Pratique : premier ordre

Ex. 1 — Intégrer les équations différentielles avec second membre suivantes :

1. $y'+y=1$;
2. $y'+y=\exp(mx)$ (avec $m\in\mathbb{R}$) ;
3. $y'+y=\cos(nx)$ (avec $n\in\mathbb{N}^*$) ;
4. $y'+y=\cos^2 x$.

Ex. 2 — Exemple de raccord

1. Résoudre l'équation différentielle suivante sur $]0\,;1[$, puis sur $]1\,;+\infty[$:
$$(x\ln x)y'-y=0$$
2. Préciser les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Soit $x_0\in\mathbb{R}_+^*$ et $y_0\in\mathbb{R}$. Discuter les solutions du problème de Cauchy :
$$(x\ln x)y'-y=0 \qquad \text{et} \qquad y(x_0)=y_0$$
Que pouvez-vous dire de la condition initiale $y(1)=0$?

Ex. 3 — Intégrer les équations différentielles

1. $y'+\cos(x)y=0$;
2. $y'+\dfrac{1}{x\ln x}y=0$;
3. $y'+\cos^3(x)y=0$.

Ex. 4 — Intégrer les équations différentielles

1. $y'+y=\cos x+\sin x$;
2. $y'+2y=\cos x$;
3. $y'+xy=x+1$;
4. $xy'+(x-2)y=(x-2)$;
5. $y'+y=\sin x$;
6. $y'-e^x y=e^{e^x}$;
7. $y'+\dfrac{2y}{x^2+1}=\exp(-2\operatorname{Arctan}(x))$.

Ex. 5 — Résoudre les problèmes de Cauchy

1. $y'-y\tan x=0$ avec $y(0)=1$, sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$;
2. $y'-1/(x\ln x)y=0$ avec $y(e)=1$, , sur $]0\,;1[$;
3. $y'+xy=2x$ avec $y(0)=1$ sur $\mathbb{R}$.

Ex. 6 — Déterminer la solution générale des équations différentielles suivantes :

1. $y'-y=e^{2t}$;
2. $y'-y=e^t$;
3. $y'-y=te^t$.
4. $y'+2y=1$ sous la condition initiale $y(0)=y_0$, $y_0\in\mathbb{R}$ donné.
5. $y'+y=3\sin t$ avec la même condition initiale.

Ex. 7 — Résoudre les équations différentielles avec les conditions initiales $y(0)=y_0$, $y'(0)=y_0'$, $(y_0,y_0')\in\mathbb{R}^2$ donné.

1. $y'-4y'+3y=2e^t$
2. $y''+6y'+13y=169t$.

Ex. 8 — En utilisant la méthode de variation de la constante, déterminer la solution générale des équations différentielles suivantes :

1. $\left(1+x^2\right)y'-2xy=\left(1+x^2\right)^2$
2. $xy'+y=e^x$
3. $y'+\dfrac{1-2x}{x^2}y=1$.

Ex. 9 — Intégrer les équations différentielles, sous la condition initiale $y(x_0)=y_0$, $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ donnés.

1. $y'+2xy=xe^{-x^2}$;
2. $(1+x^2)y'+xy=x$.

Ex. 10 — On considère l'équation différentielle suivante : (E) : $x^2y'-y=x^2-x+1$.

1. Montrer que (E) admet comme solution particulière une fonction polynomiale.
2. Résoudre (E) pour $x>0$.

Ex. 11 — Solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y'-y=x^2\left(e^x+e^{-x}\right)$

