

# Géométrie

BCPST I, 12/2017

## Droites et plans

### Exercice 1

On considère le point  $C = (5, 2)$  et une droite  $D$ . Soit  $\Delta$  la parallèle à  $D$  passant par  $C$  et  $\Delta'$  la perpendiculaire à  $D$  passant par  $C$ .

Écrire les équations et les représentations paramétriques de  $\Delta$  et  $\Delta'$  dans chacun des cas suivants :

1.  $D$  a pour équation  $x - 2y + 4 = 0$ ;
2.  $D$  a pour représentation paramétrique  $\begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 5 - 3t \end{cases}$  ;
3.  $D$  passe par les points  $A = (3, -2)$  et  $B = (-1, 4)$ ;
4.  $D$  a pour coefficient directeur  $m \in \mathbb{R}^*$ .

### Exercice 2

Vérifier que le point  $A(1, 1, 1)$  et les vecteurs  $\vec{u} = (-1, 2, -2)$  et  $\vec{u}' = (2, -2, 1)$  définissent bien un plan dans l'espace. En donner une équation paramétrique.

### Exercice 3

Trouver deux repères du plan d'équation  $x + 2y - 3z = 1$  dont l'un soit orthonormal.

### Exercice 4

Dans  $\mathbb{R}^3$ , donner une représentation paramétrique de la droite  $D$  définie par le couple d'équations  $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - 2y + z + 4 = 0 \end{cases}$ .

### Exercice 5

Vérifier que les plans  $P$  et  $P'$  donnés par les représentations paramétriques suivantes sont confondus :

$$P \begin{cases} x = 2 + t + 2t' \\ y = -1 + 2t - t' \\ z = 3t + t' \end{cases} \quad P' \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t + t' \end{cases}$$

### Exercice 6

1. Écrire une équation du plan passant par le point  $A = (1, 0, -1)$  et parallèle au plan  $Q$  d'équation  $x + 3y - 3z - 1 = 0$ .
2. Déterminer la droite  $\Delta$  passant par  $A$ , parallèle à  $Q$  et rencontrant la droite  $(Oz)$  en un point que l'on précisera.

### Exercice 7

1. Calculer la distance du point  $A(1, 2, 3)$  à la droite  $D$  d'équations

$$\begin{cases} x + y - 2z - 1 = 0 \\ 2x - y + z + 1 = 0 \end{cases}.$$

2. Déterminer la perpendiculaire commune  $\Delta$  des deux droites

$$D \begin{cases} x - y - z - 2 = 0 \\ x - 2y - 3z + 1 = 0 \end{cases} \quad D' \begin{cases} x + y + 2z - 1 = 0 \\ 2x + y + z + 2 = 0 \end{cases}$$

et calculer la distance séparant  $D$  et  $D'$ .

### Exercice 8

Écrire une équation du plan passant par  $A = (1, 0, -1)$  et perpendiculaire à la droite  $D$  de couple d'équation  $\begin{cases} x = 1 - 2z \\ y = -3 + z \end{cases}$ .

### Exercice 9

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ . Montrez que :

1.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} [\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2]$ ;
2.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4} [\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2]$ ;
3.  $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2)$  (égalité du parallélogramme) ;
4.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  ssi  $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|$  (propriété du rectangle).

### Exercice 10

Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un repère orthonormé. Calculer la distance de  $M(5, 4, 3)$  à la droite  $D$  d'équations :  $x + 2y - 2z = 0$  et  $y + 3z = 0$ .

### Exercice 11

Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un repère orthonormé. Montrer que les droites :

$$D : \begin{cases} x = 2 + z \\ y = -1 - 3z \end{cases} \quad \text{et} \quad D' : \begin{cases} x + 2y + z - 4 = 0 \\ 3x + 3y + 2z - 7 = 0 \end{cases}$$

sont concourantes, et donner l'équation du plan qui les contient.

