Droites et plans

Ex. 1 — On considère le point $C=(5,2)$ et une droite D. Soit Δ la parallèle à D passant par C et Δ' la perpendiculaire à D passant par C.
Écrire les équations et les représentations paramétriques de Δ et Δ' dans chacun des cas suivants :

1. D a pour équation $x-2y+4=0$;
2. D a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x=-3+4t \\ y=5-3t \end{cases}$;
3. D passe par les points $A=(3,-2)$ et $B=(-1,4)$;
4. D a pour coefficient directeur $m\in\mathbb{R}^*$.

Ex. 2 — Vérifier que le point $A(1,1,1)$ et les vecteurs $\overrightarrow{u}=(-1,2,-2)$ et $\overrightarrow{u}'=(2,-2,1)$ définissent bien un plan dans l'espace. En donner une équation paramétrique.

Ex. 3 — Trouver deux repères du plan d'équation $x+2y-3z=1$ dont l'un soit orthonormal.

Ex. 4 — Dans $\mathbb{R}^3$, donner une représentation paramétrique de la droite D définie par le couple d'équations $\begin{cases} x+y=1 \\ x-2y+z+4=0 \end{cases}$.

Ex. 5 — Vérifier que les plans P et P' donnés par les représentations paramétriques suivantes sont confondus :

$$P\begin{cases} x=2+t+2t' \\ y=-1+2t-t' \\ z=3t+t' \end{cases} \qquad P'\begin{cases} x=1+t \\ y=1+t \\ z=1+t+t' \end{cases}$$

Ex. 6 —
1. Écrire une équation du plan passant par le point $A=(1,0,-1)$ et parallèle au plan Q d'équation $x+3y-3z-1=0$.
2. Déterminer la droite Δ passant par A, parallèle à Q et rencontrant la droite (Oz) en un point que l'on précisera.

Ex. 7 —
1. Calculer la distance du point $A(1,2,3)$ à la droite D d'équations
$$\begin{cases} x+y-2z-1 = 0 \\ 2x-y+z+1 = 0 \end{cases}.$$
2. Déterminer la perpendiculaire commune Δ des deux droites
$$D\begin{cases} x-y-z-2=0 \\ x-2y-3z+1=0 \end{cases} \qquad D'\begin{cases} x+y+2z-1=0 \\ 2x+y+z+2=0 \end{cases}$$
et calculer la distance séparant D et D'.

Ex. 8 — Écrire une équation du plan passant par $A=(1,0,-1)$ et perpendiculaire à la droite D de couple d'équation $\begin{cases} x=1-2z \\ y=-3+z \end{cases}$.

Ex. 9 — Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Montrez que :

1. $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\frac{1}{2}\left[\left\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{u}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{v}\right\|^2\right]$;
2. $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\frac{1}{4}\left[\left\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\right\|^2\right]$;
3. $\left\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\right\|^2=2\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)$ (égalité du parallélogramme) ;
4. $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$ ssi $\left\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right\|=\left\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\right\|$ (propriété du rectangle).

Ex. 10 — Soit $\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ un repère orthonormé. Calculer la distance de $M(5,4,3)$ à la droite D d'équations : $x+2y-2z=0$ et $y+3z=0$.

Ex. 11 — Soit $\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ un repère orthonormé. Montrer que les droites :

$$D:\begin{cases} x=2+z \\ y=-1-3z \end{cases} \quad \text{et} \quad D':\begin{cases} x+2y+z-4=0 \\ 3x+3y+2z-7=0 \end{cases}$$

sont concourantes, et donner l'équation du plan qui les contient.

Ex. 12 — Soient les deux droites :

$$D:\begin{cases} x+y+z=a \\ 3x-2y-2z=0 \end{cases} \quad \text{et} \quad D':\begin{cases} A(1,1,1) \\ B(2,2,1) \end{cases}$$

Déterminer a pour que les droites D et D' appartiennent à un même plan. Donner alors l'équation de ce plan.

Ex. 13 — Étudier l'intersection des plans P et Q définis de façon paramétrique par :

$$P:\begin{cases} x=2+\lambda+2\mu \\ y=2+2\lambda+\mu \\ z=1-\lambda-\mu \end{cases} \quad \text{et} \quad Q:\begin{cases} x=1+3\lambda-\mu \\ y=3+3\lambda+\mu \\ z=1-2\lambda \end{cases}$$

Ex. 14 — Projeté orthogonale de la droite

$$D:\begin{cases} x+y+z-1=0 \\ x-y-2z=0 \end{cases}$$

sur le plan $P : x+2y+3z-6=0$.

Cercles

★ **Ex. 15** — Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ on considère deux points $A(a, 0)$ et $B(0, b)$ et un point quelconque $M(x, y)$.

1. Déterminer les coordonnées de P, Q et R les projetés orthogonaux de M sur les droites (OA), (OB) et (AB).
2. Donner une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle OAB.
3. Démontrer que M appartient à $\mathscr{C}$ ssi les points P, Q et R sont alignés.

Ex. 16 — Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé. Déterminer l'équation des tangentes issues de $M(\sqrt{5}, \sqrt{5})$ au cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$.

Ex. 17 — On considère la sphère de centre O et de rayon 1, et D la droite passant par le point $A(2, 0, 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1, 1, 0)$. Équation des plans tangents à la sphère et contenant la droite D.

Calcul d'aires

Ex. 18 — Calculer l'aire des domaines de $\mathbb{R}^2$ définit par

1. $\mathscr{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } y \geqslant 0, x + y \leqslant 1, y - x \leqslant 1\right\}$;
2. $\mathscr{D} \cap \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x \leqslant h\right\}$ avec $h \in \mathbb{R}$;
3. $\mathscr{D} \cap \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } y \leqslant h\right\}$ avec $h \in \mathbb{R}$;
4. $\mathscr{D} \cap \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x + y \leqslant h\right\}$ avec $h \in \mathbb{R}$.

Ex. 19 — Calculer l'aire des domaines de $\mathbb{R}^2$ définit par

1. $\mathscr{D}_h = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x \geqslant 0, y \geqslant 0, x + y \leqslant h\right\}$ avec $h \in \mathbb{R}$;
2. $\mathscr{D}_a = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x^2 + y^2 \leqslant a\right\}$ avec $a \in \mathbb{R}$;
3. $\mathscr{D}_a \cap \mathscr{D}_h$.

Ex. 20 — Calculer l'aire des domaines de $\mathbb{R}^2$ définit par

1. $\mathscr{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x, y) \text{ ou } (x, y) \in [0\,;\,1] \times [0\,;\,1/2]\right\}$
2. $\mathscr{D} \cap \mathscr{D}_h$ avec $\mathscr{D}_h = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x + y \leqslant h\right\}$ avec $h \in \mathbb{R}^2$.

Ex. 21 — Calculer l'aire des domaines de $\mathbb{R}^2$ définit par

1. $\mathscr{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } |x| + |y| \geqslant 1\right\}$;
2. $\mathscr{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } |x + y| \geqslant 1\right\}$;
3. $\mathscr{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \max x, y \geqslant 1\right\}$;
4. $\mathscr{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \max |x|, |y| \geqslant 1\right\}$.

Exercices divers

★ **Ex. 22** — Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé, et $\mathscr{H}$ l'hyperbole d'équation $xy = 1$. Soient A, B et C trois points de $\mathscr{H}$.

1. Montrer que l'orthocentre H du triangle ABC appartient à $\mathscr{H}$.
2. Le cercle circonscrit à ABC recoupe $\mathscr{H}$ en D. Montrer que H et D sont symétriques par rapport à O.