Polynômes

bcpst 1, 2018

Début

Exercice 1

Pourquoi les fonctions suivantes ne sont-elles pas polynomiales ?

$$f_1(x) = |x| \qquad f_2(x) = \sqrt{|x|} \qquad f_3(x) = \mathrm{e}^x$$
$$f_4(x) = \cos x \qquad f_6(z) = \overline{z}$$

(f_6 définie sur $\mathbb{C}$, les autres sur $\mathbb{R}$).

Exercice 2

Soit $f \in \mathbb{C}[x]$ de degré n.

1. Montrer que si $n \geqslant 1$ alors f est surjective.
2. Montrer que si $n \geqslant 2$ alors f n'est pas injective (considérer $x \mapsto f(x+1) - f(x)$).
3. Montrer que ces résultats sont faux pour $f \in \mathbb{R}[x]$.

Exercice 3

Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ (resp. $\mathbb{C}[x]$). Que dire de P dans les cas suivants ?

1. $P(0) = P(1) = P(2) = \dots$ (à l'infini) ;
2. $P(x+1) = P(x)$;
3. $P(x+1) = -P(x)$;
4. $xP = P$;

Degré, opérations, composées, etc.

Exercice 4

Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[x]$. Déterminer le degré du polynôme $x \mapsto P(x+1) - P(x)$ en fonction du degré de P.

Exercice 5

Soient n et m deux entiers naturels et $P(x) = (x+1)^{n+m}$.

1. Calculer les coefficients de P à l'aide de la formule du binôme.
2. Calculer les coefficients de P en l'écrivant : $P(x) = (x+1)^n \times (x+1)^m$.
3. En déduire
$$\forall k \in [\![\, 0 \,;\, n+m \,]\!], \qquad \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}$$

Exercice 6

Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{K}[x]$ tels que $P \circ P = P$.

Exercice 7

Déterminer tous les éléments P de $\mathbb{K}[x]$ vérifiant, pour tout $(x, y) \in \mathbb{K}^2$,

1. $P(xy) = P(x) + P(y)$ (étudier le degré);
2. $P(x+y) = P(x) + P(y)$ (étudier le coefficient dominant).
3. $P(x+y) = P(x)P(y)$;
4. $P(xy) = P(x)P(y)$ (étudier les racines).

Exercice 8

Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}[x]$ tels que $(x^2+1)P(x) = P(x^2)$.

Exercice 9

Même exercice avec $P(x) = xP'(x)$.

Exercice 10

Même exercice avec $P(x) = (2x+1)P'(x)$.

Exercice 11

Même exercice avec $(2x^2 - 3)P'' - 6P = 0$.

Factorisation

Exercice 12

Soit P le polynôme défini dans $\mathbb{C}[x]$ par $P(x) = x^2 + x + 1$.

1. Quelles sont les racines complexes de P ?
2. Soit $(n, p, q) \in \mathbb{N}^3$. Démontrer que le polynôme Q défini par $Q(x) = x^{3n+2} + x^{3p+1} + x^{3q}$ est factorisable par P.

Exercice 13

1. Montrer que le polynôme $x \mapsto x^2 + x$ factorise le polynôme $x \mapsto (x+1)^{2n+1} - x^{2n+1} - 1$, pour tout entier naturel n.
2. Montrer que le polynôme $x \mapsto x^2 + x + 1$ factorise le polynôme $x \mapsto (x+1)^{2n+1} + x^{n+2}$, pour tout entier naturel n.
3. Montrer que le polynôme défini par $P_n(x) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k\right)^2 - n^2 x^{n-1}$ est divisible par $x \mapsto (x-1)^2$, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$.

EXERCICE 14
Lesquelles des expressions suivantes sont des fonctions polynômes ?

$$\frac{x^5-11x^4+29x^3-x^2-42x}{x^3-4x^2+x+6} \qquad \frac{x^5}{x^2(x-1)^2}$$
$$\frac{x^2-x-2}{x-1}+\frac{x^2-3x+2}{x+1}+\frac{x^2-1}{x-2}$$

EXERCICE 15
Déterminer tous les polynômes de $\mathbb{R}[x]$ vérifiant $P(2x) = P'(x) \times P''(x)$.

RACINES, FACTORISATION

EXERCICE 16
1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à n. On suppose que P prend au moins $(n+1)$ fois une même valeur α. Démontrer que P est constant, égal à α.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient P et Q deux polynômes de degrés inférieurs ou égaux à n. On suppose qu'il existe $(n+1)$ nombres complexes $z_0, \ldots, z_n$ tels que $P(z_k) = Q(z_k)$ pour tout $k \in [\![0 ; n]\!]$. Démontrer que $P = Q$.
3. En déduire :
   a) un polynôme qui admet une infinité de racines est le polynôme nul ;
   b) soient P et Q deux polynômes ; si l'ensemble $[z \in \mathbb{K}; P(z) = Q(z)]$ est infini, alors $P = Q$.

