Équations

Ex. 1 — Discuter et résoudre, suivant les valeurs du paramètre m, les équations ou inéquations

1. $(m+1)x+2-m=0$;
2. $\dfrac{m}{x-1} \leqslant \dfrac{1}{x+2}$;
3. $\sqrt{2x+m} \geqslant x+1$.

Ex. 2 — Discuter et résoudre, suivant les valeurs des paramètres réels a, b et c, l'équation d'inconnue réelle x

$$\sqrt{a+x}+\sqrt{b+x}+\sqrt{c+x}=0$$

Ex. 3 — Résoudre les équations suivantes, d'inconnue réelle x

1. $(E_1) : x^3+4x^2+x-6=0$;
2. $(E_2) : 3x^4+5x^2-2=0$
3. $(E_3) : (\ln x)^2+3\ln x+2=0$
4. $(E_4) : \ln x+\ln(5-x)=-2$
5. $(E_5) : \sqrt{x^2-3}=5x-9$
6. $(E_6) : x=\sqrt{x}+2$
7. $(E_7) : \mathrm{e}^{2x}+3\mathrm{e}^{x}-1=0$
8. $(E_8) : \mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}=2$

Ex. 4 — Résoudre, avec l'inconnue réelle x

1. $(E_1) : x^3-x^2-x-2=0$;
2. $(E_2) : \mathrm{e}^{2x-2}+\mathrm{e}^{x+1}-2\mathrm{e}^{4}=0$
3. $(E_3) : \sqrt{x+4}+\sqrt{x+2}=1$
4. $(E_4) : \sqrt{x+4}-\sqrt{x+2}=1$

Ex. 5 — Résoudre avec $x \in \mathbb{R}$

1. $(I_1) : \dfrac{1}{4x-1} < \dfrac{1}{x^2+x+1}$
2. $(I_2) : \dfrac{2x+1}{x+1} < \dfrac{3x-2}{x+1}$
3. $(I_3) : 5\left(\dfrac{1}{3}\right)^x \leqslant 10^{-10}$
4. $(I_4) : \ln(3x+1) \leqslant \ln(2x-1)$
5. $(I_5) : \sqrt{x+5} \geqslant \sqrt{x^2-4}$

Ex. 6 — Résoudre avec $x \in \mathbb{R}$

1. $(I_1) : \dfrac{x}{x^2+1} \leqslant \dfrac{x-1}{(x-1)^2}$
2. $(I_2) : x+1 > \sqrt{x^2+2x}$
3. $(I_3) : \ln(x^2-4\mathrm{e}^2) < 1+\ln(3x)$

Ex. 7 — Résoudre dans $\mathbb{R}$,

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$$

Ex. 8 — Résoudre dans $\mathbb{R}$ (x étant l'inconnue)

1. l'équation $\sqrt{4-x}=3-2x$;
2. l'inéquation $\sqrt{4-x}<3-2x$;
3. l'inéquation $\sqrt{4-x}>3-2x$.

Ex. 9 — Soit λ un réel donné.

1. Résoudre l'inéquation réelle $\dfrac{1}{x}<\lambda$.
2. Dans le plan muni d'un repère représenter l'ensemble E des points de coordonnées (x,y) tels que $\dfrac{x}{y}<\lambda$.

Expression du second degré

Ex. 10 — Résoudre en discutant suivant les valeurs du paramètre réel m l'équation

$$(m+1)2^x+(m-1)2^{-x}=0$$

Ex. 11 — Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations

1. $\sqrt{x^2-x-2} \geqslant |x-2|$;
2. $\sqrt{x^2-x-2} \geqslant x-2$;
3. $\sqrt{x^2-x-2} \geqslant |3x+2|$;
4. $\sqrt{x^2-x-2} \geqslant 3x+2$.

Ex. 12 — Soit m un paramètre réel. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{1-x^2} \leqslant m-x$.

Ex. 13 — Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}>\frac{1}{2}$$

Ex. 14 — Résoudre l'équation d'inconnue réelle x

$$8^{6x}-3\times 8^{3x}-4=0$$

Ex. 15 — Déterminer les réels m tels que l'équation

$$(2m-1)x^2+2(m+1)x+m+3=0$$

ait deux racines réelles inférieures ou égales à 1.

Ex. 16 — Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ avec $a<b$.

1. Montrer que

$$\forall x\in[a\,;\,b],\quad (a-x)(x-b)\leqslant\frac{(b-a)^2}{4}$$

2. Montrer que, pour $(x,y)\in[a\,;\,b]^2$,

$$\min\{(x-a)(b-y),(y-a)(b-x)\}\leqslant\frac{(b-a)^2}{4}$$

INDICATION : *On pourra raisonner par l'absurde.*

Inégalités

Ex. 17 — Les ensembles suivants admettent-ils une borne supérieure ? Un plus grand élément ? Un plus petit élément ? Une borne inférieure ?

1. $A=\left\{(-1)^n+\dfrac{1}{n}\ \text{ avec }\ n\in\mathbb{N}^*\right\}$;
2. $B=x\in\mathbb{Q}\ \text{ tel que }\ x^2<2$.

Ex. 18 — 1. À quel ensemble appartient $1/x$ lorsque $-4<x<5$?

