Limites

bcpst 1, 3/2018

Principes généraux pour le calcul de limites

1. D'abord on regarde...
2. puis on essaye les théorèmes généraux (somme, produit, division, composée)...
3. en cas de forme indéterminée, on peut :
   (a) utiliser les développements limités du cours;
   (b) se ramener à une limite connue par un changement de variable;
   (c) essayer un encadrement.

À tout moment, on peut songer à transformer l'expression par une des méthodes usuelles : mise en facteur (du terme dominant), quantité conjuquée (dans le cas « $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ »), changement de variable.

Définition de la limite

Exercice 1

Calculer la limite en x_0 des expressions suivantes :

1. $\dfrac{x}{|x|}$ en 0;
2. $\lfloor x+2\rfloor + \sqrt{x-\lfloor x\rfloor}$ en 1;
3. $x\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}$ en 0;
4. $\dfrac{x^2}{x-\mathrm{e}^{1/x}}$ en 0;
5. $2^{1/x}$ en 0;
6. $\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1+x}}{x}$ en 0.

Exercice 2

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\dfrac{\lfloor x\rfloor}{x}$. La fonction f a-t-elle une limite en $+\infty$?
2. Donner un équivalent de $\lfloor x\rfloor$ en $+\infty$.

Exercice 3 — Et avec deux variables ?

1. Soit $f(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$, une fonction définie sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Calculer $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ et $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$. Conclusion ?
2. Soit $f(x)=x^n$, définie pour $x\in[\,0\,;1\,]$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\lim\limits_{x\to 1} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1}\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$.

Utilisation des limites

Exercice 4

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, périodique et admettant une limite finie en $+\infty$.
1. Montrer que cette limite vaut $f(0)$.
2. Montrer que cette limite vaut $f(14)$.
3. Montrer que f est constante.

Exercice 5

Que peut-on dire de la limite d'une fonction polynôme en $+\infty$? Que peut-on dire d'une fonction polynôme bornée ? D'une fonction polynôme périodique ?

Exercice 6

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$, croissante et telle que la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Exercice 7

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, admettant une limite finie en 0 et vérifiant

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=f(x/2)$$

1. Montrer que

$$\forall x\in\mathbb{R}, \forall n\in\mathbb{N},\quad f(x)=f(x/2^n)$$

2. En déduire que f est constante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R},\quad f(x+y)=f(x)+f(y)$$

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad f(nx) = nf(x)$.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall r \in \mathbb{Q}, \quad f(rx) = rf(x)$.
3. En déduire qu'il existe un réel λ tel que $\forall r \in \mathbb{Q}, \quad f(r) = \lambda r$.
4. On suppose de plus f admet une limite en 0.
   a) Montrer que f admet une limite en tout point x de $\mathbb{R}$.
   b) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \lambda x$.

Calcul de limites

Exercice 9

Étudier les limites des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \dfrac{x^3+2x-5}{5x^3-x^2-1}$ en $+\infty$;
2. $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{3x}+2x+7}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$ en $+\infty$;
3. $\dfrac{\sin(2x)}{\sqrt{1-\cos x}}$ en 0 ;
4. $x \mapsto \sqrt{x^2+x+1}-x$ en $+\infty$;
5. $x \mapsto \sin x \times \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en 0 ;
6. $x \mapsto \dfrac{x\sin x}{x^2+1}$ en $+\infty$;
7. $x \mapsto \dfrac{\sin(x\ln x)}{x}$ en 0.

Exercice 10

Trouver un équivalent simple des expressions suivantes

1. $\dfrac{x^4-x^3+8x^2-1}{x^2+4x+7}$ en $-\infty$;
2. $\ln(1+x^2)+\sin^2 x$ en ∞ ;
3. $\mathrm{e}^{x^2}-\sqrt[7]{1+x^2}$ en 0 ;
4. $\dfrac{\ln(1+2x)-\tan(4x)}{\sin(x^2)}$ en 0 ;
5. $\dfrac{\ln(1+x^2)-\ln(1-2x^2)}{\ln(1+x^3)-\ln(1-x^3)}$ en 0 ;
6. $\dfrac{\cos x-\mathrm{e}^x}{\sqrt{x}}$ en 0 ;
7. $2+\ln(10x+1)-\sqrt{4+x}$ en 0 ;
8. $\ln x$ en 1 ;
9. $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{100}{x^3}$ en 0 ;
10. $\ln(2x+1)-\ln(2x+7)$ en $+\infty$;
11. $\ln(\mathrm{e}^{x^2+1}-x^2)+\ln(x^2-1)$ en $+\infty$.