Pratique : second ordre

Ex. 12 —

1. Calculer les fonctions y_1 et y_2 déterminées par
$$\begin{cases} y_1''-3y_1'+2y_1=0 \\ \qquad\qquad \text{avec } y_1(0)=1 \text{ et } y_1'(0)=2, \\ y_2''-3y_2'+2y_2=0 \\ \qquad\qquad \text{avec } y_2(0)=1 \text{ et } y_2'(0)=1. \end{cases}$$
2. Démontrer que (y_1,y_2) forme une base de l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y''-3y'+2y=0$.
3. Ce résultat est-il encore valable si on prend comme conditions initiales
$$y_1(0)=1,\ \ y_1'(0)=0,\ \ \text{et}\ \ y_2(0)=0,\ \ y_2'(0)=1\ \ ?$$
Et avec les conditions
$$y_1(0)=1,\ \ y_1(1)=e,\ \ \text{et}\ \ y_2(0)=1,\ \ y_2(1)=e^2\ \ ?$$

Ex. 13 — Intégrer les équations différentielles

1. $y''-3y'+2y=x^2+x+1$;
2. $y''-y'=x^2$;
3. $y''=4x^3-3x^2+2x+1$;
4. $y''-2y'+y=x^2$.
5. $y''+4y'+4y=-e^x$;
6. $y''+4y'+4y=e^{-2x}$.
7. $y''-my'+y=0$ pour $m\in\mathbb{R}$;
8. $y''-(a+\overline{a})y'+|a|^2y=0$ pour $a\in\mathbb{C}$.

Ex. 14 — Résoudre les problèmes de Cauchy

1. $y''-4y'+5y=e^x$ avec $y(0)=1$ et $y'(0)=0$;
2. $y''-4y'+5y=e^{2x}$ avec $y(0)=0$ et $y'(0)=1$.

Ex. 15 — On considère un paramètre réel m. Résoudre l'équation différentielle suivante, en discutant selon les valeurs de m :

$$y''-(m+1)y'+my=e^x-x-1.$$

Ex. 16 — Déterminer la solution générale des équations différentielles suivantes ($\omega>0$)

1. $y''+y'-2y=e^{-t}$;
2. $y''+\omega^2y=-2$;
3. $4y''+4y'+y=\cos 2t$.

Ex. 17 — Déterminer la solution générale des équations différentielles

1. $y''-2y'+y=t^2+e^{2t}$;
2. $y''-2y'+2y=25\,te^{-t}+4$.

Ex. 18 — Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y''+6y'+9y=x^2+e^{-x}\cos x+e^{-3x}$.

Ex. 19 — Intégrer les équations différentielles

1. $y''+y'-6y=xe^x$;
2. $y''+y'-6y=(2x+1)e^{2x}$;
3. $y''-4y'+4y=(x+3)e^{-x}$;
4. $y''-4y'+4y=(2x+1)e^{2x}$.

Ex. 20 — Intégrer les équations différentielles

1. $y''-3y'+2y=\cos x$;
2. $y''-4y'+y=e^x\cos x$;
3. $y''-2y'+2y=2e^x\sin x$;
4. $y''+3y=\cos^3 x$.

Usage de la Force

Ex. 21 — Trouver toutes les applications f définies et continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que
$\forall x\in\mathbb{R},\ \ 2xf(x)=3\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$

Ex. 22 — On considère un paramètre réel m. Résoudre l'équation différentielle suivante, en discutant selon les valeurs de m :

$$y''-(m+1)y'+my=e^x-x-1.$$

Ex. 23 — Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y''+6y'+9y=x^2+e^{-x}\cos x+e^{-3x}$.

Ex. 24 — Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x'(t)+y(t)=e^t \\ x(t)-y'(t)=e^{-t}\end{cases}$$

★ **Ex. 25** — On cherche à résoudre l'é.d. $(1+x)y''-2y'+(1-x)y=xe^{-x}$.

1. Vérifier que la fonction exponentielle est solution de l'équation homogène associée, puis la résoudre en utilisant la méthode de la variation de la constante.
2. Chercher une solution particulière de l'équation par la méthode habituelle.

Ex. 26 — Trouver toutes les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient la relation :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f'(x)=f(-x)$$

Ex. 27 — Soit $a>0$. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle : $y'=\dfrac{y}{x}+x^a$.
Étudier la limite en 0 des solutions.

