Formalisme logique

Ex. 1 — 1. Traduire sous forme logique l'affirmation « Mange–ta soupe ou tu seras privé de télévision. »

2. Traduire sous forme logique l'affirmation « Tu prendras du gâteau ou de la glace ? »

Ex. 2 — Traduire ces termes de logique stoïcienne [1] à l'aide du formalise moderne.

1. Proposition conditionnelle (SI) « S'il fait jour, il fait clair »
2. Proposition subconditionnelle (PUISQUE) « Puisqu'il fait jour, il fait clair »
3. Proposition conjonctive (ET) « Il fait jour et il fait clair »
4. Proposition disjonctive (OU) « Ou il fait jour, ou il fait nuit »

Ex. 3 — Dire si les propositions suivantes sont vraies, fausses, ou autre chose

1. $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \cap \mathbb{R}_-^*, \quad x = 0$;
2. $\exists x \in \mathbb{R}_-^* \cap \mathbb{N}, \quad x^2 > 0$;
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 < 0 \Longrightarrow x < 0$;
4. $\forall x \in \mathbb{C}, \quad x^2 < 0 \Longrightarrow x < 0$.

Implications

Ex. 4 — Soit P et Q deux assertions. Chacune des phrases ci-dessous est logiquement équivalente à l'assertion « $P \Longrightarrow Q$ ». Remplacer les pointillés par les lettres P et Q

1. ... implique ...
2. Pour que ... soit vraie, il suffit que ... soit vraie.
3. Si ... n'est pas vraie alors ... n'est pas vraie.

Ex. 5 — Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Donner la réciproque et la contraposée des propositions suivantes. Dans chaque cas, donner la valeur de vérité.

1. f est constante $\Longrightarrow f$ est croissante ;
2. f' est positive $\Longrightarrow f$ est croissante ;
3. $f' = 0 \quad \Longrightarrow f$ est constante ;
4. f admet un maximum en $1 \Longrightarrow f'(1) = 0$.

Ex. 6 — 1. Quelle est la valeur de vérité des propositions suivantes ?

a) 2 est pair $\Longrightarrow$ 4 est pair ;
b) 2 est pair $\Longrightarrow$ 3 est pair ;
c) 2 est impair $\Longrightarrow$ 3 est pair
d) $4 > 1 \Longleftrightarrow 4^2 > 1$;
e) le ciel est bleu $\Longleftrightarrow 2 + 2 = 4$.

2. À partir des propositions précédentes, pouvez-vous rédiger un raisonnement prouvant que que 3 est pair ? Que $16 > 1$? Justifier.

Raisonnements

Ex. 7 — 1. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \qquad 0 \leqslant x \leqslant \varepsilon$$

Montrer que $x = 0$.

2. La propriété précédente est-elle vraie en remplaçant $\mathbb{R}$ par $\mathbb{Z}$? Et en remplaçant $\mathbb{R}$ par $\mathbb{Q}$?

Ex. 8 — Montrer que si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors $(i) \Longleftrightarrow (ii)$ avec
(i) $xy > 0$;
(ii) $x = 0$ ou $y = 0$ ou ($x > 0$ et $y > 0$) ou ($x < 0$ et $y < 0$).

Ex. 9 — Montrer que l'ensemble $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } y = x - 1\}$ est inclus dans l'ensemble $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } (-x + 2y + 4)(3x - y + 3) \geqslant 0\}$.

Ex. 10 — Démontrer que $\{2^{k+1} - 2^k \text{ avec } k \in \mathbb{N}\} = \{2^n \text{ avec } n \in \mathbb{N}\}$

Ex. 11 — En raisonnant par l'absurde, démontrer les résultats suivants.

1. Soit n un entier naturel non nul. On suppose que $4n + 1$ objets sont rangés dans n tiroirs. Montrer que l'un des tiroirs contient au moins 5 objets.
2. Soit x et y deux nombres complexes. Démontrer que $(x \neq 1 \text{ et } y \neq 1) \Longrightarrow (xy + 1 - x - y \neq 0)$.