★ 12. $\ln(\cos x)+\mathrm{e}^{(\tan x)^2}-\sqrt{1+2x^3}$ en 0 ;

★ 13. $\sqrt{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}$ en $+\infty$.

Exercice 11

Il est toujours possible de se ramener au cas $x=0$ par le changement de variable $h = x - x_0$, qui s'écrit aussi $x = x_0 + h$. Étudier l'existence d'une limite en x_0 pour les expressions suivantes :

1. $\dfrac{x^2-3x}{x-1-\sqrt{x+1}} \quad x_0 = 3$;
2. $\dfrac{\sqrt{3}\cos x-\sin x}{x-\dfrac{\pi}{3}} \quad x_0 = \pi/3$
3. $(x^2+x-2)\tan\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) \quad x_0 = 1$;

Exercice 12

Soit $a > 0$. Domaine de définition et limites aux bornes des fonctions

$$x \mapsto x^a\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \quad x \mapsto (1+x^a)\ln x \quad x \mapsto (x-\ln x)^a \ln x$$

Exercice 13

Déterminer les limites des expressions suivantes et, si cette limite est nulle ou infinie, un équivalent. Si la limite n'existe pas, envisager la limite à droite ou la limite à gauche.

1. Quand $x \to 0$:
   a) $\dfrac{1}{x(x+1)} - \dfrac{1}{x}$;
   b) $\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$;
   c) $\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1}$;
2. Quand $x \to +\infty$:
   a) $\sqrt{a+x}-\sqrt{x}$;
   b) $\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{x^2-\sqrt{x^2+1}}$;

Exercice 14

Même jeu.

1. Quand $x \to 0$:
   a) $\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$ et $\dfrac{\tan ax}{\tan bx}$;
   b) $\dfrac{x^2}{\tan^2 x - 2\sin^3 x}$;
2. quand $x \to \frac{\pi}{3}$: $\dfrac{\sin 3x}{1-2\cos x}$;
3. quand $x \to +\infty$: $x\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$.

Exercice 15

Même jeu.

1. quand $x \to +\infty$:
   a) $\ln\left(3x^2-4\right)-\ln\left(x^2+1\right)$;
   b) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$;
   c) $\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{3x-2}$;

d) $\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{bx}$;

e) $\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^{x}$;

2. quand $x \longrightarrow 0$:

a) $(\ln(1+x))^{1/x}$;

b) $\dfrac{\ln\left(1+x+x^2\right)}{x^2}$.

Exercice 16

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{\cos(\pi x)}{2x^2+x-1}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0} \left[\mathrm{e}^{\sin x}-\sin^2 x\right]^{\frac{1}{\sin x}}$;
3. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\ln(3+2x)}{\sqrt{2+x}-1}$;

★ **Exercice 17**

Montrer que $(2^x+3^x-1)^{\frac{1}{x}}$ tend vers 6 quand x tend vers 0.

Exercice 18

Montrer que $\dfrac{\mathrm{e}^x+2\sin(x)-1}{3\ln(1+x)+\sqrt{1+x}-1}$ admet une limite en 0.

Exercice 19 — Un équivalent mais pas de limite

Montrer que les deux fonctions définies par

$$f(x)=\frac{1}{x^3} \qquad \text{et} \qquad g(x)=\frac{1}{x^3+x}$$

sont équivalentes en 0. Ont-elles une limite en 0 ?

Exercice 20

Vrai ou faux ?

1. Si f admet une limite à droite en tout point de $[0\,;1]$ alors f est continue sur $[0\,;1]$.
2. Si f est continue sur $[0\,;1]$ alors f est bornée sur $[0\,;1]$.
3. Si f est continue sur $]0\,;1]$ alors f est bornée sur $]0\,;1]$
4. Si f est continue sur $\mathbb{R}$ alors l'image d'un intervalle ouvert est un intervalle ouvert.
5. Si f est continue sur $\mathbb{R}$ alors l'image d'un intervalle fermé est un intervalle fermé.
6. Si f est continue sur $\mathbb{R}$ alors l'image d'une partie bornée est bornée.
7. Si f est définie sur $[-2\,;2]$ et si la restriction de f à $[-1\,;1]$ est continue alors f est continue sur $[-1\,;1]$.

