Calculs élémentaires

Ex. 1 — Recenser et calculer tous les produits possibles de deux matrices parmi celles ci-dessous.

$A=\begin{pmatrix}2&1&0&-1\\1&1&0&0\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-2\end{pmatrix}$;

$C=\begin{pmatrix}4&3&23\\-1&0&0\end{pmatrix}$; $D=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\2&3&-1\end{pmatrix}$;

$E=\begin{pmatrix}2&5\\3&1\\-2&8\end{pmatrix}$.

Ex. 2 — Soit $A=\begin{pmatrix}x&x'&x''\\y&y'&y''\\z&z'&z''\end{pmatrix}$, $M=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ et ${}^tY=\begin{pmatrix}1&-1&1\end{pmatrix}$.

1. a) Calculer AM, AX, AY.
   b) Montrer que M n'est pas inversible.
2. Trouver une matrice dont le produit avec A est
   a) $\begin{pmatrix}x+x'+x''\\y+y'+y''\\z+z'+z''\end{pmatrix}$;
   b) $\begin{pmatrix}x&x'&x''\\0&0&0\\z&z'&z''\end{pmatrix}$;
   c) $\begin{pmatrix}x&x'&x''\\0&0&0\\y&y'&y''\end{pmatrix}$;
   d) $\begin{pmatrix}x-x'&x'-x''&x''-x\\y-y'&y'-y''&y''-y\\z-z'&z'-z''&z''-z\end{pmatrix}$

Inversion de matrices

Ex. 3 — Montrer que les matrices suivantes sont inversibles, et calculer leurs inverses :

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&1/2&1/3\\1/2&1/3&1/4\\1/3&1/4&1/5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&\dots&n\\0&1&2&\dots&n-1\\0&0&1&\dots&n-2\\\vdots&&\ddots&\ddots&\vdots\\0&\dots&\dots&0&1\end{pmatrix}$$

Ex. 4 — Pour quelles valeurs de λ les matrices suivantes sont-elles inversibles ?

$$\begin{pmatrix}-\lambda&1&1\\1&-\lambda&1\\1&1&-\lambda\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1-\lambda&1&0&0\\0&1-\lambda&1&0\\0&0&1-\lambda&1\\1&0&0&1-\lambda\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2-\lambda&0&1&0\\0&-1-\lambda&0&1\\1&0&2-\lambda&0\\0&1&0&-1-\lambda\end{pmatrix}$$

Ex. 5 — Soit $A=\begin{pmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{pmatrix}$ une matrice telle que $\sum_{i=1}^3 x_i^2=\sum_{i=1}^3 y_i^2=\sum_{i=1}^3 z_i^2=1$ et $\sum_{i=1}^3 x_iy_i=\sum_{i=1}^3 y_iz_i=\sum_{i=1}^3 x_iz_i=0$. Montrer que A est inversible, d'inverse ${}^tA$.

Ex. 6 — Pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, on considère la matrice $R(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$.
Démontrer que $R(\theta)R(\varphi)=R(\theta+\varphi)$. Démontrer que $R(\theta)$ est inversible pour tout $\theta\in\mathbb{R}$ et calculer son inverse.

Ex. 7 — Soit $(A,B)\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$ telles que $A+B=AB$. Montrer que $A-I_n$ est inversible et calculer $(A-I_n)^{-1}$.

Ex. 8 — Méthode du déterminant Soit la matrice $M=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$. On note $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et $O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

1. Montrer que $M^2=(a+d)M-(ad-bc)I$.
2. En déduire que M est inversible ssi $ad-bc\neq 0$. Exprimer alors M^{-1} en fonction de a, b, c et d.

Ex. 9 —
1. Soit $A\in M_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que $A^4=0$. Montrer que I_n-A est inversible, d'inverse $I_n+A+A^2+A^3$.
2. Soit $B=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$ et $A=I_4-B$. Calculer A^4, puis inverser B. Calculer ensuite B^n.

