

# MATRICES

BCPST I, 3/2018

## CALCULS ÉLÉMENTAIRES

### Exercice 1

Recenser et calculer tous les produits possibles de deux matrices parmi celles ci-dessous.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 23 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix};$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

### Exercice 2

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, X =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } {}^tY = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. a) Calculer  $AM, AX, AY$ .

b) Montrer que  $M$  n'est pas inversible.

2. Trouver une matrice dont le produit avec  $A$  est

$$\text{a) } \begin{pmatrix} x + x' + x'' \\ y + y' + y'' \\ z + z' + z'' \end{pmatrix}; \quad \text{c) } \begin{pmatrix} x & x' & x'' \\ 0 & 0 & 0 \\ y & y' & y'' \end{pmatrix};$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} x & x' & x'' \\ 0 & 0 & 0 \\ z & z' & z'' \end{pmatrix}; \quad \text{d) } \begin{pmatrix} x - x' & x' - x'' & x'' - x \\ y - y' & y' - y'' & y'' - y \\ z - z' & z' - z'' & z'' - z \end{pmatrix}$$

## INVERSION DE MATRICES

### Exercice 3

Montrer que les matrices suivantes sont inversibles, et calculer leurs inverses :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### Exercice 4

Pour quelles valeurs de  $\lambda$  les matrices suivantes sont-elles inversibles ?

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

### Exercice 5

Soit  $A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$  une matrice telle que

$$\sum_{i=1}^3 x_i^2 = \sum_{i=1}^3 y_i^2 = \sum_{i=1}^3 z_i^2 = 1 \text{ et } \sum_{i=1}^3 x_i y_i =$$

$$\sum_{i=1}^3 y_i z_i = \sum_{i=1}^3 x_i z_i = 0. \text{ Montrer que } A \text{ est inver-}$$

sible, d'inverse  ${}^tA$ .

### Exercice 6

Pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ , on considère la matrice  $R(\theta) =$

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Démontrer que  $R(\theta)R(\varphi) = R(\theta + \varphi)$ . Démontrer que  $R(\theta)$  est inversible pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$  et calculer son inverse.

### Exercice 7

Soit  $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$  telles que  $A + B = AB$ . Montrer que  $A - I_n$  est inversible et calculer  $(A - I_n)^{-1}$ .

### Exercice 8 — Méthode du déterminant

Soit la matrice  $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ . On note  $I =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que  $M^2 = (a + d)M - (ad - bc)I$ .
2. En déduire que  $M$  est inversible ssi  $ad - bc \neq 0$ . Exprimer alors  $M^{-1}$  en fonction de  $a, b, c$  et  $d$ .

### Exercice 9

1. Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  une matrice telle que  $A^4 = 0$ . Montrer que  $I_n - A$  est inversible, d'inverse  $I_n + A + A^2 + A^3$ .

$$2. \text{ Soit } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A = I_4 - B. \text{ Calculer } A^4, \text{ puis inverser } B. \text{ Calculer ensuite } B^n.$$

### Exercice 10

Soit  $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{1}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{1}}{2} \end{pmatrix}$ , et,

pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $B_{x,y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{y}{2} \\ \frac{x}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ .

1. a) Calculer  $AB$  et  $BA$ .  
b) Déterminer les couples  $(x, y)$  pour que  $A$  et  $B_{x,y}$  commutent.
2. a) Montrer que  $B {}^t B = I_2$ .  
b) Déterminer les couples  $(x, y)$  pour que  $B_{x,y}$  soit inversible.

### Exercice 11

Soit  $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On suppose que  $\forall (i, j) \in (\llbracket 1; n \rrbracket)^2$ , on a  $J_{i,j} = 1$ .

1. Calculer pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $J^n$ .
2. La matrice  $J$  est-elle inversible ?

### Exercice 12

Soit  $M \in M_n(\mathbb{R})$  telle que  $aM^2 + bM + cI_n = 0$ , avec  $a, b$  deux réels et  $c$  un réel non nul. Montrer que  $M$  est inversible.

Donner l'inverse de la matrice  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

### Exercice 13

Justifier que  $M$  est inversible et calculer son inverse

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

### Exercice 14

Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer  $(A + I_3)^3$ .
2. En déduire que  $A$  est inversible et exprimer son inverse en fonction de  $A$ .

### Exercice 15

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Exprimer  $A^2$  en fonction de  $A$  et de  $I_n$ . En déduire que  $A$  est inversible et expliciter  $A^{-1}$  en fonction de  $A$  et  $I_n$ .

