

Calculs élémentaires

Ex. 1 — Recenser et calculer tous les produits possibles de deux matrices parmi celles ci-dessous.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 23 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix};$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Ex. 2 — Soit $A = \begin{pmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{pmatrix}$, $M =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } {}^tY = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. a) Calculer AM, AX, AY .

b) Montrer que M n'est pas inversible.

2. Trouver une matrice dont le produit avec A est

a) $\begin{pmatrix} x+x'+x'' \\ y+y'+y'' \\ z+z'+z'' \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} x & x' & x'' \\ 0 & 0 & 0 \\ y & y' & y'' \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} x & x' & x'' \\ 0 & 0 & 0 \\ z & z' & z'' \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} x-x' & x'-x'' & x''-x \\ y-y' & y'-y'' & y''-y \\ z-z' & z'-z'' & z''-z \end{pmatrix}$

Inversion de matrices

Ex. 3 — Montrer que les matrices suivantes sont inversibles, et calculer leurs inverses :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ex. 4 — Pour quelles valeurs de λ les matrices suivantes sont-elles inversibles ?

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

Ex. 5 — Soit $A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$ une matrice telle

$$\text{que } \sum_{i=1}^3 x_i^2 = \sum_{i=1}^3 y_i^2 = \sum_{i=1}^3 z_i^2 = 1 \text{ et } \sum_{i=1}^3 x_i y_i = \sum_{i=1}^3 y_i z_i = \sum_{i=1}^3 x_i z_i = 0. \text{ Montrer que } A \text{ est inversible, d'inverse } {}^tA.$$

Ex. 6 — Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on considère la matrice

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Démontrer que $R(\theta)R(\varphi) = R(\theta + \varphi)$. Démontrer que $R(\theta)$ est inversible pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et calculer son inverse.

Ex. 7 — Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ telles que $A+B = AB$.

Montrer que $A - I_n$ est inversible et calculer $(A - I_n)^{-1}$.

Ex. 8 — MÉTHODE DU DÉTERMINANT Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}. \text{ On note } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $M^2 = (a+d)M - (ad-bc)I$.

2. En déduire que M est inversible ssi $ad-bc \neq 0$.

Exprimer alors M^{-1} en fonction de a, b, c et d .

Ex. 9 — 1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que

$$A^4 = 0. \text{ Montrer que } I_n - A \text{ est inversible, d'inverse } I_n + A + A^2 + A^3.$$

2. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = I_4 - B$. Calculer

A^4 , puis inverser B . Calculer ensuite B^n .

Puissances de matrice

Ex. 10 — Soit $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{1}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{1}}{2} \end{pmatrix}$,
 et, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $B_{x,y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{y}{2} \\ \frac{x}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

1. a) Calculer AB et BA .
 b) Déterminer les couples (x, y) pour que A et $B_{x,y}$ commutent.
2. a) Montrer que $B^t B = I_2$.
 b) Déterminer les couples (x, y) pour que $B_{x,y}$ soit inversible.

Ex. 11 — Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $\forall (i, j) \in (\llbracket 1 ; n \rrbracket)^2$, on a $J_{i,j} = 1$.

1. Calculer pour $n \in \mathbb{N}$, J^n .
2. La matrice J est-elle inversible ?

Ex. 12 — Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $aM^2 + bM + cI_n = 0$, avec a, b deux réels et c un réel non nul. Montrer que M est inversible.

Donner l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ex. 13 — Justifier que M est inversible et calculer son inverse

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Ex. 14 — Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A + I_3)^3$.
2. En déduire que A est inversible et exprimer son inverse en fonction de A .

Ex. 15 — Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Exprimer A^2 en fonction de A et de I_n . En déduire que A est inversible et expliciter A^{-1} en fonction de A et I_n .

Ex. 16 — Soient $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer B^3 .
2. À l'aide de la formule du binôme, calculer C^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Ex. 17 — 1. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ et $P \in GL_n(\mathbb{R})$.

On pose $D = P^{-1}MP$.

Démontrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $M^k = PD^kP^{-1}$ et que $\forall k \in \mathbb{N}$, $D^k = P^{-1}M^kP$

2. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
 a) Vérifier que P est inversible et que $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
 b) Calculer $D = P^{-1}MP$, puis D^k pour $k \in \mathbb{N}$.
 c) Expliciter M^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
 d) Démontrer que M est inversible, et calculer M^{-k} pour $k \in \mathbb{N}$.
 e) Calculer $(I + M)^k$, pour $k \in \mathbb{N}$, en utilisant encore la matrice D .

Ex. 18 — Soit $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Calculer $(M(a, b))^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Comment faut-il choisir a et b pour qu'une des deux matrices $(M(a, b))^2 M(a, b)$ soit proportionnelle l'une à l'autre ?

Ex. 19 — Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & x & 2x \\ 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Ex. 20 — 1. Déterminer l'ensemble \mathbb{S} des matrices carrées M d'ordre 2 telles que

$$M^2 = 0$$

ou 0 désigne la matrice nulle d'ordre 2.

2. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est inversible.

Déterminer l'ensemble \mathbb{S}' des matrices X vérifiant

$$(AX)^2 + AXB + BXA + B^2 = 0.$$

INDICATION : On pourra commencer par calculer $(AX + B)^2$.

Ex. 21 — Soient $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et $A =$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer M^2 .
2. En déduire pour $n \in \mathbb{N}$, A^n .