EXERCICE 17 — *Nombres algébriques*
On dit qu'un nombre est algébrique s'il est racine d'un polynôme à coefficients *entiers*.
1. Donner des exemples de nombres algébriques.
2. Montrer que si x est algébrique, alors
   a) $-x$ est algébrique ;
   b) $x + r$ est algébrique pour tout $r \in \mathbb{Q}$;
   c) rx est algébrique pour tout $r \in \mathbb{Q}^*$;
   d) $\dfrac{1}{x}$ est algébrique (si $x \neq 0$).

EXERCICE 18
Soit $P = x^6+mx^4+10x^3+nx+p$ avec $(m,n,p) \in \mathbb{R}^3$. Trouver m, n, p pour que P admette une racine quadruple. Factoriser ensuite P.

EXERCICE 19
1. Exprimer $\cos 5\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$, puis en fonction de $\cos\theta$ seul.
2. Trouver un polynôme P de degré 5 tel que l'on ait : $\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos 5\theta = P(\cos\theta)$.
3. Quelles sont les racines de P ? Les ranger dans l'ordre croissant.
4. Donner la valeur de $\cos(\pi/10)$.

EXERCICE 20
Dans cette exercice, les polynômes sont à coefficients dans $\mathbb{C}$.
1. Soit $P = ax^2+bx+c$. Montrer que P admet une racine multiple ssi $b^2-4ac = 0$.
2. Montrer que x^3+px+q possède une racine multiple ssi si $4p^3+27q^2 = 0$.
3. Montrer que x^5+px^2+q possède une racine multiple ssi $q\left(3125q^3+108p^5\right) = 0$.

EXERCICE 21
Factoriser les polynômes suivants dans $\mathbb{C}[x]$, et dans $\mathbb{R}[x]$ quand ça a un sens : $x \mapsto x^3-1$; $x \mapsto x^4+1$; $x \mapsto x^n-1$; $x \mapsto x^8+x^4+1$; $x \mapsto x^2+1^3-8x^3$.

EXERCICE 22
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère le polynôme $P(x) = nx^{n+2}-(n+2)x^n+(n+2)x-n$. Quel est l'ordre de multiplicité de la racine 1 ? Factorisation par $x-1$?

EXERCICE 23
Factoriser le polynôme

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta) x^k$$

Divers

Exercice 24

On définit une suite $(P_n)_{n\geqslant 1}$ de polynômes en posant $P_0 = 1$, $P_1 = x$, et $P_n = xP_{n-1} - P_{n-2}$ pour tout entier $n \geqslant 2$. Montrer que $P_n^2 - P_{n+1}P_{n-1} = 1$ pour tout $n \geqslant 1$.

Exercice 25

On considère la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes définie par

$$P_0 = x^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \ P_{n+1} = (1+x^2)P_n' - 2(n+1)xP_n$$

Déterminer le degré de P_n ainsi que son coefficient dominant.

Exercice 26

Soit $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ un polynôme complexe. On note a, b, c les racines de P.

1. a) Exprimer $a+b+c$, abc et $ab+bc+ca$ à l'aide de α, β, γ.
   b) Exprimer de même $a^2+b^2+c^2$.
   c) Trouver trois nombres réels a, b, c tels que $a+b+c=6$, $abc=6$ et $a^2+b^2+c^2=14$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ les systèmes suivants :

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=9 \\ x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=3 \\ xy+yz+zx=2 \\ x^3+y^3+z^3=9 \end{cases}$$

Exercice 27

Trouver λ tel que $x^3+x^2+\lambda x+6$ admette 2 zéros x_1 et x_2 tel que $x_1+x_2 = x_1x_2$.

Exercice 28

Soit P un polynôme à coefficients complexes tel que pour tout x réel, on a $P(x) \in \mathbb{R}$. Montrer que les coefficients de P sont réels.

