \frac{1}{i}\right]$$

Ex. 23 — Calculer, en fonction de n , les produits suivants :

$$1. \prod_{k=1}^n (2k); \quad 3. \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right).$$

$$2. \prod_{k=1}^n (2k+1); \quad 4. \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right).$$

Ex. 24 — 1. Pour k et n dans \mathbb{N}^* , calculer $\prod_{i=1}^n i$,

$$\prod_{i=k}^{k+n} i.$$

2. a) Montrer par récurrence sur n que

$$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{p+i}{p} = \binom{p+n}{p+1}$$

b) Calculer $\sum_{i=1}^n \prod_{j=0}^{p-1} (i+j)$.

Exercices d'entraînement

Ex. 25 — Soit a et r dans \mathbb{R} . On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite arithmétique de raison r et de premier term a .

1. Exprimer $\sum_{k=0}^n u_k$ en fonction de n , a et r .

2. Exprimer $\sum_{k=0}^n (u_k)^2$ en fonction de n , a et r .

Ex. 26 — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

1. Si $1 \leq j \leq i \leq n$, $\sum_{k=1}^i x_k + \sum_{k=j}^n x_k = \sum_{k=1}^n x_k +$

$$\sum_{k=j}^i x_k;$$

2. $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j = \left[\sum_{i=1}^n x_i \right] \left[\sum_{i=1}^n y_i \right];$

3. $\left[\sum_{i=1}^n x_i \right]^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j.$

Ex. 27 — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient (a_1, \dots, a_n) et (b_1, \dots, b_n) deux n -uplets de nombres réels. Démontrer l'identité

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 + \sum_{1 \leq k < l \leq n} (a_k b_l - a_l b_k)^2 \\ = \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right). \end{aligned}$$

En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}$$



Ex. 28 — Soit $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{p}{q} \right)^k = \frac{1}{q^{n+1}} \frac{p^{n+1} - q^{n+1}}{p - q}$$

Ex. 29 — Montrer les égalités suivantes :

1. $\forall n \geq 0, \sum_{k=0}^n k(k!) = (n+1)! - 1$

2. $\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

Ex. 30 — Montrer par récurrence que pour n et k dans \mathbb{N}^* ,

$$\sum_{p=1}^n \frac{(p-1)!}{(p+k)!} = \frac{1}{k \cdot k!} - \frac{n!}{k(n+k)!}$$

Ex. 31 — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$.

Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k$, $T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k^2}$ et $U_n =$

$$\sum_{k=0}^n |\omega^k - 1| V_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \omega^k.$$

Ex. 32 — 1. Montrer que, pour tout n -uplet (x_1, \dots, x_n) , on a :

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$$

2. En déduire la valeur de $\sum_{1 \leq i < j \leq n} i \times j$.

Ex. 33 — Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k k^2$.

INDICATION : On pourra calculer S_0 et S_1 , deviner une formule générale, et la démontrer par récurrence.