Fonctions dérivables

BCPST 1, 3/2018

Exercices d'applications

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(2x)-f(x)}{x}$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{f(h)}-e^{f(2h)}}{h}$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)f(x)-xf(x+h)}{h}$$

Exercice 2

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I symétrique par rapport à 0. Montrer que si f est paire (resp. impaire), alors la fonction dérivée f' est impaire (resp. paire). Étudier la réciproque.

Exercice 3

Calculer les dérivées des fonctions suivantes (on ne demande pas d'étudier le domaine de dérivabilité)

1. $x \mapsto x^{5/2}$;
2. $x \mapsto x^{-5/2}$;
3. $x \mapsto \dfrac{x+1}{x-2}$;
4. $x \mapsto \exp(\sin x)$;
5. $x \mapsto \sin(\exp(1/x))$;
6. $x \mapsto \sin\sin\sin\sin x$;
7. $x \mapsto \ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$;
8. $x \mapsto \sqrt[3]{x^2}(1-x)\sin x\cos^2 x$;
9. $x \mapsto \dfrac{1}{8}\sqrt[3]{(1+x^7)^8} - \dfrac{1}{5}\sqrt[3]{(1+x^7)^5}$.

Exercice 4

Étudier l'ensemble de dérivabilité et calculer la dérivée des fonctions suivantes

$$x^x \quad ; \quad \ln\left(1+\sin(x)^2\right)$$
$$\left(1+x^4\right)^{1-2x} \quad ; \quad \frac{1}{1+\tan(x)} \quad ; \quad \sqrt{|1-x^2|}$$
$$\sqrt[3]{x} \quad ; \quad \ln^2\left(3x^2-e\right) \quad ; \quad \cos(\sin(x))$$

Exercice 5

Trouver le domaine de dérivabilités et calculer la dérivée de $x \mapsto \ln(\ln(x))$.

Exercice 6

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

Étudier l'existence de f^{-1}. Montrer que f^{-1} est dérivable et calculer $(f^{-1})'(-1)$.

Étude de régularité

Exercice 7

La fonction $x \mapsto \cos\sqrt{x}$ est-elle dérivable sur $[0\,;1]$?

Exercice 8

Étudier la dérivabilité de f, et calculer sa fonction dérivée

1. $f : \left|\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{x}{1+|x|} \end{array}\right.$
2. $f : \left|\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x e^{-|x|} \end{array}\right.$.
3. $f : \left|\begin{array}{l} [0\,;1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \cos\sqrt{x} \end{array}\right.$

Exercice 9

Déterminer la classe de la fonction

$$f : \left|\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \left|\begin{array}{ll} x^\alpha \sin\dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

pour $\alpha \in \{0,1,2,3\}$.

Exercice 10

On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 1+x \quad \text{si} \quad x \geqslant 0$$
$$\text{et} \qquad f(x) = e^x \quad \text{si} \quad x \leqslant 0$$

Montrer que f est bien définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Est-elle de classe C^2 sur $\mathbb{R}$?

Exercice 11
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x-1}{x^2}} \quad \text{si} \quad x \neq 0 \qquad \text{et} \qquad f(0) = 0$$

La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?

Exercice 12
La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ admet-elle un prolongement C^1 à $\mathbb{R}$?

Exercice 13
Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \left[x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right]^2 \qquad \text{et} \qquad f(0) = 0$$

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que f' n'est pas continue en 0.

Application de la dérivée

Exercice 14
Étudier les extrema de $\ln\left[\dfrac{1+x}{(3+x)^2}\right]$.

Exercice 15

1. Étudier les variations de la fonction $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x+1}}{\mathrm{e}^x}$.
2. Montrer l'inégalité

$$\forall x \in [-1\,;\,+\infty[\,, \quad 0 \leqslant \frac{\sqrt{x+1}}{\mathrm{e}^x} \leqslant \sqrt{\frac{\mathrm{e}}{2}}$$

3. Quel est l'ensemble de définition de $x \mapsto \tan\left(\dfrac{\sqrt{x+1}}{\mathrm{e}^x}\right)$?

Exercice 16
Calculer $\sup\left\{-x^3 + \dfrac{75}{4}x\,;\ x \in \mathbb{R} \text{ et } x^4 + 36 \leqslant 13x^2\right\}$.

Exercice 17
Montrer les inégalités suivantes
1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$.
2. $\forall x \in]-1\,;\,+\infty[\,, \quad \ln(1+x) \leqslant x$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x^{n+1} - (n+1)x + n \geqslant 0$.

Exercice 18
Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

Exercice 19
À l'aide du théorème des accroissements finis, déterminer

$$\lim_{x\to+\infty} (x+1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}} - x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$$

Exercice 20
Montrer que

$$\forall x > 0, \quad \frac{1}{x+1} \leqslant \ln(1+x) - \ln(x) \leqslant \frac{1}{x}$$

En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

Exercice 21
Soit $a \in]0\,;\,1[$. Démontrer l'inégalité pour tout $n \geqslant 1$

$$\frac{a}{(n+1)^{1-a}} \leqslant (n+1)^a - n^a \leqslant \frac{a}{n^{1-a}}$$

En déduire un équivalent, lorsque n tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{1-a}}$.

