Fonctions usuelles

BCPST 1, 3/2018

Exercice 1

1. Montrer que la composée de deux fonctions monotones de même sens (resp. de sens contraires) est croissante (resp. décroissante).
2. Montrer que la somme de deux fonctions croissantes est croissante.
3. La somme de deux fonctions monotones est-elle nécessairement monotone ?
4. Le produit de deux fonctions croissantes est-il nécessairement une fonction croissante ?

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f \circ f$ est croissante et $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante. Montrer que f est strictement décroissante.

Puissances et exponentielles

Exercice 3

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.
Simplifier a^b pour $a = \exp\left(x^2\right)$ et $b = \dfrac{1}{x}\ln(x^{1/x})$.

Exercice 4

Soit $(a,b,c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$. Parmi les relations suivantes, lesquelles sont exactes ?
$\left(a^b\right)^c = a^{bc}$; $a^b a^c = a^{bc}$; $a^{2b} = \left(a^b\right)^2$; $(ab)^c = a^{c/2}b^{c/2}$; $\left(a^b\right)^c = a^{(b^c)}$; $\left(a^b\right)^c = (a^c)^b$.

Exercice 5

Comparer $\lim\limits_{x\to 0+} x^{(x^x)}$ et $\lim\limits_{x\to 0+} (x^x)^x$.

Exercice 6

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} x^{1/x} \quad ; \quad \lim_{x\to 0} x^{\sqrt{x}} \quad ; \quad \lim_{x\to 0+} x^{1/x}$$

Exercice 7

Résoudre les équations suivantes :
1. $x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}\right)^x$
2. $e^x + e^{1-x} = e + 1$
3. $\left(x^2\right)^x = x^{(x^2)}$;
4. $(x^2)^x = x^{(x^2)}$.
5. $2^{2x} - 3^{x-1/2} = 3^{x+1/2} - 2^{2x-1}$

Exercice 8

Résoudre les systèmes réels suivants :

$$\begin{cases} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y \end{cases} \qquad \begin{cases} 2^{3x+2y} = 5 \\ 4^{2x} = 2^{2y+3} \end{cases} \qquad \begin{cases} e^x e^{2y} = a \\ 2xy = 1 \end{cases} a$$

Logarithmes

Exercice 9

Établir, pour tout $x \geqslant 0$, l'encadrement : $x - \dfrac{1}{2}x^2 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

Exercice 10

1. Montrer que, pour tout $x > -1$: $\ln(1+x) \leqslant x$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \leqslant e \leqslant \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{-n}$.

Exercice 11

Montrer que pour tout $a, b > 0$, on a

$$\frac{1}{2}(\ln a + \ln b) \leqslant \ln\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Exercice 12

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\ln(x+2) + \ln(x-2) = \ln(x^2-4)$$

Exercice 13

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\ln\left(\frac{x+3}{4}\right) = \frac{1}{2}(\ln(x) + \ln(3))$$

Exercice 14

Montrer que pour tout $x \in]0\,;1[$, on a

$$x^x(1-x)^{1-x} \geqslant \frac{1}{2}$$

Trigonométrie

Exercice 15

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes d'inconnues x et représenter l'ensemble des solutions sur le cercle trigonométrique :

1. $4\cos^2 x = 1$
2. $4\sin^3 x + 4\sqrt{3}\sin^2 x = 9\sin x$
3. $2\sin^2 x = 3(1+\cos x)$
4. $2\sin^2(3x) + 1 = \cos(3x)$
5. $2\cos^3 x + 7\cos^2 x + 2\cos x - 3 = 0$
6. $\cos(4x) = 6 + 13\cos 2x$
7. $\sin(3x) = \cos x$
8. $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin(2x)$
9. $\cos x - \sin x = \frac{1}{2\cos x}$
10. $\frac{1-\cos 4x}{1+\cos 2x} = 3$
11. $\tan^2 x - \sqrt{3} = (\sqrt{3}-1)\tan x$
12. $3\tan^3 x - 3\tan^2 x - \tan x + 1 = 0$

Exercice 16

Soit x dans $\left[\frac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right]$ tel que $\sin x = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Calculer $\cos(4x)$ puis x.

Exercice 17

1. Pour x réel distinct de $\pi + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), on pose $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Montrer que
   $\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$
   et que $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(1-\sqrt{3})\cos x = (1+\sqrt{3})(1-\sin x)$.

Exercice 18

À l'aide du cercle trigonométrique, résoudre l'inéquation sur l'intervalle I donné :

1. $2\cos x + 1 \geqslant 0$ sur $I = [-\pi\ ;\ \pi]$
2. $2\cos x + 1 > 0$ sur $I = [0\ ;\ 2\pi]$
3. $4\sin^2 x + 8\sin x + 3 \leqslant 0$ sur $I = [-\pi\ ;\ \pi]$
4. $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 < 0$ sur $I = [-\pi\ ;\ 2\pi]$
5. $\sqrt{3}\tan x - 1 \leqslant 0$ sur $I =]-\pi/2\ ;\ \pi/2[$
6. $\sqrt{3}\tan x - 1 \leqslant 0$ sur $I = [-\pi\ ;\ \pi]$

Exercice 19

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes où x est l'inconnue et α un paramètre réel.

1. $x\sin\alpha + \cos(2\alpha) = 1$
2. $2x^2 - 2(\cos\alpha + \sin\alpha)x + \sin(2\alpha) = 0$
3. $(x\sin\alpha\cos\alpha)^2 = x - 1$
4. $x^2\sin\alpha - x\cos^2\alpha - \sin\alpha = 0$

Exercice 20

Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{1+\tan x}{1-2\cos^2 x}$
2. $g(x) = \sqrt{1+2\sin x}$
3. $h(x) = \sqrt{2\cos^2 - 1}$

Exercice 21

Résoudre dans $\mathbb{R}$

1. l'équation $\sqrt{1+\frac{1}{2}\sin x} = \cos x$;
2. l'inéquation $\sqrt{1+\frac{1}{2}\sin x} < \cos x$ (on limitera d'abord l'étude à $]-\pi\ ;\ \pi[$;

Calculs généraux

Exercice 22

Calculer les limites suivantes

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to0+}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2x^2}}$.

Exercice 23

Déterminer les limites suivantes, en justifiant précisément.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{3x^2}$ $\quad\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{3x}+1}{(\ln x)^4}$
   $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{[\ln(x^4)]^3}$ $\quad\lim\limits_{x\to+\infty}x^4 e^{-\sqrt{x}}$
   $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\exp(3x^2)}{x^6}$ $\quad\lim\limits_{x\to0+}\frac{\ln\sqrt{x}}{x^2}$
2. $\lim\limits_{x\to0^+}\left[3x^2 + (\ln x)^2 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right]$
   $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\exp(x^2) - e^{3x} + x^2\right]$
   $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{-3x} - \frac{1}{x} + x + e^{x^2}\right)$
   $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(x^2+1) - 2\ln x\right)$

Exercice 24

Déterminer l'ensemble de définition, l'ensemble de dérivation et calculer les dérivées des fonctions suivantes.

1. $a \ : \ x \mapsto \ln(1+x^2)$
2. $b \ : \ x \mapsto \dfrac{2^{2x}}{x^2-1}$
3. $c \ : \ x \mapsto \exp(x+1/x)$
4. $d \ : \ x \mapsto \sqrt{x^2+x+1}$