Exercices d'applications

Ex. 1 — Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(2x)-f(x)}{x}$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{f(h)}-e^{f(2h)}}{h}$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)f(x)-xf(x+h)}{h}$$

Ex. 2 — Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I symétrique par rapport à 0. Montrer que si f est paire (resp. impaire), alors la fonction dérivée f' est impaire (resp. paire). Étudier la réciproque.

Ex. 3 — Calculer les dérivées des fonctions suivantes (on ne demande pas d'étudier le domaine de dérivabilité)

1. $x \mapsto x^{5/2}$;
2. $x \mapsto x^{-5/2}$;
3. $x \mapsto \dfrac{x+1}{x-2}$;
4. $x \mapsto \exp(\sin x)$;
5. $x \mapsto \sin(\exp(1/x))$;
6. $x \mapsto \sin\sin\sin\sin x$;
7. $x \mapsto \ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$;
8. $x \mapsto \sqrt[3]{x^2}(1-x)\sin x\cos^2 x$;
9. $x \mapsto \dfrac{1}{8}\sqrt[3]{(1+x^7)^8}-\dfrac{1}{5}\sqrt[3]{(1+x^7)^5}$.

Ex. 4 — Étudier l'ensemble de dérivabilité et calculer la dérivée des fonctions suivantes

$$x^x \quad ; \quad \cos(\sqrt{x}) \quad ; \quad \ln\left(1+\sin(x)^2\right)$$

$$\left(1+x^4\right)^{1-2x} \quad ; \quad \frac{1}{1+\tan(x)} \quad ; \quad \sqrt{|1-x^2|}$$

$$^3\sqrt{x} \quad ; \quad \ln^2\left(3x^2-e\right) \quad ; \quad \cos(\sin(x))$$

Ex. 5 — Trouver le domaine de dérivabilités et calculer la dérivée de $x \mapsto \ln(\ln(x))$.

Ex. 6 — Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

Étudier l'existence de f^{-1}. Montrer que f^{-1} est dérivable et calculer $(f^{-1})'(-1)$.

Étude de régularité

Ex. 7 — La fonction $x \mapsto \cos\sqrt{x}$ est-elle dérivable sur $[0\,;1]$?

Ex. 8 — Étudier la dérivabilité de f, et calculer sa fonction dérivée

1. $f : \left|\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{1+|x|} \end{array}\right.$
2. $f : \left|\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & xe^{-|x|} \end{array}\right.$.
3. $f : \left|\begin{array}{rcl} [0\,;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos\sqrt{x} \end{array}\right.$

Ex. 9 — Déterminer la classe de la fonction
$f : \left|\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left|\begin{array}{ll} x^\alpha \sin\dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{array}\right. \end{array}\right.$

pour $\alpha \in \{0,1,2,3\}$.

Ex. 10 — On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 1 + x x \geqslant 0$$
$$\text{et} \qquad f(x) = e^x x \leqslant 0$$

Montrer que f est bien définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Est-elle de classe C^2 sur $\mathbb{R}$?

Ex. 11 — Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{\frac{x-1}{x^2}} x \neq 0 \qquad \text{et} \qquad f(0) = 0$$

La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?

Ex. 12 — La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ admet-elle un prolongement C^1 à $\mathbb{R}$?

Ex. 13 — Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x)=\left[x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right]^2 \qquad \text{et} \qquad f(0)=0$$

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que f' n'est pas continue en 0.

Application de la dérivée

Ex. 14 — Étudier les extrema de $\ln\left[\dfrac{1+x}{(3+x)^2}\right]$.

Ex. 15 — 1. Étudier les variations de la fonction $x\mapsto \dfrac{\sqrt{x+1}}{e^x}$.

2. Montrer l'inégalité

$$\forall x\in[-1\,;\,+\infty[,\quad 0\leqslant \frac{\sqrt{x+1}}{e^x}\leqslant\sqrt{\frac{e}{2}}$$

3. Quel est l'ensemble de définition de $x\mapsto \tan\left(\dfrac{\sqrt{x+1}}{e^x}\right)$?

Ex. 16 — Calculer $\sup\left\{-x^3+\dfrac{75}{4}x\,;\; x\in\mathbb{R} \text{ et } x^4+36\leqslant 13x^2\right\}$.

Ex. 17 — Montrer les inégalités suivantes

1. $\forall x\in\mathbb{R},\quad e^x\geqslant 1+x$.
2. $\forall x\in\,]-1\,;\,+\infty[,\quad \ln(1+x)\leqslant x$.
3. $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in\mathbb{R}_+,\quad x^{n+1}-(n+1)x+n\geqslant 0$.

Ex. 18 — Montrer que

$$\forall n\in\mathbb{N}, \forall x\in\mathbb{R},\quad e^x\geqslant 1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$$

Ex. 19 — À l'aide du théorème des accroissements finis, déterminer

$$\lim_{x\to+\infty}(x+1)e^{\frac{1}{x+1}}-xe^{\frac{1}{x}}$$

Ex. 20 — Montrer que

$$\forall x>0,\quad \frac{1}{x+1}\leqslant \ln(1+x)-\ln(x)\leqslant\frac{1}{x}$$

En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$.

