Espaces et sous-espaces

Ex. 1 — Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ (pour les opérations usuelles sur les vecteurs de $\mathbb{K}^n$) ?

1. $E_1 = \mathbb{K} \times \mathbb{K}$;
2. $E_2 = \mathbb{K}^* \times \mathbb{K}^*$;
3. $E_3 = \{0\} \times \mathbb{K}$;
4. $E_4 = \mathbb{K}^2 \setminus \{(0,1)\}$;
5. $E_5 = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.
6. $E_6 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{K}^4,\ 2x+3y-4z=0\right\}$;
7. $E_7 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2+z^2 \leqslant 4\right\}$;
8. $E_8 = \left\{(a,b,a+b) \in \mathbb{K}^3,\ a \in \mathbb{K},\ b \in \mathbb{K}\right\}$;
9. $E_9 = \{(a,b,1),\ \text{ avec } a \in \mathbb{K},\ b \in \mathbb{K}\}$;

Ex. 2 — Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

1. L'ensemble des fonctions positives sur $\mathbb{R}$;
2. l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ qui s'annulent en 1 ;
3. l'ensemble des fonctions deux fois dérivables vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) + xf(x) = 0$;
4. l'ensemble des fonctions croissantes sur $\mathbb{R}$;
5. l'ensemble des fonctions réelles qui tendent vers $+\infty$ en $+\infty$;

★ **Ex. 3** — Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un même $\mathbb{K}$–e.v. E. Montrer que $F \cup G$ est un espace vectoriel si et seulement si on a : $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Ex. 4 — Les s.–e.v. de $\mathbb{K}^n$ peuvent être définis de 3 façons différentes :

— Par des équations cartésiennes :

$$A = \Big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{K}^4 \text{ tel que } x-y+z=0 \text{ et } y-2t=0\Big\}$$

— Par un paramétrage :

$$B = \Big\{(2a-3b+c, a+2b-c, -b+c, a) \text{ avec } (a,b,c) \in \mathbb{K}^3\Big\}$$

— Par la donnée d'une famille génératrice (qui peut-être une base ou non) :

$$C = \mathrm{Vect}\big((1,2,-1,0),(0,2,2,1)\big)$$

1. Écrire chacun de ces ensembles sous les trois formes possibles.
2. Procéder de même avec $A \cap B$, $A \cap C$ et $A \cap B \cap C$.

Familles de vecteurs

Ex. 5 — Vrai ou faux ?

1. Une famille de vecteurs est libre ssi ses vecteurs ne sont pas colinéaires deux à deux.
2. Une famille est liée ssi chacun de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.
3. Une famille génératrice finie ne peut pas avoir moins de vecteurs qu'une famille libre.
4. Dans un e.v. de dimension n, toute famille de plus de n vecteurs est liée.
5. Dans un e.v. de dimension n, toute famille de moins de n vecteurs est libre.
6. Dans un e.v. de dimension n, toute famille de n vecteurs est une base.

Ex. 6 — Dans $\mathbb{K}^3$, on définit les vecteurs $v_1 = (2,3,-1)$, $v_2 = (1,-1,-2)$, $w_1 = (3,7,0)$ et $w_2 = (5,0,-7)$.
Montrer que $\mathrm{Vect}(v_1,v_2) = \mathrm{Vect}(w_1,w_2)$.

Ex. 7 — Les familles suivantes de $\mathbb{K}^3$ sont-elles libres ou liées ?

1. $u_1 = (1,1,0)$, $u_2 = (0,1,1)$
2. $u_1 = (0,0,1)$, $u_2 = (0,1,1)$, $u_3 = (1,1,1)$
3. $u_1 = (1,-1,0)$, $u_2 = (0,1,-1)$, $u_3 = (1,-1,0)$
4. $u_1 = (1,1,-1)$, $u_2 = (1,-1,1)$, $u_3 = (-1,1,1)$, $u_4 = (4,3,-1)$
5. $u_1 = (1,0,-2)$, $u_2 = (2,3,1)$, $u_3 = (4,-2,1)$

Ex. 8 — Dans $\mathbb{R}^4$, on pose $x_1 = (2,1,-1,1)$, $x_2 = (1,3,1,1)$, $x_3 = (-1,2,-1,-1)$ et $x_4 = (1,-2,4,2)$.
La famille (x_1,x_2,x_3,x_4) est-elle libre ?

