

Principes généraux pour le calcul de limites

1. D'abord on regarde...
2. puis on essaye les théorèmes généraux (somme, produit, division, composée)...
3. en cas de forme indéterminée, on peut :
 - (a) utiliser les développements limités du cours ;
 - (b) se ramener à une limite connue par un changement de variable ;
 - (c) essayer un encadrement.

À tout moment, on peut songer à transformer l'expression par une des méthodes usuelles : mise en facteur (du terme dominant), quantité conjuguée (dans le cas « $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ »), changement de variable.

Définition de la limite

Ex. 1 — Calculer la limite en x_0 des expressions suivantes :

1. $\frac{x}{|x|}$ en 0 ;
2. $[x+2] + \sqrt{x-[x]}$ en 1 ;
3. $x\sqrt{\frac{x-1}{x}}$ en 0 ;
4. $\frac{x^2}{x-e^{1/x}}$ en 0 ;
5. $2^{1/x}$ en 0 ;
6. $\frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt{1+x}}{x}$ en 0.

Ex. 2 — 1. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \frac{[x]}{x}$. La fonction f a-t-elle une limite en $+\infty$?

2. Donner un équivalent de $[x]$ en $+\infty$.

Ex. 3 — ET AVEC DEUX VARIABLES ?

1. Soit $f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$, une fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ et $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$. Conclusion ?
2. Soit $f(x) = x^n$, définie pour $x \in [0; 1]$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow 1} f_n(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$.

Ex. 4 — Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} , périodique et admettant une limite finie en $+\infty$.

1. Montrer que cette limite vaut $f(0)$.
2. Montrer que cette limite vaut $f(14)$.
3. Montrer que f est constante.

Ex. 5 — Que peut-on dire de la limite d'une fonction polynôme en $+\infty$? Que peut-on dire d'une fonction polynôme bornée ? D'une fonction polynôme périodique ?

Ex. 6 — Soit f une fonction définie sur \mathbb{R}_+ , croissante et telle que la suite $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Ex. 7 — Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} , admettant une limite finie en 0 et vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(x/2)$$

1. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x) = f(x/2^n)$$

2. En déduire que f est constante sur \mathbb{R} .

Ex. 8 — Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} vérifiant la propriété

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad f(nx) = nf(x)$.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall r \in \mathbb{Q}, \quad f(rx) = rf(x)$.
3. En déduire qu'il existe un réel λ tel que $\forall r \in \mathbb{Q}, \quad f(r) = \lambda r$.
4. On suppose de plus f admet une limite en 0.
 - a) Montrer que f admet une limite en tout point x de \mathbb{R} .
 - b) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \lambda x$.

Calcul de limites

Ex. 9 — Étudier les limites des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \frac{x^3 + 2x - 5}{5x^3 - x^2 - 1}$ en $+\infty$;
2. $x \mapsto \frac{e^{3x} + 2x + 7}{e^x + e^{-x}}$ en $+\infty$;
3. $\frac{\sin(2x)}{\sqrt{1 - \cos x}}$ en 0 ;
4. $x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 1} - x$ en $+\infty$;
5. $x \mapsto \sin x \times \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ en 0 ;
6. $x \mapsto \frac{x \sin x}{x^2 + 1}$ en $+\infty$;
7. $x \mapsto \frac{\sin(x \ln x)}{x}$ en 0.

Ex. 10 — Trouver un équivalent simple des expressions suivantes

1. $\frac{x^4 - x^3 + 8x^2 - 1}{x^2 + 4x + 7}$ en $-\infty$;
2. $\ln(1 + x^2) + \sin^2 x$ en ∞ ;
3. $e^{x^2} - \sqrt[3]{1 + x^2}$ en 0 ;
4. $\frac{\ln(1 + 2x) - \tan(4x)}{\sin(x^2)}$ en 0 ;
5. $\frac{\ln(1 + x^2) - \ln(1 - 2x^2)}{\ln(1 + x^3) - \ln(1 - x^3)}$ en 0 ;
6. $\frac{\cos x - e^x}{\sqrt{x}}$ en 0 ;
7. $2 + \ln(10x + 1) - \sqrt{4 + x}$ en 0 ;
8. $\ln x$ en 1 ;
9. $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{100}{x^3}$ en 0 ;
10. $\ln(2x + 1) - \ln(2x + 7)$ en $+\infty$;
11. $\ln(e^{x^2+1} - x^2) + \ln(x^2 - 1)$ en $+\infty$.
- ★ 12. $\ln(\cos x) + e^{(\tan x)^2} - \sqrt{1 + 2x^3}$ en 0 ;
- ★ 13. $\sqrt{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}}$ en $+\infty$.

