Calculs plus ou moins subtils

Ex. 1 — Calculer les intégrales suivantes ($n \in \mathbb{N}$)

$$\int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x \qquad \int_0^1 nx^{n-1}\,\mathrm{d}x$$
$$\int_0^1 (x+1)^n \,\mathrm{d}x \qquad \int_0^1 (2x+1)^n\,\mathrm{d}x$$
$$\int_1^2 \frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x \qquad \int_0^1 x^{n/2}\,\mathrm{d}x$$
$$\int_0^1 3x^2+2x+1\,\mathrm{d}x \qquad \int_0^1 3(x+2)(x-5)\,\mathrm{d}x$$
$$\frac{\tan x}{\cos^2 x}$$

Ex. 2 — Calculer les intégrales suivantes, à l'aide d'une intégration par parties. Préciser l'ensemble de valeurs de x.

1. $\displaystyle\int_0^x \operatorname{Arctan} t \,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos x \ln(1+\cos x)\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_0^x t\ln t \,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_0^x t\sin(t)\,\mathrm{d}t$

Ex. 3 — Calculer les primitives des fonctions suivantes, en utilisant un changement de variables. Préciser à chaque fois un domaine de validité.

1. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+a^2}$ avec $t = x/a$;
2. $x \mapsto x^2\ln(x^6-1)$ avec $u = x^3$;
3. $x \mapsto \cos^3 x$ avec $\sin x = u$;
4. $x \mapsto \dfrac{x}{1+x^4}$ avec $u = x^2$.

Ex. 4 — Calculer les primitives suivantes

1. $\displaystyle\int \frac{t^2+3}{(t+1)^4}\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int \frac{x^3}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{t(t^7+1)}$ (Trouver a, b tels que $\dfrac{1}{u(1+u)} = \dfrac{a}{u} + \dfrac{b}{1+u}$ pour transformer $\dfrac{t^6}{t^7(1+t^7)}$.)
4. $\displaystyle\int \sin t\cos^5 t\,\mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int \operatorname{Arctan}(t^{1/2})\,\mathrm{d}t$
6. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}$ (poser $t = \tan u$)
7. $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$ (Poser $u = x(x+1)$.)
8. $\displaystyle\int x^n \ln x\,\mathrm{d}x$ ($n \in \mathbb{N}$)
9. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x-x^2}}$
10. $\displaystyle\int \operatorname{Arctan} x\,\mathrm{d}x$

★ **Ex. 5** — Calculer les intégrales suivantes

$$I_1 = \int_3^4 \frac{2x-4}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x \qquad I_2 = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}\,\mathrm{d}x$$
$$I_3 = \int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x \qquad I_4 = \int_0^{\pi/4} x\tan^2 x\,\mathrm{d}x$$
$$I_5 = \int_0^1 a^{3x}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \qquad I_6 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$I_7 = \int_0^{\pi/2} \sin 2x\,\mathrm{e}^{\cos x}\,\mathrm{d}x \qquad I_8 = \int_2^5 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x$$
$$I_9 = \int_0^{\pi/4} x(\tan^2 x+\tan^4 x)\,\mathrm{d}x$$

Ex. 6 — Calculer les intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x\cos x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ (Poser $u = \sin x$.)
2. $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{2t}\ln(1+\mathrm{e}^t)\,\mathrm{d}t$ (Poser $u = \mathrm{e}^t$.)
3. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$ (Poser $t = \tan(x/2)$.) En déduire $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$ (Poser $x = \tan t$.)

4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2e^{2x}+e^x+1}{e^{2x}+1}\,dx$ (Utiliser $\dfrac{2u^2+u+1}{u(u^2+1)} = \dfrac{a}{u} + \dfrac{bu+c}{u^2+1}$ pour a, b, c bien choisis.)

Ex. 7 — 1. Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x-1)(x-5)}$.
Donner une primitive de f sur $]1\,;5[$.
On trouvera deux réels a et b tels que

$$\forall x \in\,]1\,;5[\,,\quad \frac{1}{(x-1)(x-5)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-5}$$

2. Calculer une primitive de $\dfrac{1}{x^2-5x-6}$.

Fonctions définies par morceaux

Ex. 8 — 1. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \left\lfloor 4x + \frac{1}{2} \right\rfloor dx$.