Ex. 9 — On pose $e_1 = (1,-1,2)$ et $e_2 = (1,1,-1)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de $F = \mathrm{Vect}(e_1,e_2)$.
2. Parmi les vecteurs suivants, lesquels sont dans F ?

   $a = (3,1,0)$ $b = (4,1,0)$ $c = (10,-4,11)$ $d = (-1,-3,4)$

3. Expliciter les décompositions des vecteurs qui sont dans F.

Ex. 10 — Soit E un $\mathbb{K}$–e.v. de dimension finie n et $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille libre de E. La famille $(e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n, e_n - e_1)$ est-elle libre dans E ?

Ex. 11 — Soit $\left(e_1, \dots, e_p\right)$ une famille libre d'un $\mathbb{K}$–e.v. E. On pose $u_i = e_1 + \dots + e_i$ pour tout entier i entre 1 et p. La famille $\left(u_1, \dots, u_p\right)$ est-elle libre?

Ex. 12 — Dans $\mathbb{C}^4$ on pose $x_1 = (2, -1, 1, 2)$, $x_2 = (1, -1, 2, 4)$, $x_3 = (3, -2, 1, 1)$ et $u = (4, -3, -1, -5)$. Le vecteur u est-il combinaison linéaire de (x_1, x_2, x_3) ?

Ex. 13 — Soit E un $\mathbb{K}$–e.v. de dimension 3, dont (e_1, e_2, e_3) est une base. On pose

$$x_1 = 2e_1 + e_2 + 4e_3 \qquad x_2 = -e_1 - e_2 - 3e_3$$
$$x_3 = e_1 + 2e_2 + 5e_3 \qquad u = 4e_1 + 5e_2 + \lambda e_3$$

À quelle condition sur le scalaire λ u est-il dans $\mathrm{Vect}(x_1, x_2, x_3)$? Lorsque cette condition est vérifiée, y-a-t'il unicité de la décomposition de u sur (x_1, x_2, x_3) ?

Ex. 14 — Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3) on pose $u_1 = (1, a, 2a)$, $u_2 = (a, -a, -4)$ et $u_3 = (2a, 1, a)$. Pour quelles valeurs de a la famille (u_1, u_2, u_3) est-elle une base de $\mathbb{R}^3$? Pour ces valeurs de a, donner les coordonnées de $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ dans cette base.

Ex. 15 — Dans $\mathbb{C}^2$ on pose $v_1 = (1 + i, 1 - i)$ et $v_2 = (2i, 3)$. Montrer que (v_1, v_2) est une base de $\mathbb{C}^2$ et donner les coordonnées de $x = x_1e_1 + x_2e_2$ dans cette base.

Familles de fonctions

Ex. 16 — On considère l'espace vectoriel E des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Soit $\mathscr{F} = (x \mapsto 1, x \mapsto x, x \mapsto x^2, \dots, x \mapsto x^n)$.

1. Montrer que $\mathscr{F}$ est une famille libre.
   Indication : *On peut par exemple raisonner par récurrence sur n.*
2. En déduire que « deux polynômes sont égaux ssi leurs coefficients sont égaux ».
3. Justifier que E n'est pas un espace vectoriel de dimension finie.

