Ex. 1 — 1. Montrer que la composée de deux fonctions monotones de même sens (resp. de sens contraires) est croissante (resp. décroissante).
2. Montrer que la somme de deux fonctions croissantes est croissante.
3. La somme de deux fonctions monotones est-elle nécessairement monotone ?
4. Le produit de deux fonctions croissantes est-il nécessairement une fonction croissante ?

Ex. 2 — Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f \circ f$ est croissante et $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante. Montrer que f est strictement décroissante.

Puissances et exponentielles

Ex. 3 — Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.
Simplifier a^b pour $a = \exp\left(x^2\right)$ et $b = \dfrac{1}{x}\ln(x^{1/x})$.

Ex. 4 — Soit $(a, b, c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$. Parmi les relations suivantes, lesquelles sont exactes ?
$\left(a^b\right)^c = a^{bc}$; $a^b a^c = a^{bc}$; $a^{2b} = \left(a^b\right)^2$; $(ab)^c = a^{c/2}b^{c/2}$; $\left(a^b\right)^c = a^{(b^c)}$; $\left(a^b\right)^c = (a^c)^b$.

Ex. 5 — Comparer $\lim\limits_{x\to 0+} x^{(x^x)}$ et $\lim\limits_{x\to 0+} (x^x)^x$.

Ex. 6 — Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} x^{1/x} \quad ; \quad \lim_{x\to 0} x^{\sqrt{x}} \quad ; \quad \lim_{x\to 0+} x^{1/x}$$

Ex. 7 — Résoudre les équations suivantes :
1. $x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}\right)^x$
2. $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{1-x} = \mathrm{e} + 1$
3. $\left(x^2\right)^x = x^{(x^2)}$;
4. $(x^2)^x = x^{(x^2)}$.
5. $2^{2x} - 3^{x-1/2} = 3^{x+1/2} - 2^{2x-1}$

Ex. 8 — Résoudre les systèmes réels suivants :

$$\begin{cases} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y \end{cases} \qquad \begin{cases} 2^{3x+2y} = 5 \\ 4^{2x} = 2^{2y+3} \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{2y} = a \\ 2xy = 1 \end{cases} a$$

Logarithmes

Ex. 9 — Établir, pour tout $x \geqslant 0$, l'encadrement : $x - \dfrac{1}{2}x^2 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

Ex. 10 — 1. Montrer que, pour tout $x > -1$: $\ln(1+x) \leqslant x$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e} \leqslant \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{-n}$.

Ex. 11 — Montrer que pour tout $a, b > 0$, on a

$$\frac{1}{2}(\ln a + \ln b) \leqslant \ln\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Ex. 12 — Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\ln(x+2) + \ln(x-2) = \ln(x^2-4)$$

Ex. 13 — Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\ln\left(\frac{x+3}{4}\right) = \frac{1}{2}(\ln(x) + \ln(3))$$

Ex. 14 — Montrer que pour tout $x \in]0\,;1[$, on a

$$x^x(1-x)^{1-x} \geqslant \frac{1}{2}$$

Trigonométrie

Ex. 15 — Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes d'inconnues x et représenter l'ensemble des solutions sur le cercle trigonométrique :
1. $4\cos^2 x = 1$
2. $4\sin^3 x + 4\sqrt{3}\sin^2 x = 9\sin x$
3. $2\sin^2 x = 3(1+\cos x)$
4. $2\sin^2(3x) + 1 = \cos(3x)$
5. $2\cos^3 x + 7\cos^2 x + 2\cos x - 3 = 0$
6. $\cos(4x) = 6 + 13\cos 2x$
7. $\sin(3x) = \cos x$
8. $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = -\sin(2x)$
9. $\cos x - \sin x = \dfrac{1}{2\cos x}$
10. $\dfrac{1-\cos 4x}{1+\cos 2x} = 3$
11. $\tan^2 x - \sqrt{3} = (\sqrt{3}-1)\tan x$
12. $3\tan^3 x - 3\tan^2 x - \tan x + 1 = 0$

Ex. 16 — Soit x dans $\left[\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right]$ tel que $\sin x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.
Calculer $\cos(4x)$ puis x.

Ex. 17 — 1. Pour x réel distinct de $\pi+2k\pi$ ($k\in\mathbb{Z}$), on pose $t=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$. Montrer que
$\tan x=\dfrac{2t}{1-t^2}$, $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$
et que $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(1-\sqrt{3})\cos x=(1+\sqrt{3})(1-\sin x)$.

Ex. 18 — À l'aide du cercle trigonométrique, résoudre l'inéquation sur l'intervalle I donné :

1. $2\cos x+1\geqslant 0$ sur $I=[-\pi\,;\,\pi]$
2. $2\cos x+1>0$ sur $I=[0\,;\,2\pi]$
3. $4\sin^2 x+8\sin x+3\leqslant 0$ sur $I=[-\pi\,;\,\pi]$
4. $2\sin^2 x+3\sin x+1<0$ sur $I=[-\pi\,;\,2\pi]$
5. $\sqrt{3}\tan x-1\leqslant 0$ sur $I=]-\pi/2\,;\,\pi/2[$
6. $\sqrt{3}\tan x-1\leqslant 0$ sur $I=[-\pi\,;\,\pi]$

Ex. 19 — Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes où x est l'inconnue et α un paramètre réel.

1. $x\sin\alpha+\cos(2\alpha)=1$
2. $2x^2-2(\cos\alpha+\sin\alpha)x+\sin(2\alpha)=0$
3. $(x\sin\alpha\cos\alpha)^2=x-1$
4. $x^2\sin\alpha-x\cos^2\alpha-\sin\alpha=0$

Ex. 20 — Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x)=\dfrac{1+\tan x}{1-2\cos^2 x}$
2. $g(x)=\sqrt{1+2\sin x}$
3. $h(x)=\sqrt{2\cos^2-1}$

Ex. 21 — Résoudre dans $\mathbb{R}$

1. l'équation $\sqrt{1+\dfrac{1}{2}\sin x}=\cos x$;
2. l'inéquation $\sqrt{1+\dfrac{1}{2}\sin x}<\cos x$ (on limitera d'abord l'étude à $]-\pi\,;\,\pi[$;

Calculs généraux

Ex. 22 — Calculer les limites suivantes

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to0+}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2x^2}}$.

Ex. 23 — Déterminer les limites suivantes, en justifiant précisément.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}}{3x^2}$ $\quad\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{3x}+1}{(\ln x)^4}$ $\quad\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{[\ln(x^4)]^3}$
$\lim\limits_{x\to+\infty}x^4e^{-\sqrt{x}}$ $\quad\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\exp(3x^2)}{x^6}$ $\quad\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\ln\sqrt{x}}{x^2}$
2. $\lim\limits_{x\to0^+}\left[3x^2+(\ln x)^2-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right]$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\exp(x^2)-e^{3x}+x^2\right]$
$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{-3x}-\dfrac{1}{x}+x+e^{x^2}\right)$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(x^2+1)-2\ln x\right)$

Ex. 24 — Déterminer l'ensemble de définition, l'ensemble de dérivation et calculer les dérivées des fonctions suivantes.

1. $a\,:\,x\mapsto\ln(1+x^2)$
2. $b\,:\,x\mapsto\dfrac{2^{2x}}{x^2-1}$
3. $c\,:\,x\mapsto\exp(x+1/x)$
4. $d\,:\,x\mapsto\sqrt{x^2+x+1}$