Calcul

Ex. 1 — Simplifier $\sqrt{5\sqrt{2}+7}-\sqrt{5\sqrt{2}-7}$.

Ex. 2 — Simplifier

$$\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}+\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$$

Ex. 3 — Simplifier

1. $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+2x-3}$;
2. $\dfrac{y^2+7y+10}{y^2-25}$;
3. $\dfrac{a^2+5a-14}{a^2-4a-21}$;
4. $\dfrac{x^2-2xy+y^2}{x-y}$.

Ex. 4 —

1. Quelles sont les valeurs de a et b tels que

$$\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{-1,2\}, \qquad \frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-2}=\frac{4x+1}{x^2-x-2}$$

2. Quelles sont les valeurs de a et b tels que

$$\forall z\in\mathbb{R}\backslash\{3,-2\}, \qquad \frac{a}{z-3}+\frac{b}{z+2}=\frac{z+7}{(z-3)(z+2)}$$

3. Quelle est la valeur de a tel que

$$\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{-1/2,-2\}, \qquad \frac{a}{2x+1}+\frac{1}{x+2}=\frac{4x+5}{(2x+1)(x+2)}$$

Ex. 5 — Quizz !

1. Quelle est la forme simplifiée de $(z^2+4z-5)/(z^2-4z+3)$?

   (a) $\dfrac{z+5}{z+3}$ (b) $\dfrac{z+5}{z-3}$

   (c) $\dfrac{z-5}{z+3}$ (d) $\dfrac{z-5}{z-3}$

2. Que vaut la somme $\dfrac{1}{w-2}+\dfrac{1}{w+7}$?

   (a) $\dfrac{5}{w^2+5w-14}$ (b) $\dfrac{5}{w^2+5w+14}$

   (c) $\dfrac{5}{w^2-5w+14}$ (d) $\dfrac{5}{w^2-5w-14}$

Équations

Ex. 6 — Discuter et résoudre, suivant les valeurs du paramètre m, les équations ou inéquations

1. $(m+1)x+2-m=0$;
2. $\dfrac{m}{x-1}\leqslant\dfrac{1}{x+2}$;
3. $\sqrt{2x+m}\geqslant x+1$.

Ex. 7 — Discuter et résoudre, suivant les valeurs des paramètres réels a, b et c, l'équation d'inconnue réelle x

$$\sqrt{a+x}+\sqrt{b+x}+\sqrt{c+x}=0$$

Ex. 8 — Résoudre les équations suivantes, d'inconnue réelle x

1. $(E_1) : x^3+4x^2+x-6=0$;
2. $(E_2) : 3x^4+5x^2-2=0$
3. $(E_3) : (\ln x)^2+3\ln x+2=0$
4. $(E_4) : \ln x+\ln(5-x)=-2$
5. $(E_5) : \sqrt{x^2-3}=5x-9$
6. $(E_6) : x=\sqrt{x}+2$
7. $(E_7) : \mathrm{e}^{2x}+3\mathrm{e}^{x}-1=0$
8. $(E_8) : \mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}=2$

Ex. 9 — Résoudre, avec l'inconnue réelle x

1. $(E_1) : x^3-x^2-x-2=0$;
2. $(E_2) : \mathrm{e}^{2x-2}+\mathrm{e}^{x+1}-2\mathrm{e}^4=0$
3. $(E_3) : \sqrt{x+4}+\sqrt{x+2}=1$
4. $(E_4) : \sqrt{x+4}-\sqrt{x+2}=1$

Ex. 10 — Résoudre avec $x\in\mathbb{R}$

1. $(I_1) : \dfrac{1}{4x-1}<\dfrac{1}{x^2+x+1}$
2. $(I_2) : \dfrac{2x+1}{x+1}<\dfrac{3x-2}{x+1}$
3. $(I_3) : 5\left(\dfrac{1}{3}\right)^x\leqslant 10^{-10}$
4. $(I_4) : \ln(3x+1)\leqslant\ln(2x-1)$
5. $(I_5) : \sqrt{x+5}\geqslant\sqrt{x^2-4}$

