

Calculs plus ou moins subtils

Ex. 1 — Calculer les intégrales suivantes ($n \in \mathbb{N}$)

$$\int_0^1 x^n dx \quad \int_0^1 nx^{n-1} dx$$

$$\int_0^1 (x+1)^n dx \quad \int_0^1 (2x+1)^n dx$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x^n} dx \quad \int_0^1 x^{n/2} dx$$

$$\int_0^1 3x^2 + 2x + 1 dx \quad \int_0^1 3(x+2)(x-5) dx$$

$$\frac{\tan x}{\cos^2 x}$$

Ex. 2 — Calculer les intégrales suivantes, à l'aide d'une intégration par parties. Préciser l'ensemble de valeurs de x .

1. $\int_0^x \text{Arctan } t \, dt$
2. $\int_0^{\pi/4} \cos x \ln(1 + \cos x) \, dx$
3. $\int_0^x t \ln t \, dt$
4. $\int_0^x t \sin(t) \, dt$

Ex. 3 — Calculer les primitives des fonctions suivantes, en utilisant un changement de variables. Préciser à chaque fois un domaine de validité.

1. $x \mapsto \frac{1}{x^2 + a^2}$ avec $t = x/a$;
2. $x \mapsto x^2 \ln(x^6 - 1)$ avec $u = x^3$;
3. $x \mapsto \cos^3 x$ avec $\sin x = u$;
4. $x \mapsto \frac{x}{1+x^4}$ avec $u = x^2$.

Ex. 4 — Calculer les primitives suivantes

1. $\int \frac{t^2 + 3}{(t+1)^4} dt$
2. $\int \frac{x^3}{1+x^4} dx$

3. $\int \frac{dt}{t(t^7+1)}$ (Trouver a, b tels que $\frac{1}{u(1+u)} = \frac{a}{u} + \frac{b}{1+u}$ pour transformer $\frac{t^6}{t^7(1+t^7)}$.)

4. $\int \sin t \cos^5 t \, dt$

5. $\int \text{Arctan}(t^{1/2}) \, dt$

6. $\int \frac{dt}{(t^2+1)^2}$ (poser $t = \tan u$)

7. $\int \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2} dx$ (Poser $u = x(x+1)$.)

8. $\int x^n \ln x \, dx$ ($n \in \mathbb{N}$)

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$

10. $\int \text{Arctan } x \, dx$

★ **Ex. 5** — Calculer les intégrales suivantes

$$I_1 = \int_3^4 \frac{2x-4}{x^2-3x+2} dx \quad I_2 = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x} dx$$

$$I_3 = \int_0^1 \frac{1}{e^x+1} dx \quad I_4 = \int_0^{\pi/4} x \tan^2 x \, dx$$

$$I_5 = \int_0^1 a^{3x} e^x \, dx \quad I_6 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx$$

$$I_7 = \int_0^{\pi/2} \sin 2x e^{\cos x} \, dx \quad I_8 = \int_2^5 \frac{x}{\sqrt{x-1}} \, dx$$

$$I_9 = \int_0^{\pi/4} x(\tan^2 x + \tan^4 x) \, dx$$

Ex. 6 — Calculer les intégrales suivantes

1. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x \cos x}{1 + \cos^2 x} dx$ (Poser $u = \sin x$.)

2. $\int_0^1 e^{2t} \ln(1+e^t) \, dt$ (Poser $u = e^t$.)

3. $\int \frac{dx}{\sin x}$ (Poser $t = \tan(x/2)$.) En déduire

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} \quad (\text{Poser } x = \tan t.)$$

4. $\int_0^1 \frac{2e^{2x} + e^x + 1}{e^{2x} + 1} dx$ (Utiliser $\frac{2u^2 + u + 1}{u(u^2 + 1)} = \frac{a}{u} + \frac{bu + c}{u^2 + 1}$ pour a, b, c bien choisis.)

Ex. 7 — 1. Soit $f : x \mapsto \frac{1}{(x-1)(x-5)}$.
Donner une primitive de f sur $]1; 5[$.
On trouvera deux réels a et b tels que

$$\forall x \in]1; 5[, \frac{1}{(x-1)(x-5)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-5}$$

2. Calculer une primitive de $\frac{1}{x^2 - 5x - 6}$.

Fonctions définies par morceaux

Ex. 8 — 1. Calculer $\int_0^1 \left[4x + \frac{1}{2}\right] dx$.