Exercice 22
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}$.
1. Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, calculer f'.
2. Dresser le tableau de variations de f.
3. Sur quels intervalles f est-elle convexe ? concave ? Quels sont ses points d'inflexions ?
4. Tracer le graphe de f.

Problèmes

Exercice 23
Déterminer la dérivée n–ième des fonctions $x \mapsto 1/x$; $x \mapsto \ln(1+x)$ $x \mapsto \sin(x)$; $x \mapsto \sin(ax+b)$; $x \mapsto (1+x)^n x^2$;

Exercice 24
Soit $f :]-1\,;1[\longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable tel que $\displaystyle\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$.
Montrer qu'il existe $c \in]-1\,;\,1[$ tel que $f'(c) = 0$.
Indication : *Que peut-on-dire de la fonction* $\mathrm{Arctan}(f)$ *?*

Exercice 25
Soit f une fonction continue sur $[a\ ;\ b]$, dérivable sur $]a\ ;\ b[$ telle que $\forall x \in [a\ ;\ b], f(x) \neq 0$.
Montrer qu'il existe $c \in\ ]a\ ;\ b[$ tel que $\dfrac{f(a)}{f(b)} = \mathrm{e}^{(a-b)\frac{f'(c)}{f(c)}}$.

Exercice 26
Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$. Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
Montrer que la réciproque est fausse.

Exercice 27
Soit $f\ :\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que f' est minorée par $\lambda > 0$ sur I. Démontrer que $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
Étudier la réciproque.

Exercice 28
Soit P une fonction polynôme sur $\mathbb{R}$, de degré n. On suppose que P admet r racines distinctes $a_1 < a_2 < \cdots < a_r$.
1. Démontrer que P' admet au moins $r-1$ racines distinctes. Que dire du nombre de racines de P'', $P^{(3)}$, etc. ?
2. Si $r > n$, montrer que $P^{(n)}$ admet au moins une racine sur $\mathbb{R}$. En déduire qu'un polynôme réel de degré au plus n n'admet pas plus de n racines distinctes.

Exercice 29
Soit f une fonction n fois dérivables sur $[a\ ;\ b]$ ayant $n+1$ racines sur ce segment. Montrer qu'il existe un réel c dans $]a\ ;\ b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Exercice 30
Soit h la fonction définie sur $[0\ ;\ 1]$ par

$$\text{si}\quad x \neq 1 \quad h(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{2(1-x)}}$$
$$\text{et} \qquad h(1) = 0$$

1. h est-elle continue en 1 ?
2. h est-elle dérivable sur $]0\ ;\ 1[$? sur $[0\ ;\ 1]$?
3. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que

$$\forall x \in [0\ ;\ 1] \qquad |h(x)| < a \qquad (1)$$
$$\forall x \in [0\ ;\ 1] \qquad \left|h'(x)\right| < \frac{b}{\sqrt{1-x}} \qquad (2)$$

Exercice 31
Si $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$$

1. Montrer que f admet une bijection réciproque g définie sur un intervalle I à préciser.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \ f'(x) = 1 - (f(x))^2$. Montrer que g est dérivable sur I et déterminer g' à l'aide du résultat précédent.
3. Retrouver la valeur de g' en explicitant g.

Exercice 32
Trouver toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = 2f(x)$.

Exercice 33
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 \in\ ]0\ ;\ 1[\qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{\mathrm{e}^{u_n}}{u_n + 2}$$

1. Étudier la fonction f définie par

$$\forall x \in\ ]0\ ;\ 1[, \qquad f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x+2}$$

2. Montrer que f admet un unique point fixe α.
3. Montrer que $\left|f'(x)\right| \leqslant \dfrac{2}{9}$.
4. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{2}{9}\right)^n |u_n - \alpha|$$

et conclure quand à la convergence de u.

Exercice 34
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 \in [\,0\ ;\ 1\,] \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{\mathrm{e}^{u_n}}{1 + \mathrm{e}^{u_n}}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n \in [\,0\ ;\ 1\,]$.
2. Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in [\,0\ ;\ 1\,]$ tel que

$$\alpha = \frac{\mathrm{e}^\alpha}{1 + e^\alpha}$$

3. Montrer que

$$\forall x \in [\,0\ ;\ 1\,], \qquad \left|\frac{\mathrm{e}^x}{1+e^x} - \alpha\right| \leqslant \frac{e}{4}\,|x - \alpha|$$

4. Montrer ensuite que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{e}{4} |u_n - \alpha|$$

5. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{e}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

et conclure quand à la convergence de u.

Exercice 35

Soit P_n une fonction polynôme de degré au plus n. Montrer que l'équation $P_n(x) = \mathrm{e}^x$ ne peut pas avoir un nombre de solutions supérieur ou égal à $n+2$.

Dérivée d'ordre supérieur

Exercice 36

Calculer la dérivée n–ième des fonctions

1. $f_1(x) = 1/x$;
2. $f_2(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2(x-2)}$ (déterminer tout d'abord 3 réels a, b et c tels que $f_2(x) = \dfrac{a}{(x-1)^2} + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{x-2}$) ;
3. $f_3(x) = x^2 \mathrm{e}^{3x}$;
4. $f_4(x) = x^{n-1} \ln x$.

Exercice 37

Calculer la dérivée d'ordre n de $\mathrm{e}^{\sqrt{3}x} \sin(x)$

Exercice 38

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la classe de la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} (1-x^2)^n \text{ si } |x| < 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$