Les bases

Ex. 1 — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Écrire à l'aide du signe $\sum$ les sommes suivantes, pour $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ une partie finie de $\mathbb{R}$:

1. somme de tous les éléments de E ;
2. somme des inverses des éléments de E (quand cet inverse existe) ;
3. somme des éléments de E qui sont des entiers ;
4. somme des éléments de E multiplié par leur successeur dans l'énumération de E (quand il existe) ;
5. somme des éléments de E multipliés par leur indice.

Ex. 2 — Soit i, j et n trois entiers non nuls, avec $j \geqslant i$. Que valent les sommes ci-dessous ?

$$\sum_{k=1}^{n} 0 \quad ; \quad \sum_{k=1}^{n} 1 \quad ; \quad \sum_{k=1}^{n} n \quad ; \quad \sum_{k=0}^{n} 1 \quad ; \quad \sum_{k=i}^{j} 1.$$

Ex. 3 — INDICES PAIRS ET IMPAIRS
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1 ; n]\!]$.

1. Quel est le k–ième nombre pair ? Le k–ième nombre impair ?
2. Écrire et calculer la somme
   a) des entiers pairs compris entre 1 et $2n$;
   b) des entiers impairs compris entre 1 et $2n$ (deux écritures possibles) ;
   c) des entiers pairs compris entre 0 et n.

Ex. 4 — Parmi les expressions suivantes, lesquelles sont égales à n, lesquelles sont différentes ? Justifier.

$$\sum_{k=0}^{n} 1 \qquad \sum_{k=0}^{n-1} 1 \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{n} \qquad \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k}{n}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{h=0}^{n-1} h \qquad \sum_{k=1}^{n} k - \sum_{h=2}^{n-1} h \qquad \sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{h=2}^{n-2} h$$

$$\sum_{k=n}^{n} 1 \qquad \sum_{k=n}^{n} k.$$

Ex. 5 — Soient n et k deux entiers tels que $1 \leqslant k \leqslant n$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies ?

1. $\dfrac{n!}{(n-k)!}$ est un nombre entier ;
2. $\dfrac{k!}{n!}$ est un nombre entier ;
3. il y a $n-k$ entiers compris entre k et n ;
4. il y a $(n-k+1)$ couples d'entiers compris entre k et n ;
5. la somme des entiers compris entre k et n est $(n-k)(n-k+1)/2$;
6. la moyenne des entiers compris entre k et n est $(n-k)/2$.

Ex. 6 — Soient n un entier non nul. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies ?

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 3^k = \frac{3^{n+1}-1}{2}$;
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} 3^k = \frac{3^{n-1}-1}{2}$;
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k = 4^n$;
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^k = 4^n - 3$;
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 3^k = 4^n - 3^n$;
6. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} 3^k = 4^n - 1 - 3n$;

Ex. 7 — SOMMES TÉLESCOPIQUES

1. Soit x_0, x_1, …, x_n, $n+1$ réels ($n \in \mathbb{N}$). Montrer que
$$\sum_{i=0}^{n} x_i - x_{i+1} = x_0 - x_{n+1} \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=0}^{n} x_{i+1} - x_i = x_{n+1} - x_0$$
   Que valent $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i - x_{i+1}$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{i+1} - x_i$?
2. Calculer explicitement les sommes suivantes : À REFAIRE
   a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$
   INDICATION : $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$
   b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$;
   c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$
   $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2}{k^2-1}\right)$.

Ex. 8 — Calculer pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{iktheta}$

Ex. 9 — Soit $a \in [\, 0 ; 1 \,[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a^k}{(1-a^k)(1-a^{k+1})}$$

En considérant la somme $(1-a)u_n$, montrer que

$$S_n = \frac{a(1-a^n)}{(1-a)^2(1-a^{n+1})}$$

Ex. 10 — 1. Soit $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ une famille de $n+1$ réels.

Démontrer que
$$\sum_{k=0}^{n-1} k(a_k - a_{k+1}) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) - na_n$$
On pourra faire apparaître une somme télescopique.

2. En déduire la valeur de $\sum\limits_{k=0}^{n-1} k2^k$.

Calculs de sommes

Ex. 11 — Calculer en fonction de l'entier naturel n les sommes suivantes

1. $\sum\limits_{k=1}^{n+1} k(1-k)$;
2. $\sum\limits_{k=2}^{n+2} k(1-k)$;
3. $\sum\limits_{k=n}^{n^2} k^2$;
4. $\sum\limits_{k=-n}^{n} k^2$.

Ex. 12 — Calculer les sommes suivantes

1. $\sum\limits_{k=1}^{n+2} k(2-k)$;
2. $\sum\limits_{k=2}^{n} (k+1)(k-1)$;
3. $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k k$;
4. $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(n-k)k}{2}$.

Ex. 13 — Dans cet exercice n, m et p sont trois entiers non nuls, a et x deux complexes. Calculer les sommes suivantes
$$\sum_{k=0}^{n} x^{2k} \quad \sum_{k=0}^{n} x^{2k+1} \quad \sum_{k=0}^{n} a^k 2^{3k} x^{-k} \ \ (\text{où } x \neq 0)$$
$$\sum_{i=0}^{n} (i^2+n+3) \quad \sum_{0\leqslant k\leqslant n} \frac{p}{q+1}$$

Coefficients binomiaux

Ex. 14 — Calculer les sommes suivantes

1. $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{3}{k}$;
2. $\sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k}$;
3. $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k-1}$;
4. $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-3)^{n-k}$;
5. $\sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k} 2^{k-1}$;
6. $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k-1} 3^k 2^{-k}$.