2. Calculer $\int_0^1 \sup(x, (x-1)^2) dx$.

Ex. 9 — On considère la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \leq 0 \\ \cos x & \text{sinon} \end{cases}$$

Démontrer que f est continue sur \mathbb{R} . En expliciter la primitive qui s'annule en 1.

Ex. 10 — Soit

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{\cos x}{e^x} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démontrer que f admet des primitives sur \mathbb{R} . Calculer ces primitives.

Ex. 11 — Expliciter une primitive de $x \mapsto [x]$ sur \mathbb{R} .

Astuces diverses

Ex. 12 — Soient a, b, c, d quatre réels. Soient les primitives

$$I = \int \frac{a \cos x + b \sin x}{c \cos x + d \sin x} dx$$

$$J = \int \frac{\cos x}{c \cos x + d \sin x} dx$$

$$K = \int \frac{\sin x}{c \cos x + d \sin x} dx$$

1. Calculer $cJ + dK$ et $dJ - cK$.
2. En déduire J et K , puis I .

Ex. 13 — 1. Soit à calculer

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin[(2n+1)x]}{\sin x} dx, \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Calculer $I_{n+1} - I_n$. En déduire la valeur de I_n pour tout n .

2. Reprendre la question précédente avec

$$J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2nx}{\sin x} dx, \quad (n \in \mathbb{N})$$

Ex. 14 — Montrer que

$$\int_0^{\pi/4} \ln(\cos x) dx = \int_0^{\pi/4} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right) dx$$

En déduire la valeur de $\int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan x) dx$.

Intégrale et inégalités

Ex. 15 — Soit $I = \int_{-a}^{+a} \sqrt{\frac{1+x^2}{a^2-x^2}} dx$. En en-

cadrant $\sqrt{\frac{1+x^2}{a^2-x^2}}$, calculer $\lim_{a \rightarrow 0} I$.

RÉPONSE : π

Ex. 16 — 1. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$$

2. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Montrer que $u_n \sim \ln n$. Quelle est la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

3. Soit $v_n = u_n - \ln n$. Montrer que v_n est bornée, puis étudier sa monotonie (étudier $v_{n+1} - v_n$). Que peut-on dire de v_n ?

Ex. 17 — Soit f une fonction continue sur $[0; 1]$.

Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x t f(t) dt = 0$.

Fonctions définies par des intégrales

Ex. 18 — Soit a et b dans $[0; \pi/2[$. Démontrer que

$$\int_a^b \frac{1}{\cos x \sin x} dx = \ln \left(\frac{\tan b}{\tan a} \right)$$

Ex. 19 — ÉTUDE DE LA FONCTION $f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$.

1. Montrer que f est définie, continue et dérivable sur \mathbb{R}^* et calculer f' .
2. Montrer

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, (\ln 2) e^x \leq f(x) \leq (\ln 2) e^{2x}.$$

3. Calculer la limite de $f(x)$ lorsque $x \rightarrow 0$ et $x > 0$. Même question lorsque $x \rightarrow 0$ et $x < 0$.
4. Peut-on prolonger f par continuité en 0 ? Si oui, étudier la dérivabilité du prolongement de f en 0.
5. Étudier les branches infinies de f . Tracer schématiquement son graphe.

Ex. 20 — Calculer la limite quand x tend vers

$$+\infty \text{ de } x \mapsto \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2+t^4}}.$$

INDICATION : Étudier la monotonie de la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^2+t^4}}$ et en déduire un encadrement de l'intégrale.

Ex. 21 — Soit

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \int_x^{2x} \frac{t^2}{t^2 + \sin^2 t} dt \end{cases}$$

1. Montrer que g est C^1 sur \mathbb{R} .

2. Déterminer le comportement asymptotique de g en $+\infty$.

Ex. 22 — Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(t) = t^3 + t$.

1. Démontrer que f admet une fonction réciproque g sur \mathbb{R} .
2. Soit G la fonction définie sur \mathbb{R} par $G(x) = \int_0^x g(y) dy$. Calculer G en fonction de g .

