Début

Ex. 1 — Pourquoi les fonctions suivantes ne sont-elles pas polynomiales ?

$$f_1(x) = |x| \qquad f_2(x) = \sqrt{|x|} \qquad f_3(x) = \mathrm{e}^x$$
$$f_4(x) = \cos x \qquad f_6(z) = \overline{z}$$

(f_6 définie sur $\mathbb{C}$, les autres sur $\mathbb{R}$).

Ex. 2 — Soit $f \in \mathbb{C}[x]$ de degré n.

1. Montrer que si $n \geqslant 1$ alors f est surjective.
2. Montrer que si $n \geqslant 2$ alors f n'est pas injective (considérer $x \mapsto f(x+1) - f(x)$).
3. Montrer que ces résultats sont faux pour $f \in \mathbb{R}[x]$.

Ex. 3 — Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ (resp. $\mathbb{C}[x]$). Que dire de P dans les cas suivants ?

1. $P(0) = P(1) = P(2) = \ldots$ (à l'infini) ;
2. $P(x+1) = P(x)$;
3. $P(x+1) = -P(x)$;
4. $xP = P$;

Degré, opérations, composées, etc.

Ex. 4 — Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[x]$. Déterminer le degré du polynôme $x \mapsto P(x+1) - P(x)$ en fonction du degré de P.

Ex. 5 — Soient n et m deux entiers naturels et $P(x) = (x+1)^{n+m}$.

1. Calculer les coefficients de P à l'aide de la formule du binôme.
2. Calculer les coefficients de P en l'écrivant : $P(x) = (x+1)^n \times (x+1)^m$.
3. En déduire

$$\forall k \in [\![\, 0\,;\, n+m \,]\!], \qquad \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}$$

Ex. 6 — Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{K}[x]$ tels que $P \circ P = P$.

Ex. 7 — Déterminer tous les éléments P de $\mathbb{K}[x]$ vérifiant, pour tout $(x,y) \in \mathbb{K}^2$,

1. $P(xy) = P(x) + P(y)$ (étudier le degré);
2. $P(x+y) = P(x) + P(y)$ (étudier le coefficient dominant).
3. $P(x+y) = P(x)P(y)$;
4. $P(xy) = P(x)P(y)$ (étudier les racines).

Ex. 8 — Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}[x]$ tels que $(x^2+1)P(x) = P(x^2)$.

Ex. 9 — Même exercice avec $P(x) = xP'(x)$.

Ex. 10 — Même exercice avec $P(x) = (2x+1)P'(x)$.

Ex. 11 — Même exercice avec $(2x^2-3)P'' - 6P = 0$.

Factorisation

Ex. 12 — Soit P le polynôme défini dans $\mathbb{C}[x]$ par $P(x) = x^2 + x + 1$.

1. Quelles sont les racines complexes de P ?
2. Soit $(n,p,q) \in \mathbb{N}^3$. Démontrer que le polynôme Q défini par $Q(x) = x^{3n+2} + x^{3p+1} + x^{3q}$ est factorisable par P.

Ex. 13 —

1. Montrer que le polynôme $x \mapsto x^2 + x + 1$ factorise le polynôme $x \mapsto (x+1)^{2n+1} + x^{n+2}$, pour tout entier naturel n.
2. Montrer que le polynôme $x \mapsto x^2 + x$ factorise le polynôme $x \mapsto (x+1)^{2n+1} - x^{2n+1} - 1$, pour tout entier naturel n.
3. Montrer que le polynôme défini par $P_n(x) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k\right)^2 - n^2 x^{n-1}$ est divisible par $x \mapsto (x-1)^2$, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$.