Ex. 15 — Calculer les sommes suivantes

1. $\sum\limits_{p=0}^{n} p\binom{n}{p}$
2. $\sum\limits_{p=0}^{n} p(-3)^p\binom{n}{p}$

Ex. 16 — Montrer que $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k+1}\dbinom{n}{k} = \dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

Ex. 17 — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes
$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$$
$$P_n = \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} \quad \text{et} \quad I_n = \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k}$$
On calculera $P_n + I_n$ et $P_n - I_n$.

Ex. 18 — Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geqslant 2$ et $x \in \mathbb{R}$. On cherche à calculer les sommes
$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1} \quad T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} x^{k-2}$$
Utiliser la petite formule et la formule du binôme pour calculer $S_n(x)$ et $T_n(x)$.

Ex. 19 — 1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0 \,;\, n]\!]$. Montrer que $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

2. Soit n et p deux entiers naturels. Montrer par récurrence que $\sum\limits_{k=p}^{n} \dbinom{k}{p} = \dbinom{n+1}{p+1}$.

Ex. 20 — Démontrer (k, p et n étant des entiers naturels)
$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \binom{p}{k}\binom{n}{p}$$

Ex. 21 — Montrer les formules suivantes (en utilisant éventuellement l'exercice **??**)

1. $\sum\limits_{k=0}^{p} \dbinom{n}{k}\dbinom{n-k}{p-k} = 2^p \dbinom{n}{p}$
2. $\sum\limits_{k=0}^{p} (-1)^k \dbinom{n}{k}\dbinom{n-k}{p-k} = 0$

★ 3. $\sum\limits_{k=0}^{m} \dbinom{m}{k} \Big/ \dbinom{n}{k} = \dfrac{n+1}{n+1-m}$

Autres grands opérateurs

Ex. 22 — Que valent les expressions suivantes ?

1. $\prod\limits_{k=0}^{n} k$
2. $\prod\limits_{k=1}^{n} k$
3. $\bigcup\limits_{i=1}^{n}]\, i \,;\, i+1 \,[$
4. $\bigcup\limits_{i=1}^{n} [\, i \,;\, i+1 \,[$
5. $\bigcap\limits_{i=1}^{n} [\, i \,;\, i+1 \,]$
6. $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \left[\, 0 \,;\, \dfrac{1}{i} \,\right]$

Ex. 23 — Calculer, en fonction de n, les produits suivants

1. $\prod\limits_{k=1}^{n} (2k)$;
2. $\prod\limits_{k=1}^{n} (2k+1)$;
3. $\prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 - \dfrac{1}{k}\right)$.
4. $\prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 - \dfrac{1}{k^2}\right)$.

Ex. 24 — 1. Pour k et n dans $\mathbb{N}^*$, calculer $\prod_{i=1}^{n} i$, $\prod_{i=k}^{k+n} i$.

2. a) Montrer par récurrence sur n que

$$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{p+i}{p} = \binom{p+n}{p+1}$$

.

b) Calculer $\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=0}^{p-1}(i+j)$.

Exercices d'entraînement

Ex. 25 — Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} k! \leqslant (n+1)!$$

Ex. 26 — Soit a et r dans $\mathbb{R}$. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de raison r et de premier term a.

1. Exprimer $\sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n, a et r.
2. Exprimer $\sum_{k=0}^{n} (u_k)^2$ en fonction de n, a et r.

Ex. 27 — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

1. Si $1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{i} x_k + \sum_{k=j}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=j}^{i} x_k$;
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i\, y_j = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right]\left[\sum_{i=1}^{n} y_i\right]$;
3. $\displaystyle\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right]^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i\, x_j$.

Ex. 28 — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $(a_1,\dots,a_n)$ et $(b_1,\dots,b_n)$ deux n-uplets de nombres réels. Démontrer l'identité

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 + \sum_{1\leqslant k<l\leqslant n} (a_k b_l - a_l b_k)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$

En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}$$

Ex. 29 — Soit $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{p}{q}\right)^k = \frac{1}{q^{n+1}}\,\frac{p^{n+1}-q^{n+1}}{p-q}$$

Ex. 30 — Montrer les égalités suivantes

1. $\forall n \geqslant 0$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k!) = (n+1)! - 1$
2. $\forall n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

Ex. 31 — Montrer par récurrence que pour n et k dans $\mathbb{N}^*$,

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{(p-1)!}{(p+k)!} = \frac{1}{k\,.\,k!} - \frac{n!}{k(n+k)!}$$

Ex. 32 — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$. Calculer

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k$$

$$T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}$$

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} \left|\omega^k - 1\right|$$

$$V_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}\omega^k.$$

Ex. 33 — 1. Montrer que, pour tout n-uplet $(x_1,\dots,x_n)$, on a

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j$$

2. En déduire la valeur de $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} i \times j$.

Ex. 34 — Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k^2$.

INDICATION : *On pourra calculer S_0 et S_1, deviner une formule générale, et la démontrer par récurrence.*

Ex. 35 — Montrer par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$