Principes généraux pour le calcul de limites

1. D'abord on regarde...
2. puis on essaye les théorèmes généraux (somme, produit, division, composée)...
3. en cas de forme indéterminée, on peut :
   (a) utiliser les développements limités du cours ;
   (b) se ramener à une limite connue par un changement de variable ;
   (c) essayer un encadrement.

À tout moment, on peut songer à transformer l'expression par une des méthodes usuelles : mise en facteur (du terme dominant), quantité conjuquée (dans le cas « $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ »), changement de variable.

Définition de la limite

Ex. 1 — Calculer la limite en x_0 des expressions suivantes :

1. $\dfrac{x}{|x|}$ en 0 ;
2. $\lfloor x+2\rfloor+\sqrt{x-\lfloor x\rfloor}$ en 1 ;
3. $x\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}$ en 0 ;
4. $\dfrac{x^2}{x-\mathrm{e}^{1/x}}$ en 0 ;
5. $2^{1/x}$ en 0 ;
6. $\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1+x}}{x}$ en 0.

Ex. 2 —
1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\dfrac{\lfloor x\rfloor}{x}$. La fonction f a-t-elle une limite en $+\infty$?
2. Donner un équivalent de $\lfloor x\rfloor$ en $+\infty$.

Ex. 3 — ET AVEC DEUX VARIABLES ?

1. Soit $f(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$, une fonction définie sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Calculer $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}f(x,y)$ et $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}f(x,y)$. Conclusion ?
2. Soit $f(x)=x^n$, définie pour $x\in[\,0\,;\,1\,]$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\lim\limits_{x\to1}f_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to1}\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)$.

Utilisation des limites

Ex. 4 — Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, périodique et admettant une limite finie en $+\infty$.

1. Montrer que cette limite vaut $f(0)$.
2. Montrer que cette limite vaut $f(14)$.
3. Montrer que f est constante.

Ex. 5 — Que peut-on dire de la limite d'une fonction polynôme en $+\infty$? Que peut-on dire d'une fonction polynôme bornée ? D'une fonction polynôme périodique ?

Ex. 6 — Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$, croissante et telle que la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

Ex. 7 — Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, admettant une limite finie en 0 et vérifiant

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=f(x/2)$$

1. Montrer que
$$\forall x\in\mathbb{R},\forall n\in\mathbb{N},\quad f(x)=f(x/2^n)$$
2. En déduire que f est constante sur $\mathbb{R}$.

Ex. 8 — Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R},\quad f(x+y)=f(x)+f(y)$$

1. Montrer que $\forall x\in\mathbb{R},\forall n\in\mathbb{N},\quad f(nx)=nf(x)$.
2. Montrer que $\forall x\in\mathbb{R},\forall r\in\mathbb{Q},\quad f(rx)=rf(x)$.
3. En déduire qu'il existe un réel λ tel que $\forall r\in\mathbb{Q},\quad f(r)=\lambda r$.
4. On suppose de plus f admet une limite en 0.
   a) Montrer que f admet une limite en tout point x de $\mathbb{R}$.
   b) En déduire que $\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=\lambda x$.

Calcul de limites

Ex. 9 — Étudier les limites des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \dfrac{x^3+2x-5}{5x^3-x^2-1}$ en $+\infty$;
2. $x \mapsto \dfrac{e^{3x}+2x+7}{e^x+e^{-x}}$ en $+\infty$;
3. $\dfrac{\sin(2x)}{\sqrt{1-\cos x}}$ en 0 ;
4. $x \mapsto \sqrt{x^2+x+1}-x$ en $+\infty$;
5. $x \mapsto \sin x \times \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en 0 ;
6. $x \mapsto \dfrac{x\sin x}{x^2+1}$ en $+\infty$;
7. $x \mapsto \dfrac{\sin(x\ln x)}{x}$ en 0.