### PUISSANCES DE MATRICE

#### Exercice 16

Soient  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer  $B^3$ .
2. À l'aide de la formule du binôme, calculer  $C^n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

#### Exercice 17

1. Soit  $M \in M_n(\mathbb{R})$  et  $P \in GL_n(\mathbb{R})$ .

On pose  $D = P^{-1}MP$ .

Démontrer que  $\forall k \in \mathbb{N}, M^k = PD^kP^{-1}$  et que

$\forall k \in \mathbb{N}, D^k = P^{-1}M^kP$

2. Soit  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$  et  $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

a) Vérifier que  $P$  est inversible et que  $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

b) Calculer  $D = P^{-1}MP$ , puis  $D^k$  pour  $k \in \mathbb{N}$ .

c) Expliciter  $M^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

d) Démontrer que  $M$  est inversible, et calculer  $M^{-k}$  pour  $k \in \mathbb{N}$ .

e) Calculer  $(I+M)^k$ , pour  $k \in \mathbb{N}$ , en utilisant encore la matrice  $D$ .

### Exercice 18

Soit  $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

1. Calculer  $(M(a, b))^n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

2. Comment faut-il choisir  $a$  et  $b$  pour qu'une des deux matrices  $(M(a, b))^2 M(a, b)$  soit proportionnelle l'une à l'autre ?

### Exercice 19

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & x & 2x \\ 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Calculer  $A^n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

### Exercice 20

1. Déterminer l'ensemble  $\mathcal{S}$  des matrices carrées  $M$  d'ordre 2 telles que

$$M^2 = 0$$

ou 0 désigne la matrice nulle d'ordre 2.

2. Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On suppose que  $A$  est inversible.

Déterminer l'ensemble  $\mathcal{S}'$  des matrices  $X$  vérifiant

$$(AX)^2 + AXB + BXA + B^2 = 0.$$

INDICATION : On pourra commencer par calculer  $(AX + B)^2$ .

### Exercice 21

Soient  $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , et  $A =$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer  $M^2$ .

2. En déduire pour  $n \in \mathbb{N}, A^n$ .

### DIVERS SUJETS

#### Exercice 22

Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Calculer  $A^4$ . Montrer que  $A$  est inversible ssi  $x \neq 0$ .

Lorsque  $x \neq 0$ , déterminer  $A^n$  pour  $n \in \mathbb{Z}$ .

#### Exercice 23

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

1. Trouver deux matrices non nulles  $U$  et  $V$  telles que  $AU = -U, AV = 2V$  et  $U + V = A$ .

2. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, A^{n+1} = (-1)^{n-1}U + 2^{n-1}V$$

#### Exercice 24

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour toute matrice carrée  $A = \text{mat } a$  de taille  $n$ , on appelle *trace de  $A$*  le nombre  $\text{Tr}(A) =$

$$\sum_{k=1}^n a_{kk}.$$

1. Calculer la trace des matrices carrées des exercices précédents. Calculer la trace de la matrice identité.

2. Vérifier :  $\forall (\lambda, \mu) \in (\mathbb{R})^2, \forall (A, B) \in M_n(\mathbb{R})^2, \text{Tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \text{Tr}(A) + \mu \text{Tr}(B)$ .

3. Démontrer :  $\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{R})^2, \text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ .

4. Démontrer que deux matrices semblables ont la même trace.

#### Exercice 25

On cherche à déterminer le *commutant* de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , c'est-à-dire l'ensemble des matrices  $A$  de

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  qui vérifient  $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad AM = MA$ . Soit  $A$  une telle matrice.

Pour cela on raisonne par analyse-synthèse.

1. *Analyse* Soit  $A$  une telle matrice.

- Soit  $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ . Expliciter les matrices  $DA$  et  $AD$  et en déduire que  $A$  est diagonale.
- Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Expliciter  $AM$  et  $MA$  et déduire que tous les coefficients diagonaux de  $A$  sont égaux.

2. *Synthèse* Décrire le commutant de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

### Exercice 26

Soit  $A, B$  et  $C$  trois matrices non nulles telles que  $ABC = 0$ . Montrer que deux au moins de ces matrices ne sont pas inversibles.

### Exercice 27

Soit  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  une matrice inversible avec  $A^{-1} = (\alpha_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ . On suppose que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 0; n \rrbracket^2, \quad a_{ij} \geq 0 \quad \text{et} \quad \alpha_{ij} \geq 0$$

Montrer que dans chaque rangée de  $A$  il y a un seul élément non nul.

