

# Nombres réels

BCPST I, 12/2017

## Équations

### Exercice 1

Discuter et résoudre, suivant les valeurs du paramètre  $m$ , les équations ou inéquations

1.  $(m+1)x + 2 - m = 0$ ;
2.  $\frac{m}{x-1} \leq \frac{1}{x+2}$ ;
3.  $\sqrt{2x+m} \geq x+1$ .

### Exercice 2

Discuter et résoudre, suivant les valeurs des paramètres réels  $a$ ,  $b$  et  $c$ , l'équation d'inconnue réelle  $x$

$$\sqrt{a+x} + \sqrt{b+x} + \sqrt{c+x} = 0$$

### Exercice 3

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue réelle  $x$

1.  $(E_1) : x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$ ;
2.  $(E_2) : 3x^4 + 5x^2 - 2 = 0$
3.  $(E_3) : (\ln x)^2 + 3 \ln x + 2 = 0$
4.  $(E_4) : \ln x + \ln(5-x) = -2$
5.  $(E_5) : \sqrt{x^2-3} = 5x-9$
6.  $(E_6) : x = \sqrt{x} + 2$
7.  $(E_7) : e^{2x} + 3e^x - 1 = 0$
8.  $(E_8) : e^x + e^{-x} = 2$

### Exercice 4

Résoudre, avec l'inconnue réelle  $x$

1.  $(E_1) : x^3 - x^2 - x - 2 = 0$ ;
2.  $(E_2) : e^{2x-2} + e^{x+1} - 2e^4 = 0$
3.  $(E_3) : \sqrt{x+4} + \sqrt{x+2} = 1$
4.  $(E_4) : \sqrt{x+4} - \sqrt{x+2} = 1$

### Exercice 5

Résoudre avec  $x \in \mathbb{R}$

1.  $(I_1) : \frac{1}{4x-1} < \frac{1}{x^2+x+1}$
2.  $(I_2) : \frac{2x+1}{x+1} < \frac{3x-2}{x+1}$
3.  $(I_3) : 5\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq 10^{-10}$
4.  $(I_4) : \ln(3x+1) \leq \ln(2x-1)$
5.  $(I_5) : \sqrt{x+5} \geq \sqrt{x^2-4}$

### Exercice 6

Résoudre avec  $x \in \mathbb{R}$

1.  $(I_1) : \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{x-1}{(x-1)^2}$
2.  $(I_2) : x+1 > \sqrt{x^2+2x}$
3.  $(I_3) : \ln(x^2-4e^2) < 1 + \ln(3x)$

### Exercice 7

Résoudre dans  $\mathbb{R}$ ,

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$$

### Exercice 8

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  ( $x$  étant l'inconnue)

1. l'équation  $\sqrt{4-x} = 3-2x$ ;
2. l'inéquation  $\sqrt{4-x} < 3-2x$ ;
3. l'inéquation  $\sqrt{4-x} > 3-2x$ .

### Exercice 9

Soit  $\lambda$  un réel donné.

1. Résoudre l'inéquation réelle  $\frac{1}{x} < \lambda$ .
2. Dans le plan muni d'un repère représenter l'ensemble  $E$  des points de coordonnées  $(x, y)$  tels que  $\frac{x}{y} < \lambda$ .

## Expression du second degré

### Exercice 10

Résoudre en discutant suivant les valeurs du paramètre réel  $m$  l'équation

$$(m+1)2^x + (m-1)2^{-x} = 0$$

### Exercice 11

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations

1.  $\sqrt{x^2-x-2} \geq |x-2|$ ;
2.  $\sqrt{x^2-x-2} \geq x-2$ ;
3.  $\sqrt{x^2-x-2} \geq |3x+2|$ ;
4.  $\sqrt{x^2-x-2} \geq 3x+2$ .

### Exercice 12

Soit  $m$  un paramètre réel. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation

$$\sqrt{1-x^2} \leq m-x.$$

### Exercice 13

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :

$$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}$$

### Exercice 14

Résoudre l'équation d'inconnue réelle  $x$

$$8^{6x} - 3 \times 8^{3x} - 4 = 0$$

### Exercice 15

Déterminer les réels  $m$  tels que l'équation

$$(2m-1)x^2 + 2(m+1)x + m + 3 = 0$$

ait deux racines réelles inférieures ou égales à 1.

**Exercice 16**

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  avec  $a < b$ .

1. Montrer que

$$\forall x \in [a; b], \quad (a-x)(x-b) \leq \frac{(b-a)^2}{4}$$

2. Montrer que, pour  $(x, y) \in [a; b]^2$ ,

$$\min \{(x-a)(b-y), (y-a)(b-x)\} \leq \frac{(b-a)^2}{4}$$

INDICATION : On pourra raisonner par l'absurde.

**Inégalités****Exercice 17**

Les ensembles suivants admettent-ils une borne supérieure? Un plus grand élément? Un plus petit élément?

Une borne inférieure?

1.  $A = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} \text{ avec } n \in \mathbb{N}^* \right\}$ ;

2.  $B = x \in \mathbb{Q}$  tel que  $x^2 < 2$ .