Ex. 10 — Trouver un équivalent simple des expressions suivantes

1. $\dfrac{x^4-x^3+8x^2-1}{x^2+4x+7}$ en $-\infty$;
2. $\ln(1+x^2)+\sin^2 x$ en ∞ ;
3. $e^{x^2}-\sqrt[7]{1+x^2}$ en 0 ;
4. $\dfrac{\ln(1+2x)-\tan(4x)}{\sin(x^2)}$ en 0 ;
5. $\dfrac{\ln(1+x^2)-\ln(1-2x^2)}{\ln(1+x^3)-\ln(1-x^3)}$ en 0 ;
6. $\dfrac{\cos x - e^x}{\sqrt{x}}$ en 0 ;
7. $2+\ln(10x+1)-\sqrt{4+x}$ en 0 ;
8. $\ln x$ en 1 ;
9. $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{100}{x^3}$ en 0 ;
10. $\ln(2x+1)-\ln(2x+7)$ en $+\infty$;
11. $\ln(e^{x^2+1}-x^2)+\ln(x^2-1)$ en $+\infty$.
12. ★ $\ln(\cos x)+e^{(\tan x)^2}-\sqrt{1+2x^3}$ en 0 ;
13. ★ $\sqrt{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}$ en $+\infty$.

Ex. 11 — Il est toujours possible de se ramener au cas $x=0$ par le changement de variable $h=x-x_0$, qui s'écrit aussi $x=x_0+h$. Étudier l'existence d'une limite en x_0 pour les expressions suivantes :

1. $\dfrac{x^2-3x}{x-1-\sqrt{x+1}}$ $\quad x_0=3$;
2. $\dfrac{\sqrt{3}\cos x-\sin x}{x-\dfrac{\pi}{3}}$ $\quad x_0=\pi/3$
3. $(x^2+x-2)\tan\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$ $\quad x_0=1$;

Ex. 12 — Soit $a>0$. Domaine de définition et limites aux bornes des fonctions

$$x\mapsto x^a e^{\frac{1}{x}} \quad x\mapsto (1+x^a)\ln x \quad x\mapsto (x-\ln x)^a \ln x$$

Ex. 13 — Déterminer les limites des expressions suivantes et, si cette limite est nulle ou infinie, un équivalent. Si la limite n'existe pas, envisager la limite à droite ou la limite à gauche.

1. Quand $x\to 0$:
   a) $\dfrac{1}{x(x+1)}-\dfrac{1}{x}$;
   b) $\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$;
   c) $\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1}$;
2. Quand $x\to+\infty$:
   a) $\sqrt{a+x}-\sqrt{x}$;
   b) $\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{x^2-\sqrt{x^2+1}}$;

Ex. 14 — *Même jeu.*

1. Quand $x\to 0$:
   a) $\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$ et $\dfrac{\tan ax}{\tan bx}$;
   b) $\dfrac{x^2}{\tan^2 x-2\sin^3 x}$;
2. quand $x\to\frac{\pi}{3}$: $\dfrac{\sin 3x}{1-2\cos x}$;
3. quand $x\to+\infty$: $x\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$.

Ex. 15 — *Même jeu.*

1. quand $x\to+\infty$:
   a) $\ln\left(3x^2-4\right)-\ln\left(x^2+1\right)$;
   b) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$;
   c) $\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{3x-2}$;
   d) $\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{bx}$;
   e) $\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x$;
2. quand $x\to 0$:
   a) $(\ln(1+x))^{1/x}$;
   b) $\dfrac{\ln\left(1+x+x^2\right)}{x^2}$.

Ex. 16 — Déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{\cos(\pi x)}{2x^2+x-1}$;
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left[e^{\sin x}-\sin^2 x\right]^{\frac{1}{\sin x}}$;
3. $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{\ln(3+2x)}{\sqrt{2+x}-1}$;

★ **Ex. 17** — Montrer que $(2^x+3^x-1)^{\frac{1}{x}}$ tend vers 6 quand x tend vers 0.

Ex. 18 — Montrer que $\dfrac{e^x+2\sin(x)-1}{3\ln(1+x)+\sqrt{1+x}-1}$ admet une limite en 0.

Ex. 19 — Un équivalent mais pas de limite

Montrer que les deux fonctions définies par

$$f(x)=\frac{1}{x^3} \qquad \text{et} \qquad g(x)=\frac{1}{x^3+x}$$

sont équivalentes en 0. Ont-elles une limite en 0 ?

Ex. 20 — Vrai ou faux ?

1. Si f admet une limite à droite en tout point de $[0\,;1]$ alors f est continue sur $[0\,;1]$.
2. Si f est continue sur $[0\,;1]$ alors f est bornée sur $[0\,;1]$.
3. Si f est continue sur $]0\,;1]$ alors f est bornée sur $]0\,;1]$
4. Si f est continue sur $\mathbb{R}$ alors l'image d'un intervalle ouvert est un intervalle ouvert.
5. Si f est continue sur $\mathbb{R}$ alors l'image d'un intervalle fermé est un intervalle fermé.
6. Si f est continue sur $\mathbb{R}$ alors l'image d'une partie bornée est bornée.
7. Si f est définie sur $[-2\,;2]$ et si la restriction de f à $[-1\,;1]$ est continue alors f est continue sur $[-1\,;1]$.

