

Logique

BCPST I, 12/2017

Formalisme logique – valeurs de vérité

Exercice 1

- Traduire sous forme logique l'affirmation « Mange-ta soupe ou tu seras privé de télévision. »
- Traduire sous forme logique l'affirmation « Tu prendras du gâteau ou de la glace ? »

Exercice 2

Soit P , Q et R trois propositions. Donner la négation de

- P ou (Q et R)
- P et (Q ou R)
- $P \implies$ non Q
- non (P ou Q) $\implies R$
- P et $Q \implies$ non R
- P et (non Q ou R)
- (P et Q) $\implies R$

Exercice 3

Traduire ces termes de logique stoïcienne¹ à l'aide du formalisme moderne.

- Proposition conditionnelle (SI) « S'il fait jour, il fait clair »
- Proposition subconditionnelle (PUISQUE) « Puisqu'il fait jour, il fait clair »
- Proposition conjonctive (ET) « Il fait jour et il fait clair »
- Proposition disjonctive (OU) « Ou il fait jour, ou il fait nuit »

Exercice 4

- Quelle est la valeur de vérité des propositions suivantes?
 - 2 est pair \implies 4 est pair;
 - 2 est pair \implies 3 est pair;
 - 2 est impair \implies 3 est pair
 - $4 > 1 \iff 4^2 > 1$;
 - le ciel est bleu $\iff 2 + 2 = 4$.
- À partir des propositions précédentes, pouvez-vous rédiger un raisonnement prouvant que que 3 est pair? Que $16 > 1$? Justifier.

Exercice 5

Soit f une fonction dérivable de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Donner la réci-

1. Le stoïcisme est une école philosophique de la Grèce antique, fondée par Zénon de Citium en 301 av. J.-C. Son système philosophique est divisé en trois parties : la logique, la physique et la morale.

proque et la contraposée des propositions suivantes. Dans chaque cas, donner la valeur de vérité.

- f est constante $\implies f$ est croissante;
- f' est positive $\implies f$ est croissante;
- $f' = 0 \implies f$ est constante;
- f admet un maximum en 1 $\implies f'(1) = 0$.

Raisonnements

Exercice 6

- Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad 0 \leq x \leq \varepsilon$$

Montrer que $x = 0$.

- La propriété précédente est-elle vraie en remplaçant \mathbb{R} par \mathbb{Z} ? Et en remplaçant \mathbb{R} par \mathbb{Q} ?

Exercice 7

Montrer que l'ensemble

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } y = x - 1\}$$

est inclus dans l'ensemble $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } (-x + 2y + 4)(3x - y + 3) \geq 0\}$.

Exercice 8

Démontrer que

$$\{2^{k+1} - 2^k \text{ avec } k \in \mathbb{N}\} = \{2^n \text{ avec } n \in \mathbb{N}\}$$

Exercice 9

En raisonnant par l'absurde, démontrer les résultats suivants.

- Soit n un entier naturel non nul. On suppose que $4n + 1$ objets sont rangés dans n tiroirs. Montrer que l'un des tiroirs contient au moins 5 objets.
- Soit x et y deux nombres complexes. Démontrer que $(x \neq 1 \text{ et } y \neq 1) \implies (xy + 1 - x - y \neq 0)$.

Exercice 10

Montrer que $\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$ est irrationnel (c'est-à-dire qu'il ne peut s'écrire comme le quotient de deux entiers).

Exercice 11 — Contraposée

Énoncer les contraposées des propositions suivantes

- Si je suis à Bordeaux, alors on est lundi.
- Ceux qui parlent ne savent pas.
- Si le dernier chiffre d'un nombre n est 2, 3, 7 ou 8, alors n n'est pas le carré d'un entier.

Exercice 12 — Contraposée

Énoncer les contraposées des propositions suivantes. Les démontrer ensuite. Étudier leurs réciproque.

- $x^3 = 2 \implies x < 2$.
- Soit A et B deux réels :

$$(\forall \varepsilon > 0, \quad A < B + \varepsilon) \implies A \leq B$$

Exercice 13 — Analyse-synthèse

Trouver toutes les fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , dérivables, telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(y - f(x)) = 2 - x - y$$

Exercice 14 — Analyse-synthèse

Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Démontrer que f est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Exercice 15 — Analyse-synthèse

En raisonnant par analyse-synthèse, résoudre l'équation $x = \sqrt{x+2}$ d'inconnue réelle x .