1. Le *stoïcisme* est une école philosophique de la Grèce antique, fondée par Zénon de Citium en 301 av. J.-C. Son système philosophique est divisé en trois parties : la logique, la physique et la morale.

Usage des quantificateurs

Ex. 12 — Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ?

1. $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \exists y \in \mathbb{R}_+, \qquad y^2 = x$;
2. $\exists y \in \mathbb{R}_+, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad y^2 = x$;
3. $\exists y \in \mathbb{R}_+, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad xy = x$;

Ex. 13 — Traduire avec des quantificateurs les assertions suivantes et préciser si elles sont vraies ou fausses.

1. Tout nombre complexe peut s'écrire de la forme $x + \mathrm{i}y$, avec x et y deux réels.
2. Tout rationnel peut s'écrire sous la forme d'un quotient de deux entiers impairs.
3. Il existe un nombre complexe dont le module est inférieur au module de tous les autres nombres complexes.
4. Il existe un entier plus petit que tous les autres entiers.
5. Il existe un entier naturel qui est plus petit que tous les autres.
6. Il existe des réels qui ne sont pas quotient de deux entiers relatifs.
7. Tous les réels possèdent un inverse dans $\mathbb{R}$.
8. Tout sous-ensemble de $\mathbb{N}$ possède un plus grand élément.

Ex. 14 — Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et a un réel. Écrire l'énoncé « f atteint un minimum en a » en utilisant des signes logiques. De même écrire l'énoncé « f n'atteint pas de minimum en a ».

Ex. 15 — Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Écrire l'énoncé « l'équation $f(x) = 0$ admet au moins deux solutions distinctes » à l'aide de quantificateurs, puis à l'aide d'un ensemble.

Ex. 16 — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre réels. Écrire, à l'aide de quantificateurs les assertions :

1. la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par $M \in \mathbb{R}$;
2. la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée ;
3. la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ;
4. la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante ;
5. la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire (c'est-à-dire constante à partir d'un certain rang).

Ex. 17 — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Les phrases suivantes sont-elles vraies, fausses, ou autre chose ?

1. $u_n \leqslant u_{n+1} \Longrightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ;
2. « $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant u_{n+1}$ » $\Longrightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ;
3. « $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2, n \leqslant m \Longrightarrow u_n \leqslant u_m$ » $\Longrightarrow$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ;

Ex. 18 — Soit l'assertion

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{n} < \varepsilon$$

Écrire sa négation. Qu'en pensez-vous ?

Ex. 19 — Interpréter les phrases suivantes à l'aide de quantificateurs

1. Il existe des nombres complexes différents qui ont le même carré.
2. tout nombre réel positif a une racine carrée ;
3. le nombre 3 n'est le sinus d'aucun nombre ;
4. un nombre complexe est caractérisé par ses parties réelles et imaginaires.
5. un nombre complexe non nul est déterminé par son module et son argument.

Démonstration par récurrence

Ex. 20 —

1. Montrer que $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n+1) = (n+1)^2$ (somme des nombres impairs).
2. Montrer que $1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3 = 2n^4 - n^2$ (somme des cubes des nombres impairs).

Ex. 21 — On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 2$, $u_1 = 5$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Vérifier que $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n + 3^n$.

Ex. 22 — Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

Ex. 23 — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1 \ \text{ et } \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1}^2 + u_n^2$$

1. Montrer que cette suite est positive.
2. Montrer qu'elle est croissante.

Ex. 24 — On considère, pour $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathscr{P}(n)$ « $2^n > n^2$ »

1. Pour quelles valeurs de n l'implication $\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$ est-elle vraie ?
2. Pour quelles valeurs de n la propriété $\mathscr{P}(n)$ est-elle vraie ?

Ex. 25 — On considère la suite réelle $(n_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2\left(\sum_{k=0}^{n} \sqrt{u_k}\right) + \sqrt{u_n} + 1$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Faire une hypothèse sur l'expression de u_n en fonction de n et la démontrer.

Ex. 26 — On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par

$$u_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_{n+1} = 1 + \frac{n}{u_n}$$

Montrer que $\sqrt{n} \leqslant u_n \leqslant \sqrt{n} + 1$ pour $n \geqslant 2$.