Ex. 28 — Trouver les fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions : $f(0)=0$ et

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f'(x)-f(x)=|x|$$

Ex. 29 — On considère l'équation différentielle

$$xy'+2y=\frac{x}{1+x^2}$$

Solutions sur $\mathbb{R}_+^*$? Sur $\mathbb{R}_-^*$? Sur $\mathbb{R}$?

Changement de variables

Ex. 30 — Résoudre l'équation différentielle $x^2y''+3xy'+y=0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, en posant $x=\mathrm{e}^t$ et en cherchant une équation différentielle vérifiée par $z(t)=y(\mathrm{e}^t)$.

Ex. 31 — Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle : $x^2y''+y=0$. On pourra utiliser la méthode de l'exercice **??**.
En déduire l'ensemble des fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que : $\forall x>0,\ \ f'(x)=f(1/x)$.

Ex. 32 — Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle : $x^2y''+4xy'+(2-x^2)y=1$ en posant $z=x^2y$.

Ex. 33 — Résoudre l'équation différentielle $y'y=1$.

Ex. 34 — Résoudre l'équation différentielle $y^{(4)}-2y''+y=0$. On pourra poser $z=y''-y$.

★ **Ex. 35** — Soit $(\lambda,k)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$. Trouver toutes les fonctions f dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f'(x)=kf(\lambda-x)\qquad\text{et}\qquad f(0)=0$$

Ex. 36 — Soit m un réel. On considère l'équation différentielle $(E) : mxy'-y=y^2-x^2$

1. Donner une condition sur m pour qu'il existe un solution polynomiale, notée y_0.
2. On suppose ici $m=1$. On cherche les solutions de (E) de la forme $y=y_0+\dfrac{1}{z}$. Déterminer une équation différentielle (E') simple vérifiée par z.
3. Résoudre (E'), en déduire les solutions de (E).

Quelques applications

Ex. 37 — Datation au carbone 14 Un organisme vivant contient du carbone 12, du carbone 13 et du carbone 14 dans les mêmes proportions que dans le dioxyde de carbone atmosphérique. Après la mort de l'organisme, les quantités de carbone 12 et 13 restent fixes, tandis que le carbone 14 subit une désintégration radioactive dite β (un atome de carbone 14 donne un atome d'azote (14) plus un électron). Le nombre de désintégrations par unité de temps est proportionnel à la quantité d'atomes de carbone 14 présents.

1. Déterminer la loi de la quantité de carbone 14 en fonction du temps à partir de la mort de l'organisme (en fonction de la quantité initiale et d'une constante).
2. Un bois fossile trouvé en Ouzbékistan subit 305 désintégrations en 12 heures, tandis qu'un fossile actuel de même poids en subit 19520 en 12 heures. Sachant que la période de demi-vie (temps pendant lequel la moitié du carbone 14 se désintègre) est de 5730 ans, déterminer l'âge du fossile.

Exercices de concours

Ex. 38 — *(INA 06)* 1. Résoudre $y''-y'-2y=-\mathrm{e}^{-x}$.

2. Chercher les solutions f de cette équation telles que $x\mapsto f(|x|)$ soit une densité de probabilité.
3. Chercher les solutions g de cette équation telles que $n\mapsto g(n)$ soit la loi de probabilité d'une variable aléatoire.

Ex. 39 — *(INA 06)* Pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$, on considère l'équation différentielle (E_α) : $y''-2y'+2y=\alpha\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}$.

1. a) Pour quelle(s)valeur(s) de α, l'ensemble $(\mathscr{E}_\alpha)$ des solutions de (E_α) est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ? En donner alors une base.
   b) Pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$, déterminer la solution générale de l'équation différentielle (E_α).
2. On lance trois fois un dé non pipé, dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On appelle a, b, c les résultats du premier, second et troisième jet du dé. Quelle est la probabilité pour que la solution générale de l'équation différentielle $ay''-by'+cy$ soit dans $\mathscr{E}_0$?