Quantificateurs

Exercice 16

Traduire avec des quantificateurs les assertions suivantes et préciser si elles sont vraies ou fausses.

- Tout nombre complexe peut s'écrire de la forme $x + iy$, avec x et y deux réels.
- Tout rationnel peut s'écrire sous la forme d'un quotient de deux entiers impairs.
- Il existe un nombre complexe dont le module est inférieur au module de tous les autres nombres complexes.
- Il existe un entier plus petit que tous les autres entiers.
- Il existe un entier naturel qui est plus petit que tous les autres.
- Il existe des réels qui ne sont pas quotient de deux entiers relatifs.
- Tous les réels possèdent un inverse dans \mathbb{R} .
- Tout sous-ensemble de \mathbb{N} possède un plus grand élément.

Exercice 17

Donner la négation des phrases suivantes

- Toutes les boules contenues dans l'urne sont rouges ;
- Certains nombres entiers sont pairs
- Si un nombre entier est divisible par 4, il se termine par 4.
- Deux boules tirées portent le même numéro.
- Il n'y a que deux boules tirées qui portent le même numéro.

Exercice 18

Compléter, si c'est possible, par \exists ou \forall pour que les énoncés suivants soient vrais

- $\dots x \in \mathbb{R}, \quad (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$
- $\dots x \in \mathbb{R}, \quad (x+1)^2 = x^2 + 3x + 1$

- $\dots x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + 3x + 2 = 0$
- $\dots x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + 2x + 3 \neq 0$

Exercice 19

Dire si les propositions suivantes sont vraies, fausses, ou autre chose

- $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \cap \mathbb{R}_-^*, \quad x = 0;$ $3. \forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 < 0 \implies x < 0;$
- $\exists x \in \mathbb{R}_-^* \cap \mathbb{N}, \quad x^2 > 0;$ $4. \forall x \in \mathbb{C}, \quad x^2 < 0 \implies x < 0.$

Exercice 20

Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ?

- $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \exists y \in \mathbb{R}_+, \quad y^2 = x;$
- $\exists y \in \mathbb{R}_+, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad y^2 = x;$
- $\exists y \in \mathbb{R}_+, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad xy = x;$

Exercice 21

Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et a un réel. Écrire l'énoncé « f atteint un minimum en a » en utilisant des signes logiques. De même écrire l'énoncé « f n'atteint pas de minimum en a ».

Exercice 22

Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Écrire l'énoncé « l'équation $f(x) = 0$ admet au moins deux solutions distinctes » à l'aide de quantificateurs, puis à l'aide d'un ensemble.

Exercice 23

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombre réels. Écrire, à l'aide de quantificateurs les assertions :

- la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par $M \in \mathbb{R}$;
- la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée ;
- la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée ;
- la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante ;
- la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire (c'est-à-dire constante à partir d'un certain rang).

Exercice 24

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Les phrases suivantes sont-elles vraies, fausses, ou autre chose ?

- $u_n \leq u_{n+1} \implies (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante ;
- « $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$ » $\implies (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante ;
- « $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, n \leq m \implies u_n \leq u_m$ » $\implies (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante ;

Exercice 25

Soit l'assertion

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{n} < \varepsilon$$

Écrire sa négation. Qu'en pensez-vous ?

Exercice 26

Interpréter les phrases suivantes à l'aide de quantificateurs

1. Il existe des nombres complexes différents qui ont le même carré.
2. tout nombre réel positif a une racine carrée;
3. le nombre 3 n'est le sinus d'aucun nombre;
4. un nombre complexe est caractérisé par ses parties réelles et imaginaires.
5. un nombre complexe non nul est déterminé par son module et son argument.

Démonstration par récurrence

Exercice 27

1. Montrer que $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n + 1) = (n + 1)^2$ (somme des nombres impairs).
2. Montrer que $1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n - 1)^3 = 2n^4 - n^2$ (somme des cubes des nombres impairs).

Exercice 28

On définit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 2, u_1 = 5$ et, pour $n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.

Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n + 3^n$.