Ex. 10 — Soit $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{1}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{1}}{2} \end{pmatrix}$, et, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $B_{x,y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{y}{2} \\ \frac{x}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

1. a) Calculer AB et BA.
   b) Déterminer les couples (x, y) pour que A et $B_{x,y}$ commutent.
2. a) Montrer que $B\,{}^tB = I_2$.
   b) Déterminer les couples (x, y) pour que $B_{x,y}$ soit inversible.

Ex. 11 — Soit $J \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $\forall (i, j) \in ([\![1 ; n]\!])^2$, on a $J_{i,j} = 1$.

1. Calculer pour $n \in \mathbb{N}$, J^n.
2. La matrice J est-elle inversible ?

Ex. 12 — Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $aM^2 + bM + cI_n = 0$, avec a, b deux réels et c un réel non nul. Montrer que M est inversible.

Donner l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ex. 13 — Justifier que M est inversible et calculer son inverse

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$$

Ex. 14 — Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A + I_3)^3$.
2. En déduire que A est inversible et exprimer son inverse en fonction de A.

Ex. 15 — Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$$

Exprimer A^2 en fonction de A et de I_n. En déduire que A est inversible et expliciter A^{-1} en fonction de A et I_n.

Puissances de matrice

Ex. 16 — Soient $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer B^3.
2. À l'aide de la formule du binôme, calculer C^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Ex. 17 —
1. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ et $P \in GL_n(\mathbb{R})$.
   On pose $D = P^{-1}MP$.
   Démontrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $M^k = PD^kP^{-1}$ et que $\forall k \in \mathbb{N}$, $D^k = P^{-1}M^kP$
2. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   a) Vérifier que P est inversible et que $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
   b) Calculer $D = P^{-1}MP$, puis D^k pour $k \in \mathbb{N}$.
   c) Expliciter M^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   d) Démontrer que M est inversible, et calculer M^{-k} pour $k \in \mathbb{N}$.
   e) Calculer $(I + M)^k$, pour $k \in \mathbb{N}$, en utilisant encore la matrice D.

Ex. 18 — Soit $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Calculer $(M(a, b))^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Comment faut–il choisir a et b pour qu'une des deux matrices $(M(a, b))^2$ $M(a, b)$ soit proportionnelle l'une à l'autre ?

Ex. 19 — Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & x & 2x \\ 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Ex. 20 —
1. Déterminer l'ensemble $\mathbb{S}$ des matrices carrées M d'ordre 2 telles que
$$M^2 = 0$$
   ou 0 désigne la matrice nulle d'ordre 2.
2. Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est inversible.
   Déterminer l'ensemble $\mathbb{S}'$ des matrices X vérifiant
$$(AX)^2 + AXB + BXA + B^2 = 0.$$

INDICATION : *On pourra commencer par calculer* $(AX+B)^2$.

Ex. 21 — Soient $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer M^2.
2. En déduire pour $n \in \mathbb{N}$, A^n.

Divers sujets

Ex. 22 — Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer A^4. Montrer que A est inversible ssi $x \neq 0$. Lorsque $x \neq 0$, déterminer A^n pour $n \in \mathbb{Z}$.

Ex. 23 — Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Trouver deux matrices non nulles U et V telles que $AU = -U, AV = 2V$ et $U + V = A$.
2. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A^{n+1} = (-1)^{n-1}U + 2^{n-1}V$$

Ex. 24 — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour toute matrice carrée $A = \operatorname{mat} a$ de taille n, on appelle *trace de A* le nombre $\operatorname{Tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ii}$.

1. Calculer la trace des matrices carrées des exercices précédents. Calculer la trace de la matrice identité.
2. Vérifier : $\forall(\lambda,\mu) \in (\mathbb{R})^2$, $\forall(A,B) \in M_n(\mathbb{R})^2$, $\operatorname{Tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \operatorname{Tr}(A) + \mu \operatorname{Tr}(B)$.
3. Démontrer : $\forall(A,B) \in M_n(\mathbb{R})^2$, $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$.
4. Démontrer que deux matrices semblables ont la même trace.

Ex. 25 — On cherche à déterminer le *commutant* de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui vérifient $\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \quad AM = MA$.
Soit A une telle matrice.
Pour cela on raisonne par analyse-synthèse.