Ex. 17 — On se place dans l'espace vectoriel E des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $(x \mapsto \cos x, x \mapsto \sin x)$ est une famille libre.
2. Déterminer deux réels a et b tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad a\cos x + b\sin x = \cos^2(x/2)$$

Ex. 18 — On considère l'espace vectoriel E des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $(x \mapsto \exp(x), x \mapsto \exp(-x))$ est une famille libre ;
2. Montrer que $(x \mapsto \cosh(x), x \mapsto \sinh(-x))$ est une famille libre.

Ex. 19 — Soient f_1, f_2, f_3, f_4 et f_5 les cinq fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f_1(x) = |x|$, $f_2(x) = 2|x|$, $f_3(x) = |x| + 1$, $f_4(x) = |x| + 2$ et $f_5(x) = x$. Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. (f_1, f_2) ;
2. (f_1, f_3) ;
3. (f_1, f_5) ;
4. (f_1, f_2, f_3) ;
5. (f_1, f_3, f_4).

Ex. 20 — Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $\mathscr{F} = ((1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 4), (1, 2, 3))$ dans $\mathbb{K}^3$.
2. $\mathscr{F} = (u, v, w)$ où les trois suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont définies par :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 1, \quad v_n = \cos^2(n), \quad w_n = \cos(n)$$

3. la famille $\mathscr{F}$ composée des trois fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: $u \ : \ x \mapsto \sin(x)$, $v \ : \ x \mapsto \cos(x)$ et $w \ : \ x \mapsto \sin(2x)$.
4. Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ des nombres réels deux à deux distincts rangés par ordre croissant. On note f_k l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_k(x) = \mathrm{e}^{a_k x}$. La famille $\mathscr{F}$ considérée est : $(f_k)_{k\in[\![0\,;\,k]\!]}$.

Ex. 21 — Dans $\mathbb{R}_3[X]$, on considère les fonctions polynômes définies sur $\mathbb{R}$ par $P(X) = 1 + 2X + 3X^2 - 2X^3$, $Q(X) = 3 + 7X + 8X^2 - 8X^3$, $R(X) = 2 + 3X + 7X^2 - 2X^3$, $S(X) = 1 + 11X^2 + 6X^3$ et $T(X) = -2 - 5X + 13X^2 + 18X^3$.

1. La famille de polynôme (P, Q, R, S) est-elle libre ?
2. Le polynôme T se décompose-t-il suivant (P, Q, R, S)? Si oui, la décomposition est-elle unique ?

Bases

Ex. 22 — Dans $\mathbb{K}^3$, on définit les vecteurs $v_1 = (1,1,-1)$, $v_2 = (1,0,1)$ et $v_3 = (1,1,0)$.

1. Montrer que ces vecteurs forment une base de $\mathbb{K}^3$.
2. Exprimer le vecteur $w = (1,2,1)$ dans cette base.

Ex. 23 — Déterminer une base de chacun des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^3$ définis par :

1. $E = \mathrm{Vect}\big((1,1,-2),(2,1,-3),(0,1,-1)\big)$
2. $F = \mathrm{Vect}\big((4,-5,3),(2,3,-2),(4,-16,10),(8,1,-1)\big)$

Ex. 24 — Soit $E = \big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{K}^4 / x-y+z-t=0\big\}$ et $F = \big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{K}^4 / x=y\big\}$.

1. Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^4$.
2. Déterminer une base de E, de F, puis de $E \cap F$.

Ex. 25 — Soit E un espace vectoriel de dimension 4, et (e_1,e_2,e_3,e_4) une base de E. On pose

$$F = \big\{u = xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4 \in E, x-2y=0\big\}$$
$$G = \big\{u = xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4 \in E, y+2z+3t=0\big\}$$

Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E. En donner une base et la dimension. Étudier $F \cap G$.

Ex. 26 — On considère les sous-ensembles de $\mathbb{K}^5$:
$F = \big\{(x,y,z,t,u) \in \mathbb{K}^5 | x+y+z=0 \text{ et } x+u-t=0\big\}$
et $G = \big\{(x,y,z,t,u) \in \mathbb{K}^5 | x+y-z+t=0\big\}$.
Montrer que F et G sont des s.–e.v. de $\mathbb{K}^5$. En donner une base et la dimension. Étudier $F \cap G$.