Exercice 29 — *Polynômes de Hermite*

On définit les polynômes suivants :

$$H_0 = 1, \quad H_1 = x,$$
$$\forall k \geqslant 2, \quad H_k = \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner la matrice représentant dans la base $(H_0, H_1, \ldots, H_n)$ de $\mathbb{R}_n[x]$ (justifier) l'endomorphisme $\Phi\ :\ P \mapsto P(x+1) - P(x)$

Exercice 30

$\mathbb{R}[x]$ est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. $\mathbb{R}_n[x]$ est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n ($n \in \mathbb{N}$). On considère

$$f\ :\ \left|\begin{array}{rcl} \mathbb{R}[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}[x] \\ P & \longmapsto & (4x+1)P(x) - (x-2)(x+1)P'(x) \end{array}\right.$$

1. Comparer le degré du polynôme $f(P)$ et le degré du polynôme P.
2. En déduire qu'il existe $n \in \mathbb{N}$, unique, tel que $f_{|\mathbb{R}_n[x]}$ soit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$. On note φ la restriction de f à $\mathbb{R}_n[x]$.
3. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.
4. Déterminer $\operatorname{Ker}\varphi$, et montrer que $(\varphi(1), \varphi(x), \varphi(x^2), \varphi(x^3))$ est une base de $\operatorname{Im}\varphi$.

Exercice 31

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, il existe un polynôme P_n tel que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1/2}}.$$
   On raisonnera par récurrence, et on montrera en particulier que $P_{n+1}(x) = (1+x^2)P_n'(x) - (2n+1)P_n(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. a) Expliciter P_0, P_1, P_2.
   b) Déterminer le coefficient dominant et le degré de P_n.
   c) Étudier la parité de la fonction P_n.
3. a) Montrer que
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (1+x^2)f'(x) + xf(x) = 0.$$
   b) En dérivant suffisamment la relation précédente montrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P_{n+1} + (2n+1)xP_n + n^2(1+x^2)P_{n-1} = 0$$

c) Calculer $P_n(0)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

4. En utilisant les questions (1) et (3.b) montrer que $P_n' = -n^2 P_{n-1}$ quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire un procédé de calcul des polynômes P_n.
5. a) On suppose que P_n a n racines réelles distinctes. Montrer, en utilisant le théorème de Rolle et la question précédente que P_{n+1} a $n+1$ racines réelles distinctes.
   b) Montrer que P_n a n racines réelles distinctes.

EXERCICE 32

On cherche les polynômes P de $\mathbb{C}[x]$ divisibles par leur polynôme dérivé P'.

1. Montrer que les polynômes du premier degré le sont.
2. Montrer que si P' divise P, alors toute racine de P' d'ordre k est une racine d'ordre $(k+1)$ de P.
3. En déduire que P ne possède qu'une seul racine et conclure.

   INDICATION : *Utilisation la décomposition de P en produit de polynômes du premier degré.*

EXERCICE 33

1. Soit $P_1(x) = x - a$, $P_2(x) = x - b$ et $P_3 = x - c$ trois fonctions polynômes de degré 1 avec a, b et c trois réels distincts.
   a) Démontrer que $(P_1 \times P_2, P_1 \times P_3, P_2 \times P_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.
   b) Soit Q un polynôme de degré au plus 2. Démontrer qu'il existe trois réels A, B et C tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a, b, c\}, \quad \frac{Q(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{A}{P_1(x)} + \frac{B}{P_2(x)} + \frac{C}{P_3(x)}$$

2. Soit $P_1(x) = x - a$, $P_2(x) = x - b$ deux fonctions polynômes de degré 1 avec $a \neq b$.
   a) Démontrer que (P_1P_2, P_2, P_1^2) est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.
   b) Soit Q un polynôme de degré au plus 2. Démontrer qu'il existe trois réels A, B et C tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus a, b, c, \quad \frac{Q(x)}{P_1^2(x)P_2(x)} = \frac{A}{P_1(x)} + \frac{B}{P_1^2(x)} + \frac{C}{P_2(x)}$$

EXERCICE 34

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

1. Montrer que f est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout entier n, il existe un polynôme réel P_n tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$$

2. En dérivant n fois la relation $(1+x^2)f(x) = 1$, donner une relation liant P_n, P_{n-1} et P_{n-2}.
3. En déduire que

$$\forall n \in [\![2 \,;\, +\infty [\![, \quad P_{n-1}' = -n(n-1)P_{n-2}$$

EXERCICE 35

Soient a et b deux réels distincts. On note E l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_4[x]$ admettant a et b comme racines. Montrer que E est un $\mathbb{R}$–espace vectoriel, puis déterminer une base de E.

EXERCICE 36

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs, avec $a_0 > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P_n(x) = -a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k x^k$$

1. Montrer que P_n admet une unique racine dans $\mathbb{R}_+$. On la note x_n.
2. Prouver que $x_n \in [\,0\,;\,1\,]$.
3. Démontrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et en déduire qu'elle est convergente.
4. Quelle est sa limite ?