### Exercice 12

Soient les deux droites :

$$D : \begin{cases} x + y + z = a \\ 3x - 2y - 2z = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad D' : \begin{cases} A(1, 1, 1) \\ B(2, 2, 1) \end{cases}$$

Déterminer  $a$  pour que les droites  $D$  et  $D'$  appartiennent à un même plan. Donner alors l'équation de ce plan.

### Exercice 13

Étudier l'intersection des plans  $P$  et  $Q$  définis de façon paramétrique par :

$$P : \begin{cases} x = 2 + \lambda + 2\mu \\ y = 2 + 2\lambda + \mu \\ z = 1 - \lambda - \mu \end{cases} \quad \text{et} \quad Q : \begin{cases} x = 1 + 3\lambda - \mu \\ y = 3 + 3\lambda + \mu \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$$

### Exercice 14

Projeté orthogonale de la droite

$$D : \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases}$$

sur le plan  $P : x + 2y + 3z - 6 = 0$ .

## Cercles

### ★ Exercice 15

Dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  on considère deux points  $A(a, 0)$  et  $B(0, b)$  et un point quelconque  $M(x, y)$ .

- Déterminer les coordonnées de  $P$ ,  $Q$  et  $R$  les projetés orthogonaux de  $M$  sur les droites  $(OA)$ ,  $(OB)$  et  $(AB)$ .
- Donner une équation cartésienne du cercle  $\mathcal{C}$  circonscrit au triangle  $OAB$ .
- Démontrer que  $M$  appartient à  $\mathcal{C}$  ssi les points  $P$ ,  $Q$  et  $R$  sont alignés.

### Exercice 16

Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  un repère orthonormé. Déterminer l'équation des tangentes issues de  $M(\sqrt{5}, \sqrt{5})$  au cercle d'équation  $x^2 + y^2 = 1$ .

### Exercice 17

On considère la sphère de centre  $O$  et de rayon 1, et  $D$  la droite passant par le point  $A(2, 0, 0)$  et de vecteur directeur  $\vec{u}(1, 1, 0)$ . Équation des plans tangents à la sphère et contenant la droite  $D$ .

## Calcul d'aires

### Exercice 18

Calculer l'aire des domaines de  $\mathbb{R}^2$  définis par

- $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } y \geq 0, x + y \leq 1, y - x \leq 1\}$ ;
- $\mathcal{D} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x \leq h\}$  avec  $h \in \mathbb{R}$ ;
- $\mathcal{D} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } y \leq h\}$  avec  $h \in \mathbb{R}$ ;
- $\mathcal{D} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x + y \leq h\}$  avec  $h \in \mathbb{R}$ .

### Exercice 19

Calculer l'aire des domaines de  $\mathbb{R}^2$  définis par

- $\mathcal{D}_h = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq h\}$  avec  $h \in \mathbb{R}$ ;
- $\mathcal{D}_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x^2 + y^2 \leq a\}$  avec  $a \in \mathbb{R}$ ;

- $\mathcal{D}_a \cap \mathcal{D}_h$ .

### Exercice 20

Calculer l'aire des domaines de  $\mathbb{R}^2$  définis par

- $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \text{ ou } (x, y) \in [0; 1] \times [0; 1/2]\}$
- $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}_h$  avec  $\mathcal{D}_h = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x + y \leq h\}$  avec  $h \in \mathbb{R}^2$ .

### Exercice 21

Calculer l'aire des domaines de  $\mathbb{R}^2$  définis par

- $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } |x| + |y| \geq 1\}$ ;
- $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } |x + y| \geq 1\}$ ;
- $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \max x, y \geq 1\}$ ;
- $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \max |x|, |y| \geq 1\}$ .

## Exercices divers

### ★ Exercice 22

Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  un repère orthonormé, et  $\mathcal{H}$  l'hyperbole d'équation  $xy = 1$ . Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois points de  $\mathcal{H}$ .

- Montrer que l'orthocentre  $H$  du triangle  $ABC$  appartient à  $\mathcal{H}$ .
- Le cercle circonscrit à  $ABC$  recoupe  $\mathcal{H}$  en  $D$ . Montrer que  $H$  et  $D$  sont symétriques par rapport à  $O$ .