Ex. 27 — Dans $\mathbb{K}^4$, montrer que l'ensemble E des $u = (x,y,z,t)$ tels que $x+3y-2z-5t=0$ et $x+2y+z-t=0$ est un sous-espace vectoriel. En donner la dimension et une base.

Ex. 28 — Compléter en une base de $\mathbb{K}^4$ la famille $u_1 = (1,1,1,1)$, $u_2 = (1,1,-1,-1)$.

Ex. 29 — Soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, (a,b,c) \in \mathbb{K}^3 \right\}$.
Montrer que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et déterminer une base de E.

Ex. 30 —

1. Démontrer que l'ensemble des matrices diagonales d'ordre n est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et en donner une base et la dimension.
2. Reprendre la question précédente avec les matrices triangulaires supérieures.
3. ★ Reprendre la question précédente avec les matrices symétriques.
4. ★ Reprendre la question précédente avec les matrices antisymétriques.

Ex. 31 — Soit E un $\mathbb{K}$–e.v. de dimension 3, (e_1,e_2,e_3) une base de E. On pose $a = -e_1+e_2+e_3$, $b = e_1-e_2+e_3$, $c = e_1+e_2-e_3$ et $u = 2e_1-3e_2+e_3$. Montrer que (a,b,c) est une base de E. Donner les coordonnées de u dans cette base.

Ex. 32 — On considère les vecteurs de $\mathbb{K}^4$ suivants

$x = (1,-1,1,1)$ $\quad y = (0,1,1,-1)$
$u = (1,0,1,0)$ $\quad v = (1,-2,-1,2)$ $\quad w = (2,-1,1,1)$
$k = (1,1,2,-1)$ $\quad l = (1,1,0,0)$ $\quad m = (0,0,1,1)$

1. Montrer que $\mathscr{L} = (x,y)$ est libre et que $\mathscr{G} = (u,v,w,k,l,m)$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}^4$.
2. Compléter $\mathscr{L}$ en une base de $\mathbb{K}^4$ en puisant dans $\mathscr{G}$.

Ex. 33 — Soit E l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles qu'il existe $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = a\sin x + b\cos x + c\sin 2x + d\cos 2x$$

On note $f_0(x) = \sin x$, $f_1(x) = \cos x$, $f_2(x) = \sin 2x$ et $f_3(x) = \cos 2x$.

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel dont (f_0,f_1,f_2,f_3) est une base.
2. Pour chacun des 3 ensembles suivants, montrer que c'est un s.–e.v. de E et en donner la dimension et une base :
   a) $F_1 = \{f \in E / f' = -f\}$;
   b) $F_2 = \{f \in E / \forall x \in \mathbb{R},\ f(\pi - x) = f(x)\}$;
   c) $F_3 = \{f \in E / \forall x \in \mathbb{R},\ f(\pi/2 - x) = f(x)\}$.

Ex. 34 — Vérifier que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels et en trouver une base.

1. $E = \{(x+y, x, y, 2x-3y) \text{ tel que } x,y \in \mathbb{R}\}$;
2. $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \text{ tel que } P(1) = 0\}$;
3. $E = \big\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 / 2a-5b=0, b+4c=0\big\}$;
4. $E = \mathrm{Vect}(f_1,f_2,f_3)$ avec pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) = x+1$, $f_2(x) = x-1$, $f_3(x) = 2-x$;
5. $F = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } 5x+2y-3z=0\big\}$;
6. $F = \big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que } x+y+3z+t=0,.\ 2x+y+4z+t=0, x=-z\big\}$

Ex. 35 — Soit E un $\mathbb{R}$–espace vectoriel de dimension 4 et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base de ses bases. On pose $u_1 = -e_3 + 2e_4$ et $u_2 = e_3 + e_2$.

