

Exercices d'applications

Ex. 1 — Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur \mathbb{R} . Calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{f(h)} - e^{f(2h)}}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)f(x) - xf(x+h)}{h}$$

Ex. 2 — Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I symétrique par rapport à 0. Montrer que si f est paire (resp. impaire), alors la fonction dérivée f' est impaire (resp. paire). Étudier la réciproque.

Ex. 3 — Calculer les dérivées des fonctions suivantes (on ne demande pas d'étudier le domaine de dérivabilité)

1. $x \mapsto x^{5/2}$;
2. $x \mapsto x^{-5/2}$;
3. $x \mapsto \frac{x+1}{x-2}$;
4. $x \mapsto \exp(\sin x)$;
5. $x \mapsto \sin(\exp(1/x))$;
6. $x \mapsto \sin \sin \sin \sin x$;
7. $x \mapsto \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$;
8. $x \mapsto \sqrt[3]{x^2} (1-x) \sin x \cos^2 x$;
9. $x \mapsto \frac{1}{8} \sqrt[3]{(1+x^7)^8} - \frac{1}{5} \sqrt[3]{(1+x^7)^5}$.

Ex. 4 — Étudier l'ensemble de dérivabilité et calculer la dérivée des fonctions suivantes

$$x^x ; \ln(1 + \sin(x)^2)$$

$$(1+x^4)^{1-2x} ; \frac{1}{1+\tan(x)} ; \sqrt{|1-x^2|}$$

$$\sqrt[3]{x} ; \ln^2(3x^2 - e) ; \cos(\sin(x))$$

Ex. 5 — Trouver le domaine de dérivabilités et calculer la dérivée de $x \mapsto \ln(\ln(x))$.

Ex. 6 — Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

Étudier l'existence de f^{-1} . Montrer que f^{-1} est dérivable et calculer $(f^{-1})'(-1)$.

Étude de régularité

Ex. 7 — La fonction $x \mapsto \cos \sqrt{x}$ est-elle dérivable sur $[0; 1]$?

Ex. 8 — Étudier la dérivabilité de f , et calculer sa fonction dérivée

1. $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x}{1+|x|} \end{cases}$
2. $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto xe^{-|x|} \end{cases}$.
3. $f : \begin{cases} [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos \sqrt{x} \end{cases}$

Ex. 9 — Déterminer la classe de la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} x^\alpha \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

pour $\alpha \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Ex. 10 — On définit une fonction f sur \mathbb{R} par

$$f(x) = 1+x \quad \text{si } x \geq 0$$

$$\text{et } f(x) = e^x \quad \text{si } x \leq 0$$

Montrer que f est bien définie et de classe C^1 sur \mathbb{R} . Est-elle de classe C^2 sur \mathbb{R} ?

Ex. 11 — Soit f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = e^{\frac{x-1}{x^2}} \quad \text{si } x \neq 0 \quad \text{et } f(0) = 0$$

La fonction f est-elle de classe C^1 sur \mathbb{R} ?

Ex. 12 — La fonction $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ admet-elle un prolongement C^1 à \mathbb{R} ?

Ex. 13 — Soit f définie sur \mathbb{R}^* par

$$f(x) = \left[x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right]^2 \quad \text{et} \quad f(0) = 0$$

Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et que f' n'est pas continue en 0.

Application de la dérivée

Ex. 14 — Étudier les extrema de $\ln\left[\frac{1+x}{(3+x)^2}\right]$.

Ex. 15 — 1. Étudier les variations de la fonction $x \mapsto \frac{\sqrt{x+1}}{e^x}$.

2. Montrer l'inégalité

$$\forall x \in [-1; +\infty[, \quad 0 \leq \frac{\sqrt{x+1}}{e^x} \leq \sqrt{\frac{e}{2}}$$

3. Quel est l'ensemble de définition de $x \mapsto \tan\left(\frac{\sqrt{x+1}}{e^x}\right)$?

Ex. 16 — Calculer $\sup\left\{-x^3 + \frac{75}{4}x; x \in \mathbb{R} \text{ et } x^4 + 36 \leq 13x^2\right\}$.

Ex. 17 — Montrer les inégalités suivantes

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq 1 + x$.
2. $\forall x \in]-1; +\infty[, \quad \ln(1+x) \leq x$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x^{n+1} - (n+1)x + n \geq 0$.

Ex. 18 — Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

Ex. 19 — À l'aide du théorème des accroissements finis, déterminer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}$$

Ex. 20 — Montrer que

$$\forall x > 0, \quad \frac{1}{x+1} \leq \ln(1+x) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$$

$$\text{En déduire } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Ex. 21 — Soit $a \in]0; 1[$. Démontrer l'inégalité pour tout $n \geq 1$

$$\frac{a}{(n+1)^{1-a}} \leq (n+1)^a - n^a \leq \frac{a}{n^{1-a}}$$

En déduire un équivalent, lorsque n tend vers $+\infty$ de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{1-a}}$.

Ex. 22 — Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

1. Justifier que f est de classe C^1 sur \mathbb{R} , calculer f' .
2. Dresser le tableau de variations de f .
3. Sur quels intervalles f est-elle convexe? concave? Quels sont ses points d'inflexions?
4. Tracer le graphe de f .