2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \sup\left(x, (x-1)^2\right) dx$.

Ex. 9 — On considère la fonction

$$f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{x} \leqslant 0 \\ \cos x & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right. .$$

Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$. En expliciter la primitive qui s'annule en 1.

Ex. 10 — Soit

$$f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2} & \text{x} < 0 \\ \dfrac{\cos x}{e^x} & \text{sinon.} \end{cases} \end{array} \right.$$

Démontrer que f admet des primitives sur $\mathbb{R}$. Calculer ces primitives.

Ex. 11 — Expliciter une primitive de $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ sur $\mathbb{R}$.

Astuces diverses

Ex. 12 — Soient a, b, c, d quatre réels. Soient les primitives

$$I = \int \frac{a\cos x + b\sin x}{c\cos x + d\sin x}\,dx$$

$$J = \int \frac{\cos x}{c\cos x + d\sin x}\,dx$$

$$K = \int \frac{\sin x}{c\cos x + d\sin x}\,dx$$

1. Calculer $cJ + dK$ et $dJ - cK$.
2. En déduire J et K, puis I.

Ex. 13 — 1. Soit à calculer

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\left[(2n+1)x\right]}{\sin x}\,dx, \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Calculer $I_{n+1} - I_n$. En déduire la valeur de I_n pour tout n.

2. Reprendre la question précédente avec $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2nx}{\sin x}\,dx$, $(n \in \mathbb{N})$

Ex. 14 — Montrer que

$$\int_0^{\pi/4} \ln(\cos x)\,dx = \int_0^{\pi/4} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right) dx$$

En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan x)\,dx$.

Intégrale et inégalités

Ex. 15 — Soit $I = \displaystyle\int_{-a}^{+a} \sqrt{\frac{1+x^2}{a^2-x^2}}\,dx$. En encadrant $\sqrt{\dfrac{1+x^2}{a^2-x^2}}$, calculer $\lim\limits_{a\to 0} I$.

Réponse : π

Ex. 16 — 1. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \leqslant \frac{1}{k}.$$

2. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que $u_n \sim \ln n$. Quelle est la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

3. Soit $v_n = u_n - \ln n$. Montrer que v_n est bornée, puis étudier sa monotonie (étudier $v_{n+1} - v_n$). Que peut on dire de v_n ?

Ex. 17 — Soit f une fonction continue sur $[0\,;1]$.

Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Fonctions définies par des intégrales

Ex. 18 — Soit a et b dans $[0\,;\pi/2[$. Démontrer que

$$\int_a^b \frac{1}{\cos x\sin x}\,\mathrm{d}x = \ln\left(\frac{\tan b}{\tan a}\right)$$

Ex. 19 — Étude de la fonction $f\ :\ x\mapsto \displaystyle\int_x^{2x}\frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer f'.
2. Montrer

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad (\ln 2)\,\mathrm{e}^x \leqslant f(x)\leqslant (\ln 2)\,\mathrm{e}^{2x}.$$

3. Calculer la limite de $f(x)$ lorsque $x\to 0$ et $x>0$. Même question lorsque $x\to 0$ et $x<0$.
4. Peut on prolonger f par continuité en 0 ? Si oui, étudier la dérivabilité du prolongement de f en 0.
5. Étudier les branches infinies de f. Tracer schématiquement son graphe.

Ex. 20 — Calculer la limite quand x tend vers $+\infty$ de $x\mapsto\displaystyle\int_x^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2+t^4}}$.

Indication : *Étudier la monotonie de la fonction* $t\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2+t^4}}$ *et en déduire un encadrement de l'intégrale.*

Ex. 21 — Soit

$$g\ :\ \left|\begin{array}{l}\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\\ x\longmapsto\displaystyle\int_x^{2x}\frac{t^2}{t^2+\sin^2 t}\,\mathrm{d}t\end{array}\right.$$

1. Montrer que g est C^1 sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer le comportement asymptotique de g en $+\infty$.

Ex. 22 — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=t^3+t$.