1. Montrer que l'ensemble des combinaisons linéaires de u_1 et u_2 est un s.–e.v. de E et en donner une base.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les coordonnées de u élément de $\mathbb{R}^4$ pour que u soit dans cet ensemble.

Ex. 36 — Montrer que l'ensemble $\{x \mapsto ax + b\ln x + c\exp(3x) \text{ avec } (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$ est un s.–e.v. de l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ et en donner une base.

Ex. 37 — Soit $E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{K}^4 / x + y + z + t = 0\}$ et $F = \{(\lambda,\lambda,\lambda,\lambda)\lambda \in \mathbb{K}\}$.

1. Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^4$. Donner une base de chacun d'entre eux. Déterminer la dimension de E et F.
2. Démontrer qu'en réunissant les deux bases de E et F déterminées précedemment, on obtient une base de $\mathbb{K}^4$.
3. Démontrer que tout vecteur de $\mathbb{K}^4$ peut s'écrire de façon unique comme somme d'un vecteur de E et d'un vecteur de F.

Rang d'une famille de vecteurs

Ex. 38 — Calculer le rang des familles de vecteurs suivantes :

1. dans $\mathbb{K}^3$: (u,v,w) avec $u = (1,1,4)$, $v = (2,-2,8)$ et $w = (1,-3,4)$;
2. dans $\mathbb{K}^4$: (x,y,z,t) avec $x = (1,-4,0,3)$, $y = (-2,8,0,-6)$, $z = (-1,4,0,-3)$ et $t = (3,-12,0,9)$;
3. dans $\mathbb{K}^3$: (a,b,c) avec $a = (1/2, 2/3, 4/3)$, $b = (1/2, -2/3, 8/3)$ et $c = (1/2, 1/3, 5/3)$;
4. dans $\mathbb{K}_2[X]$: (P_1,P_2,P_3) avec $P_1 = (X+1)^2$, $P_2 = X^2 + 1$ et $P_3 = X^2 + X + 16$.

Ex. 39 — Déterminer le rang de la famille de vecteurs $\mathscr{F}$, pour l'espace vectoriel E :

1. $E = C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\mathscr{F} = (x \mapsto \cos x, x \mapsto \sin x, x \mapsto \cos(x + \pi/3), x \mapsto \sin(x - \pi/4))$;
2. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\mathscr{F} = (u = (2^n)_{n\in\mathbb{N}}, v = (3^n)_{n\in\mathbb{N}}, w = (2^{n+4})_{n\in\mathbb{N}})$;
3. $E = \mathbb{K}^4$ et $\mathscr{F} = (a = (0,0,1,1), b = (0,1,-7,-1), c = (18,0,\pi,3))$;
4. $E = \mathbb{K}^4$ et $\mathscr{F} = (a = (1,1,1,1), b = (0,1,2,-1), c = (1,0,-2,3), d = (2,1,0,-1))$;
5. $E = \mathbb{K}^4$ et $\mathscr{F} = (a = (1,0,1,0), b = (2,1,0,1), c = (0,2,-1,1), d = (3,-1,2,0))$;
6. $E = \mathbb{K}^4$ et $\mathscr{F} = (a = (1,0,2,3), b = (7,4,-2,1-1), c = (5,2,4,7), d = (3,2,0,1))$.

Ex. 40 — Rang de la famille (u_1,u_2,u_3,u_4) avec $u_1 = (\lambda,1,1,1)$, $u_2 = (1,\lambda,1,1)$, $u_3 = (1,1,\lambda,1)$, $u_4 = (1,1,1,\lambda)$. Discuter suivant les valeurs de $\lambda \in \mathbb{K}$.