1. *Analyse* Soit A une telle matrice.
   a) Soit $D \in \mathscr{D}_n(\mathbb{K})$. Expliciter les matrices DA et AD et en déduire que A est diagonale.
   b) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Expliciter AM et MA et déduire que tous les coefficients diagonaux de A sont égaux.
2. *Synthèse* Décrire le commutant de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Ex. 26 — Soit A, B et C trois matrices non nulles telles que $ABC = 0$. Montrer que deux au moins de ces matrices ne sont pas inversibles.

Ex. 27 — Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice inversible avec $A^{-1} = (\alpha_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. On suppose que
$$\forall(i,j) \in [\![0\,;n]\!]^2, \quad a_{ij} \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \alpha_{ij} \geqslant 0$$
Montrer que dans chaque rangée de A il y a un seul élément non nul.
(Voir l'exercice **??***)* Trouver les matrices stochastiques inversibles dont l'inverse est aussi une matrice stochastique.

Ex. 28 — Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dans cet exercice, I désigne la matrice identité d'ordre 3 et O_3 la matrice nulle d'ordre 3. On se propose de calculer les puissances de A de plusieurs manières.

Partie I — Par diagonalisation

On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que P est inversible et donner son inverse.
2. a) Calculer $D = P^{-1}AP$.
   b) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer D^n.
   c) Démontrer que $D^n = P^{-1}A^nP$ et en déduire l'expression de A^n.
3. a) Justifier que D est inversible et en déduire que A est inversible.
   b) En adaptant la question précédente, donner l'expression de A^{-n} en fonction de n, où n est un entier naturel.

Partie II — Par le binôme de Newton

1. Soit $B = A - 2I$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer B^n en fonction de B.
2. En utilisant la formule du binôme, calculer l'expression de A^n en fonction de n, A et I.

Partie III — Par polynôme annulateur

1. Démontrer que $A^2 - 3A + 2I = O_3$.
2. a) Démontrer par récurrence qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout entier n, $A^n = a_nA + b_nI$. Donner les relations de récurrence vérifiées par $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   b) Démontrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites récurrentes d'ordre 2.
   c) En déduire les expressions de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n, puis celle de A^n en fonction de n, A et I.
3. a) Justifier que A est inversible, et donner son inverse en fonction de A et I.
   b) En reprenant la question précédente, donner l'expression de A^{-n} en fonction de A et I, pour tout entier naturel n.

Utilisation de relations polynomiales

Ex. 29 — Soit M la matrice $\begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. On notera I la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer M^2. Montrer qu'il existe un unique couple de réels (α, β) tels que $M^2 = \alpha M + \beta I$. Déterminer α et β.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, il existe un couple de réels (a_n, b_n) tels que l'on ait $M^n = a_nM + b_nI$, et déterminer des relations de récurrence vérifiées par les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Calculer a_n et b_n en fonction de n. Écrire M^n en fonction de n.

Ex. 30 — Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \\ 0 & 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver une matrice J telle que l'on ait :

$$A = I + aJ + a^2J^2 + a^3J^3 + a^4J^4$$

Calculer J^5. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Ex. 31 — Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe deux réels α et β tels que $A^2 - \alpha A + \beta I = 0$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur β pour que A soit inversible.
3. Montrer que, pour tout entier n, il existe deux réels α_n et β_n tels que $A^n = \alpha_nA + \beta_nI$.

Formule du binôme, etc.

Ex. 32 — Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer J^n, pour tout entier n. En déduire A^n.

Ex. 33 — Soit a un réel et $A = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer $(A+I)^3$, en déduire A^n (n un entier naturel).

Ex. 34 — Soit A une matrice carrée d'ordre n, telle que $A^3 = 0$. Montrer que $A + I$ est inversible. Pour quelles valeurs de a a-t-on $A + aI$ inversible ?

Ex. 35 — Soit J la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont nuls, sauf ceux d'ordre $(i, i+1)$ (pour $i \in [\![1\,;\,n-1]\!]$), égaux à 1.

1. Calculer les puissances successives de la matrice J.
2. Soient a et b deux réels, et A la matrice $aI_n + bJ$. Calculer A^n.