Exercice 29

Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

Exercice 30

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = 0, u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1}^2 + u_n^2$$

1. Montrer que cette suite est positive.
2. Montrer qu'elle est croissante.

Exercice 31

On considère, pour $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$ « $2^n > n^2$ »

1. Pour quelles valeurs de n l'implication $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$ est-elle vraie?
2. Pour quelles valeurs de n la propriété $\mathcal{P}(n)$ est-elle vraie?

Exercice 32

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2 \left(\sum_{k=0}^n \sqrt{u_k} \right) + \sqrt{u_n} + 1$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3 .
2. Faire une hypothèse sur l'expression de u_n en fonction de n et la démontrer.

Exercice 33

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par

$$u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = 1 + \frac{n}{u_n}$$

Montrer que $\sqrt{n} \leq u_n \leq \sqrt{n+1}$ pour $n \geq 2$.

Pour s'entraîner

Exercice 34

Montrer que la somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.

Exercice 35

Soit α un nombre irrationnel strictement positif. Démontrer que $\sqrt{\alpha}$ est également irrationnel.

Exercice 36

Dessiner l'ensemble des points M de coordonnées (x, y) dans le plan, défini par

1. $|x| + |y| = 1$;
2. $xy(|x| + |y| - 1) = 0$;
3. $(x^2 - y^2)(|x| + |y| - 1) = 0$;
4. $\max(|x|, |y|) \leq 1$;
5. $\min(|x|, |y|) \leq 1$;
6. $|x| + |y| \neq 1 \implies xy = 0$.

Exercice 37

1. Soit P une assertion. Donner les implications existant entre les propositions

$$(P_1) \exists x \in \mathbb{R} \text{ tel que } P(x) \quad (P_3) \forall x \in \mathbb{R} P(x)$$

$$(P_2) \exists x \in \mathbb{C} \text{ tel que } P(x) \quad (P_4) \forall x \in \mathbb{C} P(x)$$

2. Même question avec

$$(P_1) \exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \text{ tel que } P(x, y)$$

$$(P_3) \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, P(x, y)$$

$$(P_2) \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, P(x, y)$$

$$(P_4) \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, P(x, y)$$

Exercice 38

On se donne la propriété (P)

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}, (xy = yz) \implies (x = z)$$

(P) est-elle vraie? Pourquoi? Écrire sa négation.

Exercice 39

Soient x et y deux réels et n un entier naturel. Ecrire les contraposées des implications suivantes et les démontrer :

1. $xy \neq 0 \implies x \neq 0$ et $y \neq 0$.
2. n est premier $\implies n = 2$ ou n est impair.
3. $x \neq y \implies (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$.

Exercice 40

Soient les sous-ensembles $A = \{1, 2\}$ et $B = \{1, 2, 4\}$ de \mathbb{N} ,

$$\text{et } f : \begin{cases} A \times B \longrightarrow \mathbb{N} \\ (x, y) \longmapsto y^x \end{cases}$$

Pour $x \in A$ et $y \in B$, examiner la véracité des assertions suivantes (si elle est vraie, la démontrer, sinon, donner un contre-exemple).

- | | |
|--|--|
| 1. Si $x + y = 4$, alors
$f(x, y) = 4$. | 4. Négation de ??. |
| 2. Si $f(x, y) = 1$, alors
$x = y$. | 5. Contraposée de ??. |
| 3. Si $f(x, y) = 8$, alors
$x = 2$. | 6. Si $f(x, y) = 1$ et $x \neq 2$,
alors $y = 1$. |
| | 7. Négation de ??. |
| | 8. Contraposée de ??. |

Exercice 41

Pour chacune des propriétés suivantes, dire si elle est vraie ou non (justifier votre réponse), et écrire sa négation.

Écrire la contraposée de (3) et (4).

1. $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R}$ tels que $x = ab$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \exists a \in \mathbb{R}$ tels que $y = ax$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (xy \geq 4 \Rightarrow (x \geq 2 \text{ et } y \geq 2))$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, ((x^3 - 2x^2 + x = 0) \Rightarrow (x = 0 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x = 2))$.

Exercice 42

Soient x et y deux nombres réels. Écrire la négation des propositions

$$(P) : 0 < x \leq 1 \quad (Q) : xy = 0 \quad (R) : x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$$

Exercice 43

Soit $P \ll \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (y < x) \Rightarrow (y < 2x)$.
Écrire (non P). En déduire si la proposition P est vraie ou fausse.