Ex. 41 — Donner le rang des matrices suivantes. Lorsque c'est possible, les inverser :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ b & 1 & a \\ a & b & 1 \end{pmatrix}$$

Ex. 42 —

1. Soient a, b et c trois éléments de $\mathbb{K}$. Montrer que la famille $((1,a,a^2),(1,b,b^2),(1,c,c^2))$ est libre dans $\mathbb{K}^3$ ssi a, b et c sont deux à deux distincts.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $((1,1,1),(a,b,c),(a^2,b^2,c^2))$ soit libre dans $\mathbb{K}^3$.

Sujets divers

Ex. 43 — **Équation cartésienne**

Soit $E = \mathbb{R}^n$ et $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ un élément de E.

1. Montrer que $H_a = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n \in E \text{ tel que } a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n =$ est un hyperplan de E. Donne une interprétation simple de H quand $n = 1,2,3$.
2. Soit $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ un élément de E et soit $H_b = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n \in E \text{ tel que } b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b$ Montrer que si (a,b) est libre alors $H_a \cap H_b$ est un s.–e.v. de E de dimension $n-2$, et que sinon $H_a = H_b$.
3. Soit $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ une famille de p vecteurs de E. Montrer par récurrence sur p que $H_{a_1} \cap H_{a_2} \cap \dots \cap H_{a_p}$ est un s.–e.v. de E de dimension $p - r$ où r est le rang de $(a_1, a_2, \dots, a_p)$.

Ex. 44 — 1. Déterminer des équations cartésiennes du sous-espace de $\mathbb{K}^5$ dont une base est $\mathscr{B} = ((1,2,3,4,5),(6,7,0,9,10))$.

2. Déterminer une base du sous-espace vectoriel dont des équations cartésiennes sont $\begin{cases} x+2y+3z+4t+5u=0 \\ x+y=z+t=u \end{cases}$.

Ex. 45 — Soient $e_1(0,1,-2,1)$, $e_2(1,0,2,-1)$, $e_3(3,2,2,-1)$, $e_4(0,0,1,0)$ et $e_5(0,0,0,1)$ des vecteurs de $\mathbb{K}^4$.

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier votre réponse.

1. $\mathrm{Vect}(e_1,e_2,e_3) = \mathrm{Vect}\big((1,1,0,0),(-1,1,-4,2)\big)$.
2. $(1,1,0,0) \in \mathrm{Vect}(e_1,e_2) \cap \mathrm{Vect}\big(e_2,e_3,e_4\big)$.
3. $\dim(\mathrm{Vect}(e_1,e_2) \cap \mathrm{Vect}\big(e_2,e_3,e_4\big)) = 1$.

Ex. 46 — Soit E un $\mathbb{K}$–e.v. tel que E contient au moins un vecteur non nul, noté v.

1. Montrer que les éléments de $A = \{nv, n \in \mathbb{N}\}$ sont deux à deux distincts.
2. En déduire que l'ensemble E est infini. Existe-t-il des $\mathbb{K}$–e.v. qui soient aussi des ensembles finis ?

Ex. 47 — On note E l'ensemble des suites réelles périodiques de période 2.

1. Montrer que E est un s.–e.v. de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. En donner une base.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = (-1)^n$ et $b_n = \dfrac{n}{2} - E\left(\dfrac{n}{2}\right) + 1$.
Montrer que (a,b) est une base de E. Donner les coordonnées dans cette base d'une suite u de E en fonction de u_0 et u_1.

Ex. 48 — Dans cet exercice, $+$ désigne l'addition usuelle sur $\mathbb{C}$, $*$ est l'application

$$* : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{C}^3 & \longrightarrow & \mathbb{C}^3 \\ (\lambda,(z_1,z_2,z_3)) & \longmapsto & (\lambda z_1,\lambda z_2,\lambda z_3) \end{array} \right.$$

1. Montrer que $\big(\mathbb{C}^3,+,*\big)$ est un $\mathbb{R}$–e.v..
2. On pose $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,1,0)$, $v_3 = (0,0,1)$, $v_4 = (i,0,0)$, $v_5 = (0,i,0)$, $v_6 = (0,0,i)$. Montrer que a famille $(v_1, v_2, \ldots, v_6)$ est génératrice de cet e.v.