Pour s'entraîner

Ex. 27 — Montrer que la somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.

Ex. 28 — Soit α un nombre irrationnel strictement positif. Démontrer que $\sqrt{\alpha}$ est également irrationnel.

Ex. 29 — Dessiner l'ensemble des points M de coordonnées (x, y) dans le plan, défini par

1. $|x| + |y| = 1$;
2. $xy\,(|x| + |y| - 1) = 0$;
3. $\left(x^2 - y^2\right)(|x| + |y| - 1) = 0$;
4. $\max(|x|, |y|) \leqslant 1$;
5. $\min(|x|, |y|) \leqslant 1$;
6. $|x| + |y| \neq 1 \Longrightarrow xy = 0$.

Ex. 30 —

1. Soit P une assertion. Donner les implications existant entre les propositions

   (P_1) $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $P(x)$ $\quad$ (P_3) $\forall x \in \mathbb{R}$ $P(x)$

   (P_2) $\exists x \in \mathbb{C}$ tel que $P(x)$ $\quad$ (P_4) $\forall x \in \mathbb{C}$ $P(x)$

2. Même question avec

   (P_1) $\exists x \in \mathbb{R}, \ \exists y \in \mathbb{R},$ tel que $P(x, y)$

   (P_3) $\forall x \in \mathbb{R}, \ \exists y \in \mathbb{R}, \quad P(x, y)$

   (P_2) $\exists x \in \mathbb{R}, \ \forall y \in \mathbb{R}, \quad P(x, y)$

   (P_4) $\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall y \in \mathbb{R}, \quad P(x, y)$

Ex. 31 — On se donne la propriété (P)

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \ \forall y \in \mathbb{R}, \ \ \forall z \in \mathbb{R}, \quad (xy = yz) \Rightarrow (x = z)$$

(P) est-elle vraie ? Pourquoi ? Écrire sa négation.

Ex. 32 — Soient x et y deux réels et n un entier naturel. Ecrire les contraposées des implications suivantes et les démontrer :

1. $xy \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$ et $y \neq 0$.
2. n est premier $\Rightarrow n = 2$ ou n est impair.
3. $x \neq y \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$.

Ex. 33 — Soient les sous-ensembles $A = \{1, 2\}$ et $B = \{1, 2, 4\}$ de $\mathbb{N}$, et $f \ : \left| \begin{array}{rcl} A \times B & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (x, y) & \longmapsto & y^x \end{array} \right.$.

Pour $x \in A$ et $y \in B$, examiner la véracité des assertions suivantes (si elle est vraie, la démontrer, sinon, donner un contre-exemple).

1. Si $x + y = 4$, alors $f(x, y) = 4$.
2. Si $f(x, y) = 1$, alors $x = y$.
3. Si $f(x, y) = 8$, alors $x = 2$.
4. Négation de **??**.
5. Contraposée de **??**.
6. Si $f(x, y) = 1$ et $x \neq 2$, alors $y = 1$.
7. Négation de **??**.
8. Contraposée de **??**.

Ex. 34 — Pour chacune des propriétés suivantes, dire si elle est vraie ou non (justifier votre réponse), et écrire sa négation. Écrire la contraposée de (3) et (4).

1. $\exists a \in \mathbb{R}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \exists b \in \mathbb{R}$ tels que $x = ab$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall y \in \mathbb{R}, \ \exists a \in \mathbb{R}$ tels que $y = ax$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall y \in \mathbb{R}, \ (xy \geqslant 4 \Rightarrow (x \geqslant 2 et y \geqslant 2))$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \ ((x^3 - 2x^2 + x = 0) \Rightarrow (x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = 2))$.

Ex. 35 — Soient x et y deux nombres réels. Écrire la négation des propositions

$$(P) : 0 < x \leqslant 1 \qquad (Q) : xy = 0 \qquad (R) : x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$$

Ex. 36 — Soit P « $\exists x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad (y < x) \Rightarrow (y < 2x)$. Écrire (non P). En déduire si la proposition P est vraie ou fausse.