Étude de continuité

Exercice 21

Étudier la continuité de

1. $f_1 : \begin{array}{|l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$

2. $f_2 : \begin{array}{|l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} 1-\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$

3. $f_3 : \begin{array}{|l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{x}-1}{x} & \text{si } x<0 \\ 1 & \text{si } x=0 \\ \sqrt{x}\ln(x) & \text{si } x>0 \end{cases} \end{array}$

4. $f_4 : \begin{array}{|l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{5x^2+4x}{1+x} & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x>0 \end{cases} \end{array}$

Exercice 22

Est-il possible de prolonger la fonction f par continuité en x_0 ?

1. $x_0=1$, $\quad f(x)=\ln\left(\sqrt{x}-1\right)-\ln(x-1)$;
2. $x_0=0$, $\quad f(x)=x\ln\left(\dfrac{x^2-1}{x}\right)$;
3. $x_0=\pi/2$, $\quad f(x)=\dfrac{1}{\tan x}$;
4. $x_0=0$, $\quad f(x)=\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$;
5. $x_0=0$, $\quad f(x)=x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$;
6. $x_0=1/2$, $\quad f(x)=\dfrac{6x^2+5x-4}{2x-1}$.

Exercice 23

Étudier le prolongement par continuité des fonctions suivantes en un ou plusieurs points à préciser.

1. $f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}$;
2. $f_2 : x \mapsto \dfrac{x^2-2x-3}{\sqrt{x+1}}$;
3. $f_3 : x \mapsto \dfrac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1}$;
4. $f_4 : x \mapsto \lfloor x\rfloor \sin \pi x$.

Exercice 24
On définit une fonction f par

$$f(-1) = f(1) = 0$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}.$$

Étudier la continuité de f.

Exercice 25
Étudier la continuité de la fonction

$$x \longmapsto \lfloor x\rfloor^2 - x\lfloor x\rfloor + x^2$$

Exercice 26
Pour tout $x > 0$ on pose : $f(x) = (\mathrm{e}^x + 2x)^{1/x}$. Étudier un éventuel prolongement par continuité de f.

Exercice 27
Peut-on prolonger en 0 les fonction suivantes ?
1. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$
2. $g(x) = \dfrac{x}{2x+|x|}$
3. $h(x) = x^x$.

Exercice 28
Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \left(\frac{x}{x-1}\right)^{x-1} - \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1}$$

1. Préciser l'ensemble de définition de f et étudier la continuité de f.
2. Montrer que f est impaire.
3. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 1 et -1.
4. Étudier la limite de f en $+\infty$.

Exercice 29
Étudier la continuité de

$$f \ : \ x \mapsto (x^2-1)\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

Exercice 30
Même exercice avec

$$f \ : \ x \mapsto \cos(\ln|x|)\ln(1+x)$$

Exercice 31
Étudier la continuité de la fonction aux points de coordonnées entières.

$$x \longmapsto E(x)^2 - xE(x) + x^2$$

Théorème des valeurs intermédiaires, bijection continue

Exercice 32
Montrer que $x^2\cos x + x\sin x + 1 = 0$ admet au moins une solution sur $\mathbb{R}$.

Exercice 33

1. Montrer que l'équation
$$\frac{1}{x+1}\cos(x) - x^2 + 1 = 0$$
admet une unique solution dans l'intervalle $[\,0\,;\pi/2\,]$.
2. Proposer des programmes écrits en Python pour trouver un encadrement de cette racine à une précision donnée. Comparer les différentes méthodes en terme de nombre d'opérations nécessaires.

Exercice 34
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x) = x^2 - x\ln x - 1$$

1. Démontrer que f est correctement définie, continue et indéfiniment dérivable sur son domaine de définition.
2. Calculer les deux premières dérivées de f et dresser son tableau de variation.
3. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur un intervalle I à préciser. On note g la bijection réciproque de f.
4. Dresser le tableau de variation de g.
5. a) Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.
   b) En déduire que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{f(g(t))}{g(t)^2} = 1$, puis déterminer un équivalent de g en $+\infty$.

Exercice 35
Soit f une fonction continue et strictement positive sur $\mathbb{R}_+$. On suppose que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)/x$ existe

est strictement inférieure à 1. Montrer qu'il existe un réel x_0 tel que $f(x_0) = x_0$.