Ex. 11 — Il est toujours possible de se ramener au cas $x = 0$ par le changement de variable $h = x - x_0$, qui s'écrit aussi $x = x_0 + h$. Étudier l'existence d'une limite en x_0 pour les expressions suivantes :

1. $\frac{x^2 - 3x}{x - 1 - \sqrt{x+1}}$ $x_0 = 3$;
2. $\frac{\sqrt{3} \cos x - \sin x}{x - \frac{\pi}{3}}$ $x_0 = \pi/3$
3. $(x^2 + x - 2) \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ $x_0 = 1$;

Ex. 12 — Soit $a > 0$. Domaine de définition et limites aux bornes des fonctions

$$x \mapsto x^a e^{\frac{1}{x}} \quad x \mapsto (1 + x^a) \ln x \quad x \mapsto (x - \ln x)^a \ln x$$

Ex. 13 — Déterminer les limites des expressions suivantes et, si cette limite est nulle ou infinie, un équivalent. Si la limite n'existe pas, envisager la limite à droite ou la limite à gauche.

1. Quand $x \rightarrow 0$:
 - a) $\frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{x}$;
 - b) $\frac{\sqrt{x^2}}{x}$;
2. Quand $x \rightarrow +\infty$:
 - a) $\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1}$;
 - b) $\frac{\sqrt{a+x} - \sqrt{x}}{x - \sqrt{x^2+1}}$;
 - c) $\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1}$;
 - d) $\frac{x - \sqrt{x^2+1}}{x^2 - \sqrt{x^2+1}}$;

Ex. 14 — *Même jeu.*

1. Quand $x \rightarrow 0$:
 - a) $\frac{\sin ax}{\sin bx}$ et $\frac{\tan ax}{\tan bx}$;
 - b) $\frac{x^2}{\tan^2 x - 2 \sin^3 x}$;
2. quand $x \rightarrow \frac{\pi}{3}$: $\frac{\sin 3x}{1 - 2 \cos x}$;
3. quand $x \rightarrow +\infty$: $x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$.

Ex. 15 — *Même jeu.*

1. quand $x \rightarrow +\infty$:
 - a) $\ln(3x^2 - 4) - \ln(x^2 + 1)$;
 - b) $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$;
 - c) $\left(1 + \frac{2}{x}\right)^{3x-2}$;
 - d) $\left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx}$;
 - e) $\left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 2}\right)^x$;
2. quand $x \rightarrow 0$:
 - a) $(\ln(1+x))^{1/x}$;
 - b) $\frac{\ln(1+x+x^2)}{x^2}$.

Ex. 16 — Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\cos(\pi x)}{2x^2 + x - 1}$;
2. $\lim_{x \rightarrow 0} [e^{\sin x} - \sin^2 x]^{\frac{1}{\sin x}}$;
3. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\ln(3+2x)}{\sqrt{2+x}-1}$;

★ **Ex. 17** — Montrer que $(2^x + 3^x - 1)^{\frac{1}{x}}$ tend vers 6 quand x tend vers 0.

Ex. 18 — Montrer que $\frac{e^x + 2 \sin(x) - 1}{3 \ln(1+x) + \sqrt{1+x} - 1}$ admet une limite en 0.

Ex. 19 — UN ÉQUIVALENT MAIS PAS DE LIMITE

Montrer que les deux fonctions définies par

$$f(x) = \frac{1}{x^3} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{x^3 + x}$$

sont équivalentes en 0. Ont-elles une limite en 0 ?

Ex. 20 — Vrai ou faux?

