

GÉOMÉTRIE

BCPST I, 2018

DROITES ET PLANS

EXERCICE 1

On considère le point $C = (5, 2)$ et une droite D . Soit Δ la parallèle à D passant par C et Δ' la perpendiculaire à D passant par C .

Écrire les équations et les représentations paramétriques de Δ et Δ' dans chacun des cas suivants :

1. D a pour équation $x - 2y + 4 = 0$;
2. D a pour représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 5 - 3t \end{cases};$$
3. D passe par les points $A = (3, -2)$ et $B = (-1, 4)$;
4. D a pour coefficient directeur $m \in \mathbb{R}^*$.

EXERCICE 2

Vérifier que le point $A(1, 1, 1)$ et les vecteurs $\vec{u} = (-1, 2, -2)$ et $\vec{u}' = (2, -2, 1)$ définissent bien un plan dans l'espace. En donner une équation paramétrique.

EXERCICE 3

Trouver deux repères du plan d'équation $x + 2y - 3z = 1$ dont l'un soit orthonormal.

EXERCICE 4

Dans \mathbb{R}^3 , donner une représentation paramétrique de la droite D définie par le couple d'équations
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - 2y + z + 4 = 0 \end{cases}.$$

EXERCICE 5

Vérifier que les plans P et P' donnés par les représentations paramétriques suivantes sont confondus :

$$P \begin{cases} x = 2 + t + 2t' \\ y = -1 + 2t - t' \\ z = 3t + t' \end{cases} \quad P' \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t + t' \end{cases}$$

EXERCICE 6

1. Écrire une équation du plan passant par le point $A = (1, 0, -1)$ et parallèle au plan Q d'équation $x + 3y - 3z - 1 = 0$.
2. Déterminer la droite Δ passant par A , parallèle à Q et rencontrant la droite (Oz) en un point que l'on précisera.

EXERCICE 7

1. Calculer la distance du point $A(1, 2, 3)$ à la droite D d'équations

$$\begin{cases} x + y - 2z - 1 = 0 \\ 2x - y + z + 1 = 0 \end{cases}.$$

2. Déterminer la perpendiculaire commune Δ des deux droites

$$D \begin{cases} x - y - z - 2 = 0 \\ x - 2y - 3z + 1 = 0 \end{cases} \quad D' \begin{cases} x + y + 2z - 1 = 0 \\ 2x + y + z + 2 = 0 \end{cases}$$

et calculer la distance séparant D et D' .

EXERCICE 8

Écrire une équation du plan passant par $A = (1, 0, -1)$ et perpendiculaire à la droite D de couple d'équation
$$\begin{cases} x = 1 - 2z \\ y = -3 + z \end{cases}.$$

EXERCICE 9

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de \mathbb{R}^3 . Montrez que :

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} [\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2]$;
2. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4} [\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2]$;
3. $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2)$ (égalité du parallélogramme);
4. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ ssi $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|$ (propriété du rectangle).

EXERCICE 10

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé. Calculer la distance de $M(5, 4, 3)$ à la droite D d'équations : $x + 2y - 2z = 0$ et $y + 3z = 0$.

EXERCICE 11

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé. Montrer

que les droites :

$$D : \begin{cases} x = 2 + z \\ y = -1 - 3z \end{cases} \quad \text{et} \quad D' : \begin{cases} x + 2y + z - 4 = 0 \\ 3x + 3y + 2z - 7 = 0 \end{cases}$$

sont concourantes, et donner l'équation du plan qui les contient.

EXERCICE 12

Soient les deux droites :

$$D : \begin{cases} x + y + z = a \\ 3x - 2y - 2z = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad D' : \begin{cases} A(1, 1, 1) \\ B(2, 2, 1) \end{cases}$$

Déterminer a pour que les droites D et D' appartiennent à un même plan. Donner alors l'équation de ce plan.

EXERCICE 13

Étudier l'intersection des plans P et Q définis de façon paramétrique par :

$$P : \begin{cases} x = 2 + \lambda + 2\mu \\ y = 2 + 2\lambda + \mu \\ z = 1 - \lambda - \mu \end{cases} \quad \text{et} \quad Q : \begin{cases} x = 1 + 3\lambda - \mu \\ y = 3 + 3\lambda + \mu \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$$

EXERCICE 14

Projeté orthogonale de la droite

$$D : \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases}$$

sur le plan $P : x + 2y + 3z - 6 = 0$.

CERCLES

★ EXERCICE 15

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) on considère deux points $A(a, 0)$ et $B(0, b)$ et un point quelconque $M(x, y)$.

- Déterminer les coordonnées de P , Q et R les projetés orthogonaux de M sur les droites (OA) , (OB) et (AB) .
- Donner une équation cartésienne du cercle \mathcal{C} circonscrit au triangle OAB .
- Démontrer que M appartient à \mathcal{C} ssi les points P , Q et R sont alignés.

EXERCICE 16

Soit (O, \vec{i}, \vec{j}) un repère orthonormé. Déterminer l'équation des tangentes issues de $M(\sqrt{5}, \sqrt{5})$ au cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$.

EXERCICE 17

On considère la sphère de centre O et de rayon 1, et D la droite passant par le point $A(2, 0, 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1, 1, 0)$. Équation des plans tangents à la sphère et contenant la droite D .

CALCUL D'AIRES

EXERCICE 18

Calculer l'aire des domaines de \mathbb{R}^2 définis par

- $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0, x + y \leq 1, y - x \leq 1\}$
- $\mathcal{D} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq h\}$ avec $h \in \mathbb{R}$;
- $\mathcal{D} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq h\}$ avec $h \in \mathbb{R}$;
- $\mathcal{D} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq h\}$ avec $h \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 19

Calculer l'aire des domaines de \mathbb{R}^2 définis par

- $\mathcal{D}_h = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq h\}$ avec $h \in \mathbb{R}$;
- $\mathcal{D}_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq a\}$ avec $a \in \mathbb{R}$;
- $\mathcal{D}_a \cap \mathcal{D}_h$.

EXERCICE 20

Calculer l'aire des domaines de \mathbb{R}^2 définis par

- $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \text{ ou } (x, y) \in [0; 1] \times [0; 1/2]\}$
- $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}_h$ avec $\mathcal{D}_h = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq h\}$ avec $h \in \mathbb{R}^2$.

EXERCICE 21

Calculer l'aire des domaines de \mathbb{R}^2 définis par

- $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \geq 1\}$;
- $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x + y| \geq 1\}$;
- $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max(x, y) \geq 1\}$;
- $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max(|x|, |y|) \geq 1\}$.

EXERCICES DIVERS

★ EXERCICE 22

Soit (O, \vec{i}, \vec{j}) un repère orthonormé, et \mathcal{H} l'hyperbole d'équation $xy = 1$. Soient A, B et C trois points de \mathcal{H} .

1. Montrer que l'orthocentre H du triangle ABC appartient à \mathcal{H} .
2. Le cercle circonscrit à ABC recoupe \mathcal{H} en D . Montrer que H et D sont symétriques par rapport à O .