(Voir l'exercice ??) Trouver les matrices stochastiques inversibles dont l'inverse est aussi une matrice stochastique.

### Exercice 28

Soit  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Dans cet exercice,  $I$  désigne la matrice identité d'ordre 3 et  $O_3$  la matrice nulle d'ordre 3. On se propose de calculer les puissances de  $A$  de plusieurs manières.

*Partie I — Par diagonalisation*

On pose  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

- Démontrer que  $P$  est inversible et donner son inverse.
- Calculer  $D = P^{-1}AP$ .
  - Pour  $n \in \mathbb{N}$ , calculer  $D^n$ .
  - Démontrer que  $D^n = P^{-1}A^nP$  et en déduire l'expression de  $A^n$ .

3. a) Justifier que  $D$  est inversible et en déduire que  $A$  est inversible.

b) En adaptant la question précédente, donner l'expression de  $A^{-n}$  en fonction de  $n$ , où  $n$  est un entier naturel.

*Partie II — Par le binôme de Newton*

1. Soit  $B = A - 2I$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , calculer  $B^n$  en fonction de  $B$ .

2. En utilisant la formule du binôme, calculer l'expression de  $A^n$  en fonction de  $n, A$  et  $I$ .

*Partie III — Par polynôme annulateur*

1. Démontrer que  $A^2 - 3A + 2I = O_3$ .

2. a) Démontrer par récurrence qu'il existe deux suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que, pour tout entier  $n, A^n = a_n A + b_n I$ . Donner les relations de récurrence vérifiées par  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

b) Démontrer que  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont des suites récurrentes d'ordre 2.

c) En déduire les expressions de  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en fonction de  $n$ , puis celle de  $A^n$  en fonction de  $n, A$  et  $I$ .

3. a) Justifier que  $A$  est inversible, et donner son inverse en fonction de  $A$  et  $I$ .

b) En reprenant la question précédente, donner l'expression de  $A^{-n}$  en fonction de  $A$  et  $I$ , pour tout entier naturel  $n$ .

## UTILISATION DE RELATIONS POLYNOMIALES

### Exercice 29

Soit  $M$  la matrice  $\begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ . On notera  $I$  la

matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer  $M^2$ . Montrer qu'il existe un unique couple de réels  $(\alpha, \beta)$  tels que  $M^2 = \alpha M + \beta I$ . Déterminer  $\alpha$  et  $\beta$ .

2. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ , il existe un couple de réels  $(a_n, b_n)$  tels que l'on

ait  $M^n = a_n M + b_n I$ , et déterminer des relations de récurrence vérifiées par les suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

3. Calculer  $a_n$  et  $b_n$  en fonction de  $n$ . Écrire  $M^n$  en fonction de  $n$ .

**Exercice 30**

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \\ 0 & 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Trouver une ma-

trice  $J$  telle que l'on ait :

$$A = I + aJ + a^2 J^2 + a^3 J^3 + a^4 J^4$$

Calculer  $J^5$ . En déduire que  $A$  est inversible et calculer son inverse.

**Exercice 31**

Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ .

1. Montrer qu'il existe deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $A^2 - \alpha A + \beta I = 0$ .
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $\beta$  pour que  $A$  soit inversible.
3. Montrer que, pour tout entier  $n$ , il existe deux réels  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  tels que  $A^n = \alpha_n A + \beta_n I$ .

FORMULE DU BINÔME, ETC.

**Exercice 32**

Soit  $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ . Calculer  $J^n$ , pour tout entier  $n$ . En déduire  $A^n$ .

**Exercice 33**

Soit  $a$  un réel et  $A = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Calculer

$(A + I)^3$ , en déduire  $A^n$  ( $n$  un entier naturel).

**Exercice 34**

Soit  $A$  une matrice carrée d'ordre  $n$ , telle que  $A^3 = 0$ . Montrer que  $A + I$  est inversible. Pour quelles valeurs de  $a$  a-t-on  $A + aI$  inversible?

**Exercice 35**

Soit  $J$  la matrice carrée d'ordre  $n$  dont tous les

coefficients sont nuls, sauf ceux d'ordre  $(i, i + 1)$  (pour  $i \in \llbracket 1 ; n - 1 \rrbracket$ ), égaux à 1.

1. Calculer les puissances successives de la matrice  $J$ .
2. Soient  $a$  et  $b$  deux réels, et  $A$  la matrice  $aI_n + bJ$ . Calculer  $A^n$ .