Ex. 11 — Résoudre avec $x\in\mathbb{R}$

1. $(I_1) : \dfrac{x}{x^2+1}\leqslant\dfrac{x-1}{(x-1)^2}$
2. $(I_2) : x+1>\sqrt{x^2+2x}$
3. $(I_3) : \ln(x^2-4\mathrm{e}^2)<1+\ln(3x)$

Ex. 12 — Résoudre dans $\mathbb{R}$ (x étant l'inconnue)

1. l'équation $\sqrt{4-x}=3-2x$;

2. l'inéquation $\sqrt{4-x} < 3-2x$;
3. l'inéquation $\sqrt{4-x} > 3-2x$.

Ex. 13 — Soit λ un réel donné.

1. Résoudre l'inéquation réelle $\frac{1}{x} < \lambda$.
2. Dans le plan muni d'un repère représenter l'ensemble E des points de coordonnées (x, y) tels que $\frac{x}{y} < \lambda$.

Expression du second degré

Ex. 14 — Résoudre en discutant suivant les valeurs du paramètre réel m l'équation

$$(m+1)2^x + (m-1)2^{-x} = 0$$

Ex. 15 — Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations

1. $\sqrt{x^2-x-2} \geqslant |x-2|$;
2. $\sqrt{x^2-x-2} \geqslant x-2$;
3. $\sqrt{x^2-x-2} \geqslant |3x+2|$;
4. $\sqrt{x^2-x-2} \geqslant 3x+2$.

Ex. 16 — Soit m un paramètre réel. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{1-x^2} \leqslant m-x$.

Ex. 17 — Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}$$

Ex. 18 — Résoudre l'équation d'inconnue réelle x

$$8^{6x} - 3 \times 8^{3x} - 4 = 0$$

★ **Ex. 19** — Déterminer les réels m tels que l'équation

$$(2m-1)x^2 + 2(m+1)x + m + 3 = 0$$

ait deux racines réelles inférieures ou égales à 1.

Ex. 20 — Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$.

1. Montrer que

$$\forall x \in [a\,;\,b], \quad (a-x)(x-b) \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}$$

2. Montrer que, pour $(x, y) \in [a\,;\,b]^2$,

$$\min\{(x-a)(b-y), (y-a)(b-x)\} \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}$$

Indication : *On pourra raisonner par l'absurde.*

Inégalités

Ex. 21 — Les ensembles suivants admettent-ils une borne supérieure ? Un plus grand élément ? Un plus petit élément ? Une borne inférieure ?

1. $A = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n} \text{ avec } n \in \mathbb{N}^*\right\}$;
2. $B = x \in \mathbb{Q} \text{ tel que } x^2 < 2$.

Ex. 22 — Résoudre dans $\mathbb{R}$,

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$$

Ex. 23 —
1. À quel ensemble appartient $1/x$ lorsque $-4 < x < 5$?
2. Pour quelles valeurs entières de n a-t-on $n^2 - 3n + 2 > 0$?
3. À quels ensembles appartiennent x^2 et x^3 lorsque $x \geqslant -2$?
4. Pour quelles valeurs de x a-t-on $x \geqslant x^2$? Et $x^2 \geqslant x$?

Ex. 24 —
1. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad x + \frac{1}{x} \geqslant 2$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $(i, j) \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$x^i + x^j \geqslant 2x^{\frac{i+j}{2}}$$

3. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{2n} a^k \geqslant (2n+1)a^n$$

Ex. 25 —
1. Montrer que, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{k}} < \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$$

2. Calculer la partie entière de $S = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{2\sqrt{k}}$.

Ex. 26 — Montrer que

$$\forall a \in [0\,;\,+\infty[\quad \forall b \in [1\,;\,+\infty[\quad (1+a)^b \geqslant 1+ab$$
$$\forall a \in [0\,;\,+\infty[\quad \forall b \in [0\,;\,1] \quad (1+a)^b \leqslant 1+ab$$

Ex. 27 — Soit a, b, c des réels strictement positifs. Montrer que

1. $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geqslant 4$;
2. $(a+b)(a+c)(b+c) \geqslant 8abc$.