2. Pour quelles valeurs entières de n a-t-on $n^2-3n+2>0$?
3. À quels ensembles appartiennent x^2 et x^3 lorsque $x\geqslant-2$?
4. Pour quelles valeurs de x a-t-on $x\geqslant x^2$? Et $x^2\geqslant x$?

Ex. 19 — 1. Soient a et b deux rels tels que $a>1$ et $b>1$. Montrer les inégalités suivantes

   a) $a+b\leqslant 2ab$
   b) $\dfrac{2}{a+b}+ab<a^2+b^2$
   c) $3\left(a-\dfrac{1}{b}\right)\dfrac{a}{b}<a^3-\dfrac{1}{b^3}$

2. Soit $\alpha>0$. Montrer que l'on a

$$\forall n\in[\![3\,;\,+\infty[\![,\qquad (1+\alpha)^n>1+n\alpha+\frac{n(n+1)}{2}\alpha^2$$

En déduire

$$\forall n\in[\![3\,;\,+\infty[\![,\qquad \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n>\frac{1}{8}\left(13-\frac{1}{n}\right)$$

Ex. 20 — 1. Montrer que

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\qquad x+\frac{1}{x}\geqslant 2$$

2. Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$ et $(i,j)\in\mathbb{N}$. Montrer que

$$x^i+x^j\geqslant 2x^{\frac{i+j}{2}}$$

3. Soit $a\in\mathbb{R}_+^*$ et $n\in\mathbb{N}$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{2n}a^k\geqslant(2n+1)a^n$$

Ex. 21 — 1. Montrer que, pour $k\in\mathbb{N}^*$,

$$\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{k}}<\sqrt{k}-\sqrt{k-1}$$

2. Calculer la partie entière de $S=\displaystyle\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{2\sqrt{k}}$.

Ex. 22 — Montrer que

$$\forall a\in[0\,;\,+\infty[\quad\forall b\in[1\,;\,+\infty[\quad (1+a)^b\geqslant 1+ab$$
$$\forall a\in[0\,;\,+\infty[\quad\forall b\in[0\,;\,1]\quad (1+a)^b\leqslant 1+ab$$

Ex. 23 — Soit a,b,c des réels strictement positifs. Montrer que

1. $(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\geqslant 4$;
2. $(a+b)(a+c)(b+c)\geqslant 8abc$.

Partie entière

Ex. 24 — Soient x et y deux nombres réels. Montrer

1. $\lfloor(\rfloor x)+\lfloor(\rfloor y)\leqslant\lfloor(\rfloor x+y)$;
2. $\lfloor(\rfloor x)\lfloor(\rfloor y)\leqslant\lfloor(\rfloor xy)$ si x et y sont positifs ;

3. $\lfloor(\rfloor x)\lfloor(\rfloor y)\geqslant\lfloor(\rfloor xy)$ si x et y sont négatifs. Donner des exemples où ces inégalités sont strictes.

Ex. 25 — Trouver les réels x tels que $\left\lfloor\sqrt{x^2+1}\right\rfloor=2$.

Ex. 26 — Soit $k\in\mathbb{R}_+^*$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x $\left\lfloor\dfrac{x}{1-kx}\right\rfloor=2$.

Ex. 27 — Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Montrer que

$$\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor\leqslant\lfloor x+y\rfloor\leqslant\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+1$$

Montrer qu'il peut ne pas y avoir égalité.

Ex. 28 — Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n^2}\left\lfloor\sqrt{k}\right\rfloor$.

Ex. 29 — Trouver les réels x tels que $\left\lfloor\sqrt{x}\right\rfloor=\sqrt{\lfloor x\rfloor}$.

Calcul polynomial

Ex. 30 — Simplifier

1. $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+2x-3}$;
2. $\dfrac{y^2+7y+10}{y^2-25}$;
3. $\dfrac{a^2+5a-14}{a^2-4a-21}$;
4. $\dfrac{x^2-2xy+y^2}{x-y}$.

Ex. 31 —

1. Quelles sont les valeurs de a et b tels que
$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,2\}, \qquad \frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-2}=\frac{4x+1}{x^2-x-2}$$
2. Quelles sont les valeurs de a et b tels que
$$\forall z \in \mathbb{R}\backslash\{3,-2\}, \qquad \frac{a}{z-3}+\frac{b}{z+2}=\frac{z+7}{(z-3)(z+2)}$$
3. Quelle est la valeur de a tel que
$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1/2,-2\}, \qquad \frac{a}{2x+1}+\frac{1}{x+2}=\frac{4x+5}{(2x+1)(x+2)}$$

Ex. 32 — Quizz !

1. Quelle est la forme simplifiée de $(z^2+4z-5)/(z^2-4z+3)$?
   (a) $\dfrac{z+5}{z+3}$ (b) $\dfrac{z+5}{z-3}$
   (c) $\dfrac{z-5}{z+3}$ (d) $\dfrac{z-5}{z-3}$
2. Que vaut la somme $\dfrac{1}{w-2}+\dfrac{1}{w+7}$?
   (a) $\dfrac{5}{w^2+5w-14}$ (b) $\dfrac{5}{w^2+5w+14}$
   (c) $\dfrac{5}{w^2-5w+14}$ (d) $\dfrac{5}{w^2-5w-14}$