Ex. 40 — *(INA 01)* E désigne l'ensemble des applications de classe C^0 sur $\mathbb{R}$.

1. Soit f un élément de E. Montrer qu'il existe une unique application y telle que :
   $$\forall x\in\mathbb{R},\ \ y'(x)+y(x)=f(x)\qquad\text{et}\qquad y(0)=0.$$
   Cela permet de définir une application $u : E\longrightarrow E$ en posant $u(f)=y$.
2. a) Montrer que u est un endomorphisme injectif de E.
   Indication : *On pourra, par exemple, exprimer $u(f)$ à l'aide d'une intégrale où intervient f.*
   b) Déterminer les éléments propres de u.

Ex. 41 — *(INA 04)* 1. Résoudre l'équation différentielle

$$y'' - y' + y = 0. \qquad (E_1)$$

2. On veut déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^{*+} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x \in]0\,;\,+\infty[\,,\ f\left(\frac{1}{x}\right) = f'(x). \qquad (E_2)$$

   a) On pose $g(t) = f(\mathrm{e}^t)$. Montrer que g est solution de (**??**).

   b) Trouver toutes les fonctions f vérifiant (**??**).

Ex. 42 — *(INA 06)* Notons E l'ensemble des fonctions continues sur $[0\,;1]$. On définit l'endomorphisme u par :

$$\forall f \in E, \forall x \in [0\,;1],\ [u(f)](x) = \int_0^1 \min(x,t) f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que u est injective. Est-elle surjective ?
2. Quelles sont les valeurs propres et les vecteurs propres de u ?
   INDICATION : *On montrera que si* $\Phi(f) = \lambda(f)$ *avec* $\lambda \neq 0$, *alors* $f(0) = f'(1) = 0$ *et que* $\lambda f'' + f = 0$.

Ex. 43 — *(INA 06)* 1. Soit u une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, vérifiant $u(0) = -u(1) = 1$. Calculer

$$\int_0^1 \big(u''(t) + \pi^2 u(t)\big)\sin(\pi t)\,\mathrm{d}t.$$

2. Trouver les valeurs de b telles que le système

$$\begin{cases} u''(t) + \pi^2 u(t) = -b\sin(\pi t) \\ u(0) = -u(1) = 1 \end{cases}$$

ait au moins une solution. Le résoudre alors.

3. Même question avec

$$\begin{cases} u''(t) + \pi^2 u(t) = -b\sin(\pi t) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Ex. 44 — *(INA 06)* Notons $\mathscr{S}$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^2}{2} + \int_0^x (x-t) f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que les fonctions de $\mathscr{S}$ sont deux fois dérivables.
2. Montrer que si f est dans $\mathscr{S}$, alors f est solution d'une équation différentielle du deuxième ordre, linéaire, à coefficients constants.
3. Déterminer $\mathscr{S}$.

Ex. 45 — *(INA 07)* 1. a) Déterminer toutes les fonctions f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{*+}$ qui vérifient

$$\forall x > 0,\ x f'(x) + 2f(x) = \frac{x}{x^2+1}.$$

   b) Déterminer de même toutes les fonctions f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{*+}$ qui vérifient

$$\forall x < 0,\ x f'(x) + 2f(x) = \frac{x}{x^2+1}.$$

2. Montrer qu'il existe une unique fonction f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ qui vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x f'(x) + 2f(x) = \frac{x}{x^2+1}.$$

On précisera en particulier $f'(0)$.

3. f étant la fonction trouvée à la question précédente, calculer $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ex. 46 — *(INA 07)* On cherche l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et de classe C^1, vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R} : f'(x) + f(-x) = 2(x-1)\mathrm{e}^x$.

1. Montrer qu'un tel f est de classe C^2 et vérifie une équation différentielle du second ordre à coefficients constants.
2. Trouver les fonctions recherchées.

Ex. 47 — Déterminer toutes les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{x}{x^2+1} f(x)$$