**Exercice 18**

- À quel ensemble appartient  $1/x$  lorsque  $-4 < x < 5$ ?
- Pour quelles valeurs entières de  $n$  a-t-on  $n^2 - 3n + 2 > 0$ ?
- À quels ensembles appartiennent  $x^2$  et  $x^3$  lorsque  $x \geq -2$ ?
- Pour quelles valeurs de  $x$  a-t-on  $x \geq x^2$ ? Et  $x^2 \geq x$ ?

**Exercice 19**

1. Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a > 1$  et  $b > 1$ . Montrer les inégalités suivantes

a)  $a + b \leq 2ab$

b)  $\frac{2}{a+b} + ab < a^2 + b^2$

c)  $3 \left( a - \frac{1}{b} \right) \frac{a}{b} < a^3 - \frac{1}{b^3}$

2. Soit  $\alpha > 0$ . Montrer que l'on a

$$\forall n \in \llbracket 3; +\infty \llbracket, \quad (1+\alpha)^n > 1+n\alpha + \frac{n(n+1)}{2}\alpha^2$$

En déduire

$$\forall n \in \llbracket 3; +\infty \llbracket, \quad \left( 1 + \frac{1}{2n} \right)^n > \frac{1}{8} \left( 13 - \frac{1}{n} \right)$$

**Exercice 20**

1. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x + \frac{1}{x} \geq 2$$

2. Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$  et  $(i, j) \in \mathbb{N}$ . Montrer que

$$x^i + x^j \geq 2x^{\frac{i+j}{2}}$$

3. Soit  $a \in \mathbb{R}_+^*$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que

$$\sum_{k=0}^{2n} a^k \geq (2n+1)a^n$$

**Exercice 21**

1. Montrer que, pour  $k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}} < \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$$

2. Calculer la partie entière de  $S = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{2\sqrt{k}}$ .

**Exercice 22**

Montrer que

$$\forall a \in [0; +\infty[ \quad \forall b \in [1; +\infty[ \quad (1+a)^b \geq 1+ab$$

$$\forall a \in [0; +\infty[ \quad \forall b \in [0; 1] \quad (1+a)^b \leq 1+ab$$

**Exercice 23**

Soient  $a, b, c$  des réels strictement positifs. Montrer que

1.  $(a+b) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 4$ ;

2.  $(a+b)(a+c)(b+c) \geq 8abc$ .

**Partie entière****Exercice 24**

Soient  $x$  et  $y$  deux nombres réels. Montrer

1.  $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor$ ;

2.  $\lfloor x \rfloor \lfloor y \rfloor \leq \lfloor xy \rfloor$  si  $x$  et  $y$  sont positifs;

3.  $\lfloor x \rfloor \lfloor y \rfloor \geq \lfloor xy \rfloor$  si  $x$  et  $y$  sont négatifs.

Donner des exemples où ces inégalités sont strictes.

**Exercice 25**

Trouver les réels  $x$  tels que  $\lfloor \sqrt{x^2+1} \rfloor = 2$ .

**Exercice 26**

Soit  $k \in \mathbb{R}_+^*$ . Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation d'inconnue  $x$

$$\left\lfloor \frac{x}{1-kx} \right\rfloor = 2.$$
**Exercice 27**

Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Montrer que

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$$

Montrer qu'il peut ne pas y avoir égalité.

**Exercice 28**

Calculer  $\sum_{k=1}^{n^2} \lfloor \sqrt{k} \rfloor$ .

**Exercice 29**

Trouver les réels  $x$  tels que  $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = \sqrt{\lfloor x \rfloor}$ .

## Calcul polynomial

### Exercice 30

Simplifier

1.  $\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x - 3}$ ;

2.  $\frac{y^2 + 7y + 10}{y^2 - 25}$ ;

3.  $\frac{a^2 + 5a - 14}{a^2 - 4a - 21}$ ;

4.  $\frac{x^2 - 2xy + y^2}{x - y}$ .

### Exercice 31

1. Quelles sont les valeurs de  $a$  et  $b$  tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}, \quad \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2} = \frac{4x+1}{x^2-x-2}$$

2. Quelles sont les valeurs de  $a$  et  $b$  tels que

$$\forall z \in \mathbb{R} \setminus \{3, -2\}, \quad \frac{a}{z-3} + \frac{b}{z+2} = \frac{z+7}{(z-3)(z+2)}$$

3. Quelle est la valeur de  $a$  tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1/2, -2\}, \quad \frac{a}{2x+1} + \frac{1}{x+2} = \frac{4x+5}{(2x+1)(x+2)}$$

### Exercice 32

Quizz!

1. Quelle est la forme simplifiée de  $(z^2 + 4z - 5)/(z^2 - 4z + 3)$ ?

(a)  $\frac{z+5}{z+3}$

(b)  $\frac{z+5}{z-3}$

(c)  $\frac{z-5}{z+3}$

(d)  $\frac{z-5}{z-3}$

2. Que vaut la somme  $\frac{1}{w-2} + \frac{1}{w+7}$ ?

(a)  $\frac{5}{w^2 + 5w - 14}$

(b)  $\frac{5}{w^2 + 5w + 14}$

(c)  $\frac{5}{w^2 - 5w + 14}$

(d)  $\frac{5}{w^2 - 5w - 14}$