Ex. 14 — Lesquelles des expressions suivantes sont des fonctions polynômes ?

$$\frac{x^5 - 11x^4 + 29x^3 - x^2 - 42x}{x^3 - 4x^2 + x + 6} \qquad \frac{x^5}{x^2(x-1)^2}$$
$$\frac{x^2 - x - 2}{x-1} + \frac{x^2 - 3x + 2}{x+1} + \frac{x^2-1}{x-2}$$

Ex. 15 — Déterminer tous les polynômes de $\mathbb{R}[x]$ vérifiant $P(2x) = P'(x) \times P''(x)$.

Racines, factorisation

Ex. 16 — 1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à n. On suppose que P prend au moins $(n+1)$ fois une même valeur α. Démontrer que P est constant, égal à α.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient P et Q deux polynômes de degrés inférieurs ou égaux à n. On suppose qu'il existe $(n+1)$ nombres complexes $z_0, \ldots, z_n$ tels que $P(z_k) = Q(z_k)$ pour tout $k \in [\![0 ; n]\!]$. Démontrer que $P = Q$.

3. En déduire :
   a) un polynôme qui admet une infinité de racines est le polynôme nul ;
   b) soient P et Q deux polynômes ; si l'ensemble $[z \in \mathbb{K}; P(z) = Q(z)]$ est infini, alors $P = Q$.

Ex. 17 — Soit $P = x^6 + mx^4 + 10x^3 + nx + p$ avec $(m, n, p) \in \mathbb{R}^3$. Trouver m, n, p pour que P admette une racine quadruple. Factoriser ensuite P.

Ex. 18 — 1. Exprimer $\cos 5\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$, puis en fonction de $\cos\theta$ seul.

2. Trouver un polynôme P de degré 5 tel que l'on ait : $\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos 5\theta = P(\cos\theta)$.
3. Quelles sont les racines de P ? Les ranger dans l'ordre croissant.
4. Donner la valeur de $\cos(\pi/10)$.

Ex. 19 — Factoriser les polynômes suivants dans $\mathbb{C}[x]$, et dans $\mathbb{R}[x]$ quand ça a un sens : $x \mapsto x^3 - 1$; $x \mapsto x^4 + 1$; $x \mapsto x^n - 1$; $x \mapsto x^8 + x^4 + 1$; $x \mapsto x^2 + 1^3 - 8x^3$.

Ex. 20 — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère le polynôme $P(x) = nx^{n+2} - (n+2)x^n + (n+2)x - n$. Quel est l'ordre de multiplicité de la racine 1 ? Factorisation par $x - 1$?

Ex. 21 — Factoriser le polynôme

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta) x^k$$

Divers

Ex. 22 — On définit une suite $(P_n)_{n \geqslant 1}$ de polynômes en posant $P_0 = 1$, $P_1 = x$, et $P_n = xP_{n-1} - P_{n-2}$ pour tout entier $n \geqslant 2$. Montrer que $P_n^2 - P_{n+1}P_{n-1} = 1$ pour tout $n \geqslant 1$.

Ex. 23 — On considère la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes définie par

$$P_0 = x^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \ \ P_{n+1} = (1+x^2)P_n' - 2(n+1)xP_n$$

Déterminer le degré de P_n ainsi que son coefficient dominant.

Ex. 24 — Soit $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ un polynôme complexe. On note a, b, c les racines de P.

1. a) Exprimer $a + b + c$, abc et $ab + bc + ca$ à l'aide de α, β, γ.
   b) Exprimer de même $a^2 + b^2 + c^2$.
   c) Trouver trois nombres réels a, b, c tels que $a + b + c = 6$, $abc = 6$ et $a^2 + b^2 + c^2 = 14$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ les systèmes suivants :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ x^{-1} + y^{-1} + z^{-1} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z = 3 \\ xy + yz + zx = 2 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 9 \end{cases}$$

Ex. 25 — Trouver λ tel que $x^3 + x^2 + \lambda x + 6$ admette 2 zéros x_1 et x_2 tel que $x_1 + x_2 = x_1 x_2$.

Ex. 26 — Soit P un polynôme à coefficients complexes tel que pour tout x réel, on a $P(x) \in \mathbb{R}$. Montrer que les coefficients de P sont réels.