Étude de continuité

Ex. 21 — Étudier la continuité de

1. $f_1 : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$
2. $f_2 : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} 1-e^{-x} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$
3. $f_3 : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{e^{x}-1}{x} & \text{si } x<0 \\ 1 & \text{si } x=0 \\ \sqrt{x}\ln(x) & \text{si } x>0 \end{cases} \end{array} \right.$
4. $f_4 : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{5x^2+4x}{1+x} & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x>0 \end{cases} \end{array} \right.$

Ex. 22 — Est-il possible de prolonger la fonction f par continuité en x_0 ?

1. $x_0=1, \quad f(x)=\ln\left(\sqrt{x}-1\right)-\ln(x-1)$;
2. $x_0=0, \quad f(x)=x\ln\left(\dfrac{x^2-1}{x}\right)$;
3. $x_0=\pi/2, \quad f(x)=\dfrac{1}{\tan x}$;
4. $x_0=0, \quad f(x)=\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$;
5. $x_0=0, \quad f(x)=x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$;
6. $x_0=1/2, \quad f(x)=\dfrac{6x^2+5x-4}{2x-1}$.

Ex. 23 — Étudier le prolongement par continuité des fonctions suivantes en un ou plusieurs points à préciser.

1. $f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}$;
2. $f_2 : x \mapsto \dfrac{x^2-2x-3}{\sqrt{x+1}}$;
3. $f_3 : x \mapsto \dfrac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1}$;
4. $f_4 : x \mapsto \lfloor x \rfloor \sin \pi x$.

Ex. 24 — On définit une fonction f par

$$f(-1)=f(1)=0$$
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}.$$

Étudier la continuité de f.

Ex. 25 — Étudier la continuité de la fonction

$$x \longmapsto \lfloor x \rfloor^2 - x\lfloor x \rfloor + x^2$$

Ex. 26 — Pour tout $x>0$ on pose : $f(x)=(e^x+2x)^{1/x}$. Étudier un éventuel prolongement par continuité de f.

Ex. 27 — Peut-on prolonger en 0 les fonction suivantes ?

1. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$
2. $g(x)=\dfrac{x}{2x+|x|}$
3. $h(x)=x^x$.

Ex. 28 — Soit f la fonction définie par :

$$f(x)=\left(\frac{x}{x-1}\right)^{x-1}-\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1}$$

1. Préciser l'ensemble de définition de f et étudier la continuité de f.
2. Montrer que f est impaire.
3. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 1 et -1.
4. Étudier la limite de f en $+\infty$.

Ex. 29 — Étudier la continuité de

$$f : x \mapsto (x^2-1)\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

Ex. 30 — Même exercice avec

$$f\ :\ x \mapsto \cos(\ln|x|)\ln(1+x)$$

Ex. 31 — Étudier la continuité de la fonction aux points de coordonnées entières.

$$x \longmapsto E(x)^2 - xE(x) + x^2$$

Théorème des valeurs intermédiaires & bijection continue

Ex. 32 — Montrer que $x^2\cos x + x\sin x + 1 = 0$ admet au moins une solution sur $\mathbb{R}$.

Ex. 33 —
1. Montrer que l'équation
$$\frac{1}{x+1}\cos(x) - x^2 + 1 = 0$$
admet une unique solution dans l'intervalle $[\,0\,;\pi/2\,]$.
2. Proposer des programmes écrits en Python pour trouver un encadrement de cette racine à une précision donnée. Comparer les différentes méthodes en terme de nombre d'opérations nécessaires.

Ex. 34 — On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x) = x^2 - x\ln x - 1$$

1. Démontrer que f est correctement définie, continue et indéfiniment dérivable sur son domaine de définition.
2. Calculer les deux premières dérivées de f et dresser son tableau de variation.
3. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur un intervalle I à préciser. On note g la bijection réciproque de f.
4. Dresser le tableau de variation de g.
5. a) Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.
   b) En déduire que $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{f(g(t))}{g(t)^2} = 1$, puis déterminer un équivalent de g en $+\infty$.

Ex. 35 — Soit f une fonction continue et strictement positive sur $\mathbb{R}_+$. On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)/x$ existe est strictement inférieure à 1. Montrer qu'il existe un réel x_0 tel que $f(x_0) = x_0$.