Divers sujets

Ex. 22 — Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer A^4 . Montrer que A est inversible ssi $x \neq 0$.
Lorsque $x \neq 0$, déterminer A^n pour $n \in \mathbb{Z}$.

Ex. 23 — Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Trouver deux matrices non nulles U et V telles que $AU = -U$, $AV = 2V$ et $U + V = A$.
2. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^{n+1} = (-1)^n U + 2^n V$$

Ex. 24 — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour toute matrice carrée $A = \text{mat } a$ de taille n , on appelle *trace de A* le nombre

$$\text{Tr}(A) = \sum_{k=1}^n a_{kk}.$$

1. Calculer la trace des matrices carrées des exercices précédents. Calculer la trace de la matrice identité.
2. Vérifier : $\forall (\lambda, \mu) \in (\mathbb{R})^2, \forall (A, B) \in M_n(\mathbb{R})^2, \text{Tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \text{Tr}(A) + \mu \text{Tr}(B)$.
3. Démontrer : $\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{R})^2, \text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.
4. Démontrer que deux matrices semblables ont la même trace.

Ex. 25 — On cherche à déterminer le *commutant* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui vérifient $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad AM = MA$. Soit A une telle matrice.

Pour cela on raisonne par analyse-synthèse.

1. *Analyse* Soit A une telle matrice.

a) Soit $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$. Expliciter les matrices DA et AD et en déduire que A est diagonale.

b) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Expliciter AM et MA et déduire que tous les coefficients diagonaux de A sont égaux.

2. *Synthèse* Décrire le commutant de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Ex. 26 — Soit A, B et C trois matrices non nulles telles que $ABC = 0$. Montrer que deux au moins de ces matrices ne sont pas inversibles.

Ex. 27 — Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice inversible avec $A^{-1} = (\alpha_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. On suppose que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 0; n \rrbracket^2, \quad a_{ij} \geq 0 \quad \text{et} \quad \alpha_{ij} \geq 0$$

Montrer que dans chaque rangée de A il y a un seul élément non nul.

(Voir l'exercice ??) Trouver les matrices stochastiques inversibles dont l'inverse est aussi une matrice stochastique.

Ex. 28 — Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dans cet exercice,

I désigne la matrice identité d'ordre 3 et O_3 la matrice nulle d'ordre 3. On se propose de calculer les puissances de A de plusieurs manières.

Partie I — Par diagonalisation

On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que P est inversible et donner son inverse.
2. a) Calculer $D = P^{-1}AP$.
b) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer D^n .
c) Démontrer que $D^n = P^{-1}A^nP$ et en déduire l'expression de A^n .
3. a) Justifier que D est inversible et en déduire que A est inversible.
b) En adaptant la question précédente, donner l'expression de A^{-n} en fonction de n , où n est un entier naturel.

Partie II — Par le binôme de Newton

1. Soit $B = A - 2I$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer B^n en fonction de B .
2. En utilisant la formule du binôme, calculer l'expression de A^n en fonction de n, A et I .

1. Démontrer que $A^2 - 3A + 2I = O_3$.
2. a) Démontrer par récurrence qu'il existe deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que, pour tout entier n , $A^n = a_n A + b_n I$. Donner les relations de récurrence vérifiées par $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 b) Démontrer que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des suites récurrentes d'ordre 2.
 c) En déduire les expressions de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en fonction de n , puis celle de A^n en fonction de n , A et I .
3. a) Justifier que A est inversible, et donner son inverse en fonction de A et I .
 b) En reprenant la question précédente, donner l'expression de A^{-n} en fonction de A et I , pour tout entier naturel n .

Utilisation de relations polynomiales

Ex. 29 — Soit M la matrice $\begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. On no-

tera I la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer M^2 . Montrer qu'il existe un unique couple de réels (α, β) tels que $M^2 = \alpha M + \beta I$. Déterminer α et β .
2. Montrer que, pour tout entier naturel n , il existe un couple de réels (a_n, b_n) tels que l'on ait $M^n = a_n M + b_n I$, et déterminer des relations de récurrence vérifiées par les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. Calculer a_n et b_n en fonction de n . Écrire M^n en fonction de n .

Ex. 30 — Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \\ 0 & 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver

une matrice J telle que l'on ait :

$$A = I + aJ + a^2 J^2 + a^3 J^3 + a^4 J^4$$

Calculer J^5 . En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Ex. 31 — Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe deux réels α et β tels que $A^2 - \alpha A + \beta I = 0$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur β pour que A soit inversible.
3. Montrer que, pour tout entier n , il existe deux réels α_n et β_n tels que $A^n = \alpha_n A + \beta_n I$.

Formule du binôme, etc.

Ex. 32 — Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculer J^n , pour tout entier n . En déduire A^n .

Ex. 33 — Soit a un réel et $A = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Cal-

culer $(A + I)^3$, en déduire A^n (n un entier naturel).

Ex. 34 — Soit A une matrice carrée d'ordre n , telle que $A^3 = 0$. Montrer que $A + I$ est inversible. Pour quelles valeurs de a a-t-on $A + aI$ inversible ?

Ex. 35 — Soit J la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont nuls, sauf ceux d'ordre $(i, i + 1)$ (pour $i \in \llbracket 1 ; n - 1 \rrbracket$), égaux à 1.

1. Calculer les puissances successives de la matrice J .
2. Soient a et b deux réels, et A la matrice $aI_n + bJ$. Calculer A^n .