1. Si f admet une limite à droite en tout point de $[0; 1]$ alors f est continue sur $[0; 1]$.
2. Si f est continue sur $[0; 1]$ alors f est bornée sur $[0; 1]$.
3. Si f est continue sur $]0; 1]$ alors f est bornée sur $]0; 1]$
4. Si f est continue sur \mathbb{R} alors l'image d'un intervalle ouvert est un intervalle ouvert.
5. Si f est continue sur \mathbb{R} alors l'image d'un intervalle fermé est un intervalle fermé.
6. Si f est continue sur \mathbb{R} alors l'image d'une partie bornée est bornée.
7. Si f est définie sur $[-2; 2]$ et si la restriction de f à $[-1; 1]$ est continue alors f est continue sur $[-1; 1]$.

Étude de continuité

Ex. 21 — Étudier la continuité de

1. $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
2. $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
3. $f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \sqrt{x} \ln(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$
4. $f_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{5x^2 + 4x}{1 + x} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Ex. 22 — Est-il possible de prolonger la fonction f par continuité en x_0 ?

1. $x_0 = 1, f(x) = \ln(\sqrt{x} - 1) - \ln(x - 1)$;
2. $x_0 = 0, f(x) = x \ln\left(\frac{x^2 - 1}{x}\right)$;
3. $x_0 = \pi/2, f(x) = \frac{1}{\tan x}$;
4. $x_0 = 0, f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$;

5. $x_0 = 0, f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$;
6. $x_0 = 1/2, f(x) = \frac{6x^2 + 5x - 4}{2x - 1}$.

Ex. 23 — Étudier le prolongement par continuité des fonctions suivantes en un ou plusieurs points à préciser.

1. $f_1 : x \mapsto \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}$;
2. $f_2 : x \mapsto \frac{x^2 - 2x - 3}{\sqrt{x+1}}$;
3. $f_3 : x \mapsto \frac{\sin x}{\sqrt{1+x-1}}$;
4. $f_4 : x \mapsto [x] \sin \pi x$.

Ex. 24 — On définit une fonction f par

$$f(-1) = f(1) = 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}.$$

Étudier la continuité de f .

Ex. 25 — Étudier la continuité de la fonction

$$x \mapsto [x]^2 - x[x] + x^2$$

Ex. 26 — Pour tout $x > 0$ on pose : $f(x) = (e^x + 2x)^{1/x}$. Étudier un éventuel prolongement par continuité de f .

Ex. 27 — Peut-on prolonger en 0 les fonction suivantes?

1. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}$
2. $g(x) = \frac{x}{2x + |x|}$
3. $h(x) = x^x$.

Ex. 28 — Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \left(\frac{x}{x-1}\right)^{x-1} - \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1}$$

1. Préciser l'ensemble de définition de f et étudier la continuité de f .
2. Montrer que f est impaire.
3. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 1 et -1 .
4. Étudier la limite de f en $+\infty$.

Ex. 29 — Étudier la continuité de

$$f : x \mapsto (x^2 - 1) \sin\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

Ex. 30 — Même exercice avec

$$f : x \mapsto \cos(\ln|x|) \ln(1+x)$$

Ex. 31 — Étudier la continuité de la fonction aux points de coordonnées entières.

$$x \mapsto E(x)^2 - xE(x) + x^2$$

Théorème des valeurs intermédiaires & bijection continue

Ex. 32 — Montrer que $x^2 \cos x + x \sin x + 1 = 0$ admet au moins une solution sur \mathbb{R} .

Ex. 33 — 1. Montrer que l'équation

$$\frac{1}{x+1} \cos(x) - x^2 + 1 = 0$$

admet une unique solution dans l'intervalle $[0; \pi/2]$.

2. Proposer des programmes écrits en Python pour trouver un encadrement de cette racine à une précision donnée. Comparer les différentes méthodes en terme de nombre d'opérations nécessaires.

Ex. 34 — On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}_+^* par

$$f(x) = x^2 - x \ln x - 1$$

1. Démontrer que f est correctement définie, continue et indéfiniment dérivable sur son domaine de définition.
2. Calculer les deux premières dérivées de f et dresser son tableau de variation.
3. Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R}_+^* sur un intervalle I à préciser. On note g la bijection réciproque de f .
4. Dresser le tableau de variation de g .
5. a) Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.
b) En déduire que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(g(t))}{g(t)^2} = 1$, puis déterminer un équivalent de g en $+\infty$.

Ex. 35 — Soit f une fonction continue et strictement positive sur \mathbb{R}_+ . On suppose que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)/x$ existe est strictement inférieure à 1. Montrer qu'il existe un réel x_0 tel que $f(x_0) = x_0$.