INDICATION : Utiliser un changement de variable.

Sommes de Riemann

Ex. 23 — Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ quand

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k^2}; \quad S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2 \sqrt{n^3+k^3}};$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \sin \left(\frac{k\pi}{n+1} \right); \quad S_n =$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sin \left(\frac{k\pi}{n+1} \right); \quad S_n = \frac{1}{n} \sqrt{\prod_{k=1}^n (n+k)};$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \sin \left(\frac{k}{n} \right) \sin \left(\frac{k}{n^2} \right).$$

Exercices classiques

Ex. 24 — INTÉGRALES DE WALLIS

Soit n un entier naturel et

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t dt$$

1. a) Calculer I_0, I_1, I_2 .
b) Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Est-elle convergente ?
2. a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n.$$

- b) Calculer $nI_n I_{n-1}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3. a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{I_n}{I_{n-2}} \leq \frac{I_n}{I_{n-1}} \leq 1$.
b) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{I_{n-1}} = 1$, et en déduire que $I_n \sim I_{n-1}$.

- c) Utiliser le résultat de la question ?? pour en déduire un équivalent de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Ex. 25 — Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$.

- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.
 - En déduire que la suite (I_n) converge et donner sa limite.
- À l'aide d'une intégration par parties, établir que $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \frac{1}{(n+1)e} + \frac{I_{n+1}}{n+1}$.
- En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n - \frac{1}{(n+1)e} \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.
 - Trouver un équivalent simple de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Ex. 26 — Soit n un entier naturel non nul.

- Montrer que l'on a, pour tout $x \in [0; 1]$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-x)^n + \frac{(-x)^{n+1}}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-x^2)^n + \frac{(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}$$

- En intégrant ces égalités sur l'intervalle $[0; 1]$, trouver la limite des suites

$$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \dots + \frac{(-1)^n}{n+1}$$

$$\text{et } t_n = 1 - \frac{1}{3} + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Ex. 27 — On considère la suite d'intégrales $J_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{e^x + 1} dx$ où n est un entier positif.

- Calculer $I = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx$.
Exprimer J_0 en fonction de I et en déduire la valeur de J_0 .
- Montrer que, pour $n \geq 1, 0 \leq J_n \leq \frac{1}{n}$.
En déduire la limite de la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Montrer que la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
En déduire sans calcul supplémentaire que $\frac{1}{2}(J_n + J_{n+1}) \leq J_n \leq \frac{1}{2}(J_{n-1} + J_n)$.

- Calculer la valeur de $J_n + J_{n-1}$ en fonction de n .
- En déduire la limite de la suite $(nJ_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Pour finir...

Ex. 28 — Soit a et b deux réels avec $a \leq b$.

- Soit f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$, avec f de signe constant.

a) Démontrer que

$$\left[\inf_{x \in I} g(x) \right] \int_a^b f \leq \int_a^b f \times g \leq \left[\sup_{x \in I} g(x) \right] \int_a^b f$$

b) Démontrer qu'il existe $y \in [a; b]$ tq

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = g(y) \int_a^b f(x) dx$$

- Soit f une fonction de classe C^1 dont la dérivée soit de signe constant sur $[a; b]$, et g une fonction continue sur $[a; b]$. Démontrer qu'il existe $y \in [a; b]$ tel que

$$\int_a^b f g = f(a) \int_a^y g + f(b) \int_y^b g$$

INDICATION : Poser $G(x) = \int_a^x g(t) dt$, faire une intégration par parties et utiliser la question précédente.

Ex. 29 — Soit J la fonction définie sur \mathbb{R} par l'expression

$$J(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \theta) d\theta$$

En procédant à un changement de variable, montrer que J est deux fois dérivable. Déterminer une équation différentielle dont J est solution.

Ex. 30 — Soit F la fonction définie par $F(x) = \int_x^{2x} t^2 \sin t dt$.

- Donner l'ensemble de définition de F et montrer que F est de classe C^∞ sur cet ensemble.
- Montrer que F est une fonction paire.
- Calculer, pour tout x de \mathbb{R} , $F(x)$.