Exercice 36

Déterminer suivant la valeur du réel λ, le nombre de solutions de l'équation d'inconnue réelle x (E_λ) : $\mathrm{e}^{\lambda x} = x$

Exercice 37

Soit f une fonction continue sur $[0\,;\,1]$, à valeurs dans $[0\,;\,1]$.

1. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ \exists a_n \in [0\,;\,1], \quad f(a_n) = a_n^n.$$

2. On suppose f strictement décroissante. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, a_n est unique.

Exercice 38

Soit P une fonction polynôme à coefficients réels et de degré impair.

1. Déterminer $P\langle\mathbb{R}\rangle$.
2. En déduire que P admet au moins une racine réelle.

Exercice 39 — Le théorème « des cordes »

Soit f une fonction continue sur $[0\,;\,T]$.
Démontrer qu'il existe $a \in [0\,;\,T/2]$ tel que le taux d'accroissement de f entre a et $a + T/2$ soit le même que celui entre 0 et T.

Exercice 40

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$.

1. On suppose que $f\langle[a\,;\,b]\rangle \subset [a\,;\,b]$. Montrer qu'il existe un réel $x \in [a\,;\,b]$ tel que $f(x) = x$.
2. Soit f une fonction continue sur $[0\,;\,1]$ et telle que $f(0) = f(1)$. Montrer que l'équation $f\left(x + \dfrac{1}{2}\right) = f(x)$ admet une solution.
3. Un cycliste parcours 20 km en 1 heure. Montrer qu'il existe un intervalle de temps de 30 minutes pendant lequel il parcours exactement 10 km.

Utilisation de la continuité

Exercice 41

Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle I non vide.

1. Montrer que si f ne prend qu'un nombre fini de valeurs, alors elle est constante sur I.
2. Montrer que si $|f|$ est constante sur I, alors elle est constante sur I.
3. Montrer que si f^2 est constante alors f est constante.
4. Montrer que si f ne prend que des valeurs entières, alors elle est constante sur I.

Exercice 42

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a\,;\,b]$, telles que

$$\forall x \in [a\,;\,b], \quad f(x) > g(x)$$

Montrer qu'il existe un réel strictement positif m tel que, pour tout

$$\forall x \in [a\,;\,b], \qquad f(x) \geqslant g(x) + m$$

Exercice 43

Soit f une fonction sur $\mathbb{R}$, telle que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = l' \in \mathbb{R}$$

1. Donner un exemple d'une telle fonction qui n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$.
2. On suppose de plus que f est continue sur $\mathbb{R}$. Démontrer qu'elle est bornée.

Exercice 44

Soit f une fonction continue et T–périodique sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ \exists y \in [0\,;\,T], \quad f(x) = f(y)$$

2. En déduire que f est bornée sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que si f est monotone alors f est constante.

Exercice 45

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue, et vérifiant la propriété

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$$

(f est une fonction *linéaire*).

1. a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) = nf(1)$.

   b) Montrer que

$$\forall p \in \mathbb{Z}, \ \forall q \in \mathbb{N}^*, \quad f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q} f(1)$$

   c) Montrer qu'il existe un réel a tel que

$$\forall x \in \mathbb{Q}, \quad f(x) = ax$$

   d) Montrer enfin que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ax$, où a est le réel défini dans la question précédente.

Exercice 46

Soit g une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(g(x) + g(y))$$

Montrer que g est affine, c'est-à-dire qu'il existe deux réels α et β tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \alpha x + \beta$$

INDICATION : *On pourra étudier la fonction f définie par $f(x) = g(x) - g(0)$.*

★ **Exercice 47**

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période $T > 0$. On suppose que f est continue sur $\mathbb{R}$, que $f(0) = 0$ et que f change de signe en 0. Montrer que f s'annule sur $]0\,;T[$.

DIVERS

Exercice 48

Soit $f : [0\,;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \exists a_n \in [0\,;1], \qquad f\left(a_n + \frac{1}{n}\right) = f(a_n)$$

Exercice 49

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^5 + nx - 1 \end{array} \right.$.

1. Montrer que

$$\exists ! x_n \in \mathbb{R}, \qquad f_n(x_n) = 0$$

   Donner un encadrement de x_n d'amplitude 1.

2. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge-t-elle ?
3. En donner un équivalent.