

Équations

Ex. 1 — Discuter et résoudre, suivant les valeurs du paramètre m , les équations ou inéquations

1. $(m+1)x + 2 - m = 0$;
2. $\frac{m}{x-1} \leq \frac{1}{x+2}$;
3. $\sqrt{2x+m} \geq x+1$.

Ex. 2 — Discuter et résoudre, suivant les valeurs des paramètres réels a , b et c , l'équation d'inconnue réelle x

$$\sqrt{a+x} + \sqrt{b+x} + \sqrt{c+x} = 0$$

Ex. 3 — Résoudre les équations suivantes, d'inconnue réelle x

1. $(E_1) : x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$;
2. $(E_2) : 3x^4 + 5x^2 - 2 = 0$
3. $(E_3) : (\ln x)^2 + 3 \ln x + 2 = 0$
4. $(E_4) : \ln x + \ln(5-x) = -2$
5. $(E_5) : \sqrt{x^2-3} = 5x-9$
6. $(E_6) : x = \sqrt{x} + 2$
7. $(E_7) : e^{2x} + 3e^x - 1 = 0$
8. $(E_8) : e^x + e^{-x} = 2$

Ex. 4 — Résoudre, avec l'inconnue réelle x

1. $(E_1) : x^3 - x^2 - x - 2 = 0$;
2. $(E_2) : e^{2x-2} + e^{x+1} - 2e^4 = 0$
3. $(E_3) : \sqrt{x+4} + \sqrt{x+2} = 1$
4. $(E_4) : \sqrt{x+4} - \sqrt{x+2} = 1$

Ex. 5 — Résoudre avec $x \in \mathbb{R}$

1. $(I_1) : \frac{1}{4x-1} < \frac{1}{x^2+x+1}$
2. $(I_2) : \frac{2x+1}{x+1} < \frac{3x-2}{x+1}$
3. $(I_3) : 5 \left(\frac{1}{3}\right)^x \leq 10^{-10}$
4. $(I_4) : \ln(3x+1) \leq \ln(2x-1)$
5. $(I_5) : \sqrt{x+5} \geq \sqrt{x^2-4}$

Ex. 6 — Résoudre avec $x \in \mathbb{R}$

1. $(I_1) : \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{x-1}{(x-1)^2}$
2. $(I_2) : x+1 > \sqrt{x^2+2x}$
3. $(I_3) : \ln(x^2-4e^2) < 1 + \ln(3x)$

Ex. 7 — Résoudre dans \mathbb{R} ,

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$$

Ex. 8 — Résoudre dans \mathbb{R} (x étant l'inconnue)

1. l'équation $\sqrt{4-x} = 3-2x$;
2. l'inéquation $\sqrt{4-x} < 3-2x$;
3. l'inéquation $\sqrt{4-x} > 3-2x$.

Ex. 9 — Soit λ un réel donné.

1. Résoudre l'inéquation réelle $\frac{1}{x} < \lambda$.
2. Dans le plan muni d'un repère représenter l'ensemble E des points de coordonnées (x, y) tels que $\frac{x}{y} < \lambda$.

Expression du second degré

Ex. 10 — Résoudre en discutant suivant les valeurs du paramètre réel m l'équation

$$(m+1)2^x + (m-1)2^{-x} = 0$$

Ex. 11 — Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations

1. $\sqrt{x^2-x-2} \geq |x-2|$;
2. $\sqrt{x^2-x-2} \geq x-2$;
3. $\sqrt{x^2-x-2} \geq |3x+2|$;
4. $\sqrt{x^2-x-2} \geq 3x+2$.

Ex. 12 — Soit m un paramètre réel. Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $\sqrt{1-x^2} \leq m-x$.

Ex. 13 — Résoudre dans \mathbb{R} :

$$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}$$

Ex. 14 — Résoudre l'équation d'inconnue réelle x

$$8^{6x} - 3 \times 8^{3x} - 4 = 0$$

Ex. 15 — Déterminer les réels m tels que l'équation

$$(2m-1)x^2 + 2(m+1)x + m + 3 = 0$$

ait deux racines réelles inférieures ou égales à 1.

Ex. 16 — Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$.

1. Montrer que

$$\forall x \in [a; b], \quad (a-x)(x-b) \leq \frac{(b-a)^2}{4}$$

2. Montrer que, pour $(x, y) \in [a; b]^2$,

$$\min \{(x-a)(b-y), (y-a)(b-x)\} \leq \frac{(b-a)^2}{4}$$

INDICATION : On pourra raisonner par l'absurde.

Inégalités

Ex. 17 — Les ensembles suivants admettent-ils une borne supérieure? Un plus grand élément? Un plus petit élément? Une borne inférieure?

1. $A = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} \text{ avec } n \in \mathbb{N}^* \right\}$;
2. $B = x \in \mathbb{Q} \text{ tel que } x^2 < 2$.