1. Démontrer que f admet une fonction réciproque g sur $\mathbb{R}$.
2. Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x)=\int_0^x g(y)\,\mathrm{d}y$. Calculer G en fonction de g.
   Indication : *Utiliser un changement de variable.*

Sommes de Riemann

Ex. 23 — Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$ quand

$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n\frac{n+k}{n^2+k^2}$; $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n\frac{k^2}{n^2\sqrt{n^3+k^3}}$; $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n\frac{k}{n^2}\sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$; $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}\sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$; $S_n = \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{\displaystyle\prod_{k=1}^n(n+k)}$; $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n\sin\left(\frac{k}{n}\right)\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

Exercices classiques

Ex. 24 — Intégrales de Wallis

Soit n un entier naturel et

$$I_n = \int_0^{\pi/2}\sin^n t\,\mathrm{d}t$$

1. a) Calculer I_0, I_1, I_2.
   b) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Est-elle convergente ?
2. a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad (n+2)I_{n+2}=(n+1)I_n.$$

   b) Calculer nI_nI_{n-1}, pour $n\in\mathbb{N}^*$.
3. a) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{I_n}{I_{n-2}}\leqslant\dfrac{I_n}{I_{n-1}}\leqslant 1$.
   b) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{I_n}{I_{n-1}}=1$, et en déduire que $I_n\sim I_{n-1}$.

c) Utiliser le résultat de la question 2.b pour en déduire un équivalent de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ex. 25 — Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^{-x}\,dx$.

1. a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\quad 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

   b) En déduire que la suite (I_n) converge et donner sa limite.

2. À l'aide d'une intégration par parties, établir que $\forall n \in \mathbb{N},\quad I_n = \dfrac{1}{(n+1)e} + \dfrac{I_{n+1}}{n+1}$.

3. a) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant I_n - \dfrac{1}{(n+1)e} \leqslant \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$.

   b) Trouver un équivalent simple de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Ex. 26 — Soit n un entier naturel non nul.

1. Montrer que l'on a, pour tout $x \in [0\,;1]$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-x)^n + \frac{(-x)^{n+1}}{1+x}$$
$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots + (-x^2)^n + \frac{(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}$$

2. En intégrant ces égalités sur l'intervalle $[0\,;1]$, trouver la limite des suites

$$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n+1}$$
$$\text{et}\ \ t_n = 1 - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Ex. 27 — On considère la suite d'intégrales $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{e^x+1}\,dx$ où n est un entier positif.

1. Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$.
   Exprimer J_0 en fonction de I et en déduire la valeur de J_0.

2. Montrer que, pour $n \geqslant 1$, $0 \leqslant J_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.
   En déduire la limite de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Montrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   En déduire sans calcul supplémentaire que $\dfrac{1}{2}(J_n + J_{n+1}) \leqslant J_n \leqslant \dfrac{1}{2}(J_{n-1} + J_n)$.

4. Calculer la valeur de $J_n + J_{n-1}$ en fonction de n.

5. En déduire la limite de la suite $(nJ_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour finir...

Ex. 28 — Soit a et b deux réels avec $a \leqslant b$.

1. Soit f et g deux fonctions continues sur $[a\,;b]$, avec f de signe constant.

   a) Démontrer que

$$\left[\inf_{x\in I} g(x)\right]\int_a^b f \leqslant \int_a^b f\times g \leqslant \left[\sup_{x\in I} g(x)\right]\int_a^b f$$

   b) Démontrer qu'il existe $y \in [a\,;b]$ tq

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(y)\int_a^b f(x)\,dx$$

2. Soit f une fonction de classe C^1 dont la dérivée soit de signe constant sur $[a\,;b]$, et g une fonction continue sur $[a\,;b]$. Démontrer qu'il existe $y \in [a\,;b]$ tel que

$$\int_a^b fg = f(a)\int_a^y g + f(a)\int_y^b g$$

Indication : *Poser $G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$, faire une intégration par parties et utiliser la question précédente.*

Ex. 29 — Soit J la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression

$$J(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin\theta)d\theta$$

En procédant à un changement de variable, montrer que J est deux fois dérivable. Déterminer une équation différentielle dont J est solution.

Ex. 30 — Soit F la fonction définie par $F(x) = \int_x^{2x} t^2 \sin t\,dt$.

1. Donner l'ensemble de définition de F et montrer que F est de classe C^∞ sur cet ensemble.
2. Montrer que F est une fonction paire.
3. Calculer, pour tout x de $\mathbb{R}$, $F(x)$.