Ex. 36 — Déterminer suivant la valeur du réel λ, le nombre de solutions de l'équation d'inconnue réelle x (E_λ) : $\mathrm{e}^{\lambda x} = x$

Ex. 37 — Soit f une fonction continue sur $[0\,;1]$, à valeurs dans $[\,0\,;1\,]$.
1. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists a_n \in [0\,;1],\quad f(a_n) = a_n^n.$$
2. On suppose f strictement décroissante. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, a_n est unique.

Ex. 38 — Soit P une fonction polynôme à coefficients réels et de degré impair.
1. Déterminer $P\langle\mathbb{R}\rangle$.
2. En déduire que P admet au moins une racine réelle.

Ex. 39 — Le théorème « des cordes » Soit f une fonction continue sur $[0\,;T\,]$.
Démontrer qu'il existe $a \in [0\,;T/2]$ tel que le taux d'accroissement de f entre a et $a+T/2$ soit le même que celui entre 0 et T.

Ex. 40 — Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$.
1. On suppose que $f\langle[a\,;b]\rangle \subset [a\,;b]$. Montrer qu'il existe un réel $x \in [a\,;b]$ tel que $f(x) = x$.
2. Soit f une fonction continue sur $[0\,;1]$ et telle que $f(0) = f(1)$. Montrer que l'équation $f\left(x + \dfrac{1}{2}\right) = f(x)$ admet une solution.
3. Un cycliste parcours 20 km en 1 heure. Montrer qu'il existe un intervalle de temps de 30 minutes pendant lequel il parcours exactement 10 km.

Utilisation de la continuité

Ex. 41 — Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle I non vide.
1. Montrer que si f ne prend qu'un nombre fini de valeurs, alors elle est constante sur I.
2. Montrer que si $|f|$ est constante sur I, alors elle est constante sur I.
3. Montrer que si f^2 est constante alors f est constante.
4. Montrer que si f ne prend que des valeurs entières, alors elle est constante sur I.

Ex. 42 — Soient f et g deux fonctions continues sur $[a\,;b]$, telles que

$$\forall x \in [a\,;b],\quad f(x) > g(x)$$

Montrer qu'il existe un réel strictement positif m tel que, pour tout

$$\forall x \in [a\,;\,b], \qquad f(x) \geqslant g(x) + m$$

Ex. 43 — Soit f une fonction sur $\mathbb{R}$, telle que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = l' \in \mathbb{R}$$

1. Donner un exemple d'une telle fonction qui n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$.
2. On suppose de plus que f est continue sur $\mathbb{R}$. Démontrer qu'elle est bornée.

Ex. 44 — Soit f une fonction continue et $T-$périodique sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in [0\,;\,T], \quad f(x) = f(y)$$

2. En déduire que f est bornée sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que si f est monotone alors f est constante.

Ex. 45 — Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue, et vérifiant la propriété

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

(f est une fonction *linéaire*).

1. a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) = nf(1)$.
   b) Montrer que

$$\forall p \in \mathbb{Z},\ \forall q \in \mathbb{N}^*, \quad f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q} f(1)$$

   c) Montrer qu'il existe un réel a tel que

$$\forall x \in \mathbb{Q}, \quad f(x) = ax$$

   d) Montrer enfin que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ax$, où a est le réel défini dans la question précédente.

Ex. 46 — Soit g une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(g(x) + g(y))$$

Montrer que g est affine, c'est-à-dire qu'il existe deux réels α et β tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \alpha x + \beta$$

INDICATION : *On pourra étudier la fonction f définie par $f(x) = g(x) - g(0)$.*

★ **Ex. 47** — Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période $T > 0$. On suppose que f est continue sur $\mathbb{R}$, que $f(0) = 0$ et que f change de signe en 0. Montrer que f s'annule sur $]0\,;\,T[$.

Divers

Ex. 48 — Soit $f\ :\ [0\,;\,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \exists a_n \in [0\,;\,1], \qquad f\left(a_n + \frac{1}{n}\right) = f(a_n)$$

Ex. 49 — Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n\ :\ \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^5 + nx - 1 \end{array} \right.$.

1. Montrer que

$$\exists ! x_n \in \mathbb{R}, \qquad f_n(x_n) = 0$$

   Donner un encadrement de x_n d'amplitude 1.
2. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge-t-elle ?
3. En donner un équivalent.