Ex. 27 — Polynômes de Hermite On définit les polynômes suivants :

$$H_0 = 1, \quad H_1 = x,$$
$$\forall k \geqslant 2, \quad H_k = \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner la matrice représentant dans la base $(H_0, H_1, \ldots, H_n)$ de $\mathbb{R}_n[x]$ (justifier) l'endomorphisme $\Phi \ : \ P \mapsto P(x+1) - P(x)$

Ex. 28 — $\mathbb{R}[x]$ est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. $\mathbb{R}_n[x]$ est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n ($n \in \mathbb{N}$). On considère

$$f : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}[x] \\ P & \longmapsto & (4x+1)P(x) - (x-2)(x+1)P'(x) \end{array} \right.$$

1. Comparer le degré du polynôme $f(P)$ et le degré du polynôme P.
2. En déduire qu'il existe $n \in \mathbb{N}$, unique, tel que $f_{|\mathbb{R}_n[x]}$ soit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$. On note φ la restriction de f à $\mathbb{R}_n[x]$.
3. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.
4. Déterminer $\operatorname{Ker}\varphi$, et montrer que $(\varphi(1), \varphi(x), \varphi(x^2), \varphi(x^3))$ est une base de $\operatorname{Im}\varphi$.

Ex. 29 — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, il existe un polynôme P_n tel que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1/2}}.$$
On raisonnera par récurrence, et on montrera en particulier que $P_{n+1}(x) = (1+x^2)P_n'(x) - (2n+1)P_n(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. a) Expliciter P_0, P_1, P_2.
   b) Déterminer le coefficient dominant et le degré de P_n.
   c) Étudier la parité de la fonction P_n.
3. a) Montrer que
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (1+x^2)f'(x) + xf(x) = 0.$$
   b) En dérivant suffisamment la relation précédente montrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P_{n+1} + (2n+1)xP_n + n^2(1+x^2)P_{n-1} = 0$$
   c) Calculer $P_n(0)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
4. En utilisant les questions (**??**) et (**??**) montrer que $P_n' = -n^2 P_{n-1}$ quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire un procédé de calcul des polynômes P_n.
5. a) On suppose que P_n a n racines réelles distinctes. Montrer, en utilisant le théorème de Rolle et la question précédente que P_{n+1} a $n+1$ racines réelles distinctes.
   b) Montrer que P_n a n racines réelles distinctes.

Ex. 30 — On cherche les polynômes P de $\mathbb{C}[x]$ divisibles par leur polynôme dérivé P'.

1. Montrer que les polynômes du premier degré le sont.
2. Montrer que si P' divise P, alors toute racine de P' d'ordre k est une racine d'ordre $(k+1)$ de P.
3. En déduire que P ne possède qu'une seul racine et conclure.
   INDICATION : *Utilisation la décomposition de P en produit de polynômes du premier degré.*

Ex. 31 — Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

1. Montrer que f est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout entier n, il existe un polynôme réel P_n tel que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$$
2. En dérivant n fois la relation $(1+x^2)f(x) = 1$, donner une relation liant P_n, P_{n-1} et P_{n-2}.
3. En déduire que
$$\forall n \in [\![2 \,;\, +\infty [\![, \ P_{n-1}' = -n(n-1)P_{n-2}$$

Ex. 32 — Soient a et b deux réels distincts. On note E l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_4[x]$ admettant a et b comme racines. Montrer que E est un $\mathbb{R}$–espace vectoriel, puis déterminer une base de E.

Ex. 33 — Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs, avec $a_0 > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P_n(x) = -a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k x^k$$

1. Montrer que P_n admet une unique racine dans $\mathbb{R}_+$. On la note x_n.
2. Prouver que $x_n \in [\,0\,;\,1\,]$.
3. Démontrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et en déduire qu'elle est convergente.
4. Quelle est sa limite ?