Ex. 49 — 1. Soit $\omega \in \mathbb{R}_+$, et $F_\omega = \big\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \omega^2 u_n\big\}$.
Montrer que F_ω est un s.–e.v. de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et que F_ω possède une base formée de deux suites géométriques, quelles sont les coordonnées d'une suite de F_ω dans cette base ?

2. On reprend la question précédente avec $G_\omega = \big\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = -\omega^2 u_n\big\}$.
   a) Montrer que les suites complexes $(i\omega^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(-i\omega^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient la même relation de récurrence que les suites de G_ω.
   b) En déduire que $(\cos(n\omega))_{n\in\mathbb{N}} \in G_\omega$ et que $(\sin(n\omega))_{n\in\mathbb{N}} \in G_\omega$. En déduire une base de G_ω.

Ex. 50 — Soit E l'ensemble des fonctions φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ trois fois dérivables vérifiant

$$\varphi''' - \varphi'' - \varphi' + \varphi = 0$$

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$–e.v..
2. Soit u, v, w les fonctions définies par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $u(x) = \mathrm{e}^x$, $v(x) = \mathrm{e}^{-x}$, $w(x) = x\mathrm{e}^x$.
Montrer que la famille $\mathscr{F} = (u,v,w)$ est une famille libre de E.
3. a) Montrer que si φ est un élément de E alors la fonction $\psi = \varphi' - \varphi$ est solution de $(\mathscr{E}') : \psi'' - \psi = 0$.
   b) Soit ψ une solution de $(\mathscr{E}')$. Montrer que la fonction $x \mapsto \big(\psi'(x)\big)^2 - \big(\psi(x)\big)^2$ est constante.
   c) Soit ψ une solution de $(\mathscr{E}')$ telle que $\psi(0) = \psi'(0) = 0$. Montrer que ψ est la fonction nulle.
   d) En déduire que si φ est un élément de E vérifiant $\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = 0$ alors la fonction φ est nulle.
4. a) Soit $\varphi \in E$. Trouver trois réels α, β et γ telle que la fonction $f = \alpha u + \beta v + \gamma w$ vérifie $f(0) = \varphi(0), f'(0) = \varphi'(0), f''(0) = \varphi''(0)$.
   b) Montrer finalement que $\mathscr{F} = (u,v,w)$ est une base de E.

Ex. 51 — Soit $E = \mathbb{K}^3$ et t un paramètre scalaire quelconque.

1. Soit F_t le sous-ensemble de E constitué des vecteurs $(x,y,z) \in E$ vérifiant

$$\begin{cases} (2-t)x + 2y - 2z = 0 \\ x + (1+t)y - z = 0 \end{cases}.$$

   a) Montrer que F_t est un sous-espace vectoriel de E.

b) Déterminer la dimension et un base de F_t. On discutera suivant les valeurs de t.

c) Montrer en particulier que si $t \neq 0$ alors $F_t = \mathrm{Vect}((-2, 1, t-1))$.

2. Soit $H_t = \mathrm{Vect}((t, 0, 1), (0, 1-t, 1))$.
   a) Quelle est la dimension de H_t ?
   b) Donner un supplémentaire de H_t dans E.
3. Déterminer la dimension de $F_t \cap H_t$ en fonction de t. Pour quelles valeurs de t H_t et F_t sont–ils supplémentaires ?

Ex. 52 — Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n \quad v_n = 3^n \quad w_n = 4^n$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Ex. 53 — On définit les fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 pour tout réel strictement positif x par :

$$f_1(x) = \ln x \quad f_2(x) = x \quad f_3(x) = \mathrm{e}^x \quad f_4(x) = \mathrm{e}^{x+3}.$$

1. La famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est-elle libre ?
2. Déterminer une base de $\mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4)$.