Ex. 18 — 1. À quel ensemble appartient $1/x$ lorsque $-4 < x < 5$?

2. Pour quelles valeurs entières de n a-t-on $n^2 - 3n + 2 > 0$?
3. À quels ensembles appartiennent x^2 et x^3 lorsque $x \geq -2$?
4. Pour quelles valeurs de x a-t-on $x \geq x^2$? Et $x^2 \geq x$?

Ex. 19 — 1. Soient a et b deux réels tels que $a > 1$ et $b > 1$. Montrer les inégalités suivantes

- a) $a + b \leq 2ab$
- b) $\frac{2}{a+b} + ab < a^2 + b^2$
- c) $3 \left(a - \frac{1}{b} \right) \frac{a}{b} < a^3 - \frac{1}{b^3}$

2. Soit $\alpha > 0$. Montrer que l'on a

$$\forall n \in \llbracket 3; +\infty \llbracket, \quad (1+\alpha)^n > 1+n\alpha + \frac{n(n+1)}{2}\alpha^2$$

En déduire

$$\forall n \in \llbracket 3; +\infty \llbracket, \quad \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^n > \frac{1}{8} \left(13 - \frac{1}{n} \right)$$

Ex. 20 — 1. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x + \frac{1}{x} \geq 2$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $(i, j) \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$x^i + x^j \geq 2x^{\frac{i+j}{2}}$$

3. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{2n} a^k \geq (2n+1)a^n$$

Ex. 21 — 1. Montrer que, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}} < \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$$

2. Calculer la partie entière de $S = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{2\sqrt{k}}$.

Ex. 22 — Montrer que

$$\forall a \in [0; +\infty[\quad \forall b \in [1; +\infty[\quad (1+a)^b \geq 1+ab$$

$$\forall a \in [0; +\infty[\quad \forall b \in [0; 1] \quad (1+a)^b \leq 1+ab$$

Ex. 23 — Soit a, b, c des réels strictement positifs. Montrer que

1. $(a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 4$;
2. $(a+b)(a+c)(b+c) \geq 8abc$.

Partie entière

Ex. 24 — Soient x et y deux nombres réels. Montrer

1. $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor$;
2. $\lfloor x \rfloor \lfloor y \rfloor \leq \lfloor xy \rfloor$ si x et y sont positifs;
3. $\lfloor x \rfloor \lfloor y \rfloor \geq \lfloor xy \rfloor$ si x et y sont négatifs.

Donner des exemples où ces inégalités sont strictes.

Ex. 25 — Trouver les réels x tels que $\lfloor \sqrt{x^2+1} \rfloor = 2$.

Ex. 26 — Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation d'inconnue $x \left[\frac{x}{1-kx} \right] = 2$.

Ex. 27 — Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$$

Montrer qu'il peut ne pas y avoir égalité.

Ex. 28 — Calculer $\sum_{k=1}^{n^2} \lfloor \sqrt{k} \rfloor$.

Ex. 29 — Trouver les réels x tels que $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = \sqrt{\lfloor x \rfloor}$.

Calcul polynomial

Ex. 30 — Simplifier

$$\begin{array}{ll} 1. \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x - 3}; & 3. \frac{a^2 + 5a - 14}{a^2 - 4a - 21}; \\ 2. \frac{y^2 + 7y + 10}{y^2 - 25}; & 4. \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x - y}. \end{array}$$

Ex. 31 — 1. Quelles sont les valeurs de a et b tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}, \quad \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2} = \frac{4x+1}{x^2-x-2}$$

2. Quelles sont les valeurs de a et b tels que

$$\forall z \in \mathbb{R} \setminus \{3, -2\}, \quad \frac{a}{z-3} + \frac{b}{z+2} = \frac{z+7}{(z-3)(z+2)}$$

3. Quelle est la valeur de a tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1/2, -2\}, \quad \frac{a}{2x+1} + \frac{1}{x+2} = \frac{4x+5}{(2x+1)(x+2)}$$

Ex. 32 — Quiz!

1. Quelle est la forme simplifiée de $(z^2 + 4z - 5)/(z^2 - 4z + 3)$?

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \frac{z+5}{z+3} & \text{(b)} \frac{z+5}{z-3} \\ \text{(c)} \frac{z-5}{z+3} & \text{(d)} \frac{z-5}{z-3} \end{array}$$

2. Que vaut la somme $\frac{1}{w-2} + \frac{1}{w+7}$?

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \frac{5}{w^2 + 5w - 14} & \text{(b)} \frac{5}{w^2 + 5w + 14} \\ \text{(c)} \frac{5}{w^2 - 5w + 14} & \text{(d)} \frac{5}{w^2 - 5w - 14} \end{array}$$