Problèmes

Ex. 23 — Déterminer la dérivée n -ième des fonctions $x \mapsto 1/x$; $x \mapsto \ln(1+x)$; $x \mapsto \sin(x)$; $x \mapsto \sin(ax+b)$; $x \mapsto (1+x)^n x^2$;

Ex. 24 — Soit $f :]-1; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ dérivable tel que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$.

Montrer qu'il existe $c \in]-1; 1[$ tel que $f'(c) = 0$.

INDICATION : Que peut-on dire de la fonction $\text{Arctan}(f)$?

Ex. 25 — Soit f une fonction continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$ telle que $\forall x \in [a; b], f(x) \neq 0$.

Montrer qu'il existe $c \in]a; b[$ tel que $\frac{f(a)}{f(b)} = e^{(a-b)\frac{f'(c)}{f(c)}}$.

Ex. 26 — Soit f une fonction de classe C^1 sur \mathbb{R} telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$. Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Montrer que la réciproque est fautive.

Ex. 27 — Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que f' est minorée par $\lambda > 0$ sur I . Démontrer que $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

Étudier la réciproque.

Ex. 28 — Soit P une fonction polynôme sur \mathbb{R} , de degré n . On suppose que P admet r racines distinctes $a_1 < a_2 < \dots < a_r$.

1. Démontrer que P' admet au moins $r - 1$ racines distinctes. Que dire du nombre de racines de P'' , $P^{(3)}$, etc. ?
2. Si $r > n$, montrer que $P^{(n)}$ admet au moins une racine sur \mathbb{R} . En déduire qu'un polynôme réel de degré au plus n n'admet pas plus de n racines distinctes.

Ex. 29 — Soit f une fonction n fois dérivable sur $[a ; b]$ ayant $n + 1$ racines sur ce segment. Montrer qu'il existe un réel c dans $]a ; b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Ex. 30 — Soit h la fonction définie sur $]0 ; 1[$ par

$$\text{si } x \neq 1 \quad h(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{2(1-x)}}$$

$$\text{et } h(1) = 0$$

1. h est-elle continue en 1 ?
2. h est-elle dérivable sur $]0 ; 1[$ sur $[0 ; 1]$?
3. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que

$$\forall x \in [0 ; 1] \quad |h(x)| < a \quad (1)$$

$$\forall x \in [0 ; 1] \quad |h'(x)| < \frac{b}{\sqrt{1-x}} \quad (2)$$

Ex. 31 — Si $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

1. Montrer que f admet une bijection réciproque g définie sur un intervalle I à préciser.

2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 1 - (f(x))^2$. Montrer que g est dérivable sur I et déterminer g' à l'aide du résultat précédent.

3. Retrouver la valeur de g' en explicitant g .

Ex. 32 — Trouver toutes les fonctions f dérivables sur \mathbb{R} telles que pour tout $x \in \mathbb{R}, f(2x) = 2f(x)$.

Ex. 33 — Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 \in]0 ; 1[\quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{u_n + 2}$$

1. Étudier la fonction f définie par

$$\forall x \in]0 ; 1[, \quad f(x) = \frac{e^x}{x + 2}$$

2. Montrer que f admet un unique point fixe α .

3. Montrer que $|f'(x)| \leq \frac{2}{9}$.

4. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{9}\right)^n |u_n - \alpha|$$

et conclure quand à la convergence de u .

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0 ; 1]$.

5. Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in [0 ; 1]$ tel que

$$\alpha = \frac{e^\alpha}{1 + e^\alpha}$$

6. Montrer que

$$\forall x \in [0 ; 1], \quad \left| \frac{e^x}{1 + e^x} - \alpha \right| \leq |x - \alpha|$$

7. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{4^n} |u_n - \alpha|$$

et conclure quand à la convergence de u .



Ex. 34 — Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 \in [0; 1] \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{1 + e^{u_n}}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0; 1]$.
2. Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in [0; 1]$ tel que

$$\alpha = \frac{e^\alpha}{1 + e^\alpha}$$

3. Montrer que

$$\forall x \in [0; 1], \quad \left| \frac{e^x}{1 + e^x} - \alpha \right| \leq |x - \alpha|$$

4. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{4^n} |u_0 - \alpha|$$

et conclure quand à la convergence de u .

Ex. 35 — Soit P_n une fonction polynôme de degré au plus n . Montrer que l'équation $P_n(x) = e^x$ ne peut pas avoir un nombre de solutions supérieur ou égal à $n + 2$.

Dérivée d'ordre supérieur

Ex. 36 — Calculer la dérivée n -ième des fonctions

1. $f_1(x) = 1/x$;
2. $f_2(x) = \frac{1}{(x-1)^2(x-2)}$ (déterminer tout d'abord 3 réels a, b et c tels que $f_2(x) = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-2}$);
3. $f_3(x) = x^2 e^{3x}$;
4. $f_4(x) = x^{n-1} \ln x$.

Ex. 37 — Calculer la dérivée d'ordre n de $e^{\sqrt{3}x} \sin(x)$

Ex. 38 — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la classe de la fonction f_n définie sur \mathbb{R} par

$$f_n(x) = \begin{cases} (1-x^2)^n & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$