Ex. 36 — Déterminer suivant la valeur du réel λ , le nombre de solutions de l'équation d'inconnue réelle x (E_λ): $e^{\lambda x} = x$

Ex. 37 — Soit f une fonction continue sur $[0; 1]$, à valeurs dans $[0; 1]$.

1. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists a_n \in [0; 1], f(a_n) = a_n^n.$$

2. On suppose f strictement décroissante. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, a_n est unique.

Ex. 38 — Soit P une fonction polynôme à coefficients réels et de degré impair.

1. Déterminer $P \langle \mathbb{R} \rangle$.
2. En déduire que P admet au moins une racine réelle.

Ex. 39 — LE THÉORÈME « DES CORDES » Soit f une fonction continue sur $[0; T]$.

Démontrer qu'il existe $a \in [0; T/2]$ tel que le taux d'accroissement de f entre a et $a + T/2$ soit le même que celui entre 0 et T .

Ex. 40 — Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$.

1. On suppose que $f \langle [a; b] \rangle \subset [a; b]$. Montrer qu'il existe un réel $x \in [a; b]$ tel que $f(x) = x$.
2. Soit f une fonction continue sur $[0; 1]$ et telle que $f(0) = f(1)$. Montrer que l'équation $f\left(x + \frac{1}{2}\right) = f(x)$ admet une solution.
3. Un cycliste parcourt 20 km en 1 heure. Montrer qu'il existe un intervalle de temps de 30 minutes pendant lequel il parcourt exactement 10 km.

Utilisation de la continuité

Ex. 41 — Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle I non vide.

1. Montrer que si f ne prend qu'un nombre fini de valeurs, alors elle est constante sur I .
2. Montrer que si $|f|$ est constante sur I , alors elle est constante sur I .
3. Montrer que si f^2 est constante alors f est constante.
4. Montrer que si f ne prend que des valeurs entières, alors elle est constante sur I .

Ex. 42 — Soient f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$, telles que

$$\forall x \in [a; b], f(x) > g(x)$$

Divers

Montrer qu'il existe un réel strictement positif m tel que, pour tout

$$\forall x \in [a; b], \quad f(x) \geq g(x) + m$$

Ex. 43 — Soit f une fonction sur \mathbb{R} , telle que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l' \in \mathbb{R}$$

1. Donner un exemple d'une telle fonction qui n'est pas bornée sur \mathbb{R} .
2. On suppose de plus que f est continue sur \mathbb{R} . Démontrer qu'elle est bornée.

Ex. 44 — Soit f une fonction continue et T -périodique sur \mathbb{R} .

1. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in [0; T], \quad f(x) = f(y)$$

2. En déduire que f est bornée sur \mathbb{R} .
3. Montrer que si f est monotone alors f est constante.

Ex. 45 — Soit f une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , continue, et vérifiant la propriété

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$$

(f est une fonction *linéaire*).

1. a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) = nf(1)$.
- b) Montrer que

$$\forall p \in \mathbb{Z}, \forall q \in \mathbb{N}^*, \quad f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}f(1)$$

- c) Montrer qu'il existe un réel a tel que

$$\forall x \in \mathbb{Q}, \quad f(x) = ax$$

- d) Montrer enfin que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ax$, où a est le réel défini dans la question précédente.

Ex. 46 — Soit g une application continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(g(x) + g(y))$$

Montrer que g est affine, c'est-à-dire qu'il existe deux réels α et β tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \alpha x + \beta$$

INDICATION : On pourra étudier la fonction f définie par $f(x) = g(x) - g(0)$.

★ **Ex. 47** — Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} , périodique de période $T > 0$. On suppose que f est continue sur \mathbb{R} , que $f(0) = 0$ et que f change de signe en 0. Montrer que f s'annule sur $]0; T[$.

Ex. 48 — Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \exists a_n \in [0; 1], \quad f\left(a_n + \frac{1}{n}\right) = f(a_n)$$

Ex. 49 — Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$x \mapsto x^5 + nx - 1$$

1. Montrer que

$$\exists ! x_n \in \mathbb{R}, \quad f_n(x_n) = 0$$

Donner un encadrement de x_n d'amplitude 1.

2. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge-t-elle?
3. En donner un équivalent.