Ex. 21 — Soit $a\in\,]0\,;\,1[$. Démontrer l'inégalité pour tout $n\geqslant 1$

$$\frac{a}{(n+1)^{1-a}}\leqslant (n+1)^a-n^a\leqslant\frac{a}{n^{1-a}}$$

En déduire un équivalent, lorsque n tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{1-a}}$.

Ex. 22 — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$.

1. Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, calculer f'.
2. Dresser le tableau de variations de f.
3. Sur quels intervalles f est-elle convexe ? concave ? Quels sont ses points d'inflexions ?
4. Tracer le graphe de f.

Problèmes

Ex. 23 — Déterminer la dérivée n–ième des fonctions $x\mapsto 1/x$; $x\mapsto\ln(1+x)$ $x\mapsto\sin(x)$; $x\mapsto\sin(ax+b)$; $x\mapsto(1+x)^n x^2$;

Ex. 24 — On pose $f_n(x)=x^{n-1}\ln(1+x)$, démontrer que pour tout $x>-1$,

$$f_n^{(n)}(x)=(n-1)!\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+x)^k}$$

Ex. 25 — Soit $f :]-1\,;1[\longrightarrow\mathbb{R}$ dérivable tel que $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to -1^+}f(x)=+\infty$.
Montrer qu'il existe $c\in\,]-1\,;1[$ tel que $f'(c)=0$.
Indication : *Que peut-on-dire de la fonction* Arctan(f) *?*

Ex. 26 — Soit f une fonction continue sur $[a\,;\,b]$, dérivable sur $]a\,;\,b[$ telle que $\forall x\in[a\,;\,b], f(x)\neq 0$.

Montrer qu'il existe $c \in \,]a\,;b[$ tel que $\dfrac{f(a)}{f(b)} = \mathrm{e}^{(a-b)\frac{f'(c)}{f(c)}}$.

Ex. 27 — Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$. Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
Montrer que la réciproque est fausse.

Ex. 28 — Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que f' est minorée par $\lambda > 0$ sur I. Démontrer que $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
Étudier la réciproque.

Ex. 29 — Soit P une fonction polynôme sur $\mathbb{R}$, de degré n. On suppose que P admet r racines distinctes $a_1 < a_2 < \cdots < a_r$.

1. Démontrer que P' admet au moins $r-1$ racines distinctes. Que dire du nombre de racines de P'', $P^{(3)}$, etc. ?
2. Si $r > n$, montrer que $P^{(n)}$ admet au moins une racine sur $\mathbb{R}$. En déduire qu'un polynôme réel de degré au plus n n'admet pas plus de n racines distinctes.

Ex. 30 — Soit f une fonction n fois dérivables sur $[a\,;b]$ ayant $n+1$ racines sur ce segment. Montrer qu'il existe un réel c dans $]a\,;b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Ex. 31 — Soit h la fonction définie sur $[0\,;1]$ par

$$\text{x} \neq 1 \quad h(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{2(1-x)}}$$
$$\text{et} \qquad h(1) = 0$$

1. h est-elle continue en 1 ?
2. h est-elle dérivable sur $]0\,;1[$? sur $[0\,;1]$?
3. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que

$$\forall x \in [0\,;1] \qquad |h(x)| < a \qquad (1)$$

$$\forall x \in [0\,;1] \qquad \left|h'(x)\right| < \frac{b}{\sqrt{1-x}} \qquad (2)$$

Ex. 32 — Si $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$$

1. Montrer que f admet une bijection réciproque g définie sur un intervalle I à préciser.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 1 - (f(x))^2$. Montrer que g est dérivable sur I et déterminer g' à l'aide du résultat précédent.
3. Retrouver la valeur de g' en explicitant g.

Ex. 33 — Trouver toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = 2f(x)$.

Ex. 34 — Soit I un segment de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. On suppose que I est stable par f et qu'il existe un réel $k \in [0\,;1[$ tel que

$$\forall x \in I, \quad \left|f'(x)\right| < k$$

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$u_0 \in I \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Si f n'a pas de point fixe dans I, que peut-on dire de la convergence de u ?
2. On suppose que f a un unique point fixe α.
   a) Montrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant k\,|u_n - \alpha|$$
   b) En déduire que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant k^n\,|u_0 - \alpha|$$
   c) Conclure.
3. *Application* Étudier la convergence de la suite

$$u_0 = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n(1-u_n)$$

4. On suppose désormais que

$$\forall x \in I, \quad \left|f'(x)\right| > k$$

avec $k > 1$ et on suppose toujours que f possède un unique point fixe α.

   a) Démontrer que

   $$\exists k \in]1\,;\,+\infty[\,, \quad |u_{n+1} - \alpha| \geqslant k\,|u_n - \alpha|$$

   b) En déduire que

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \geqslant k^n\,|u_0 - \alpha|$$

   c) Conclure.

Ex. 35 — Soit P_n une fonction polynôme de degré au plus n. Montrer que l'équation $P_n(x) = \mathrm{e}^x$ ne peut pas avoir un nombre de solutions supérieur ou égal à $n+2$.

Dérivée d'ordre supérieur

Ex. 36 — Calculer la dérivée n–ième des fonctions

1. $f_1(x) = 1/x$;
2. $f_2(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2(x-2)}$ (déterminer tout d'abord 3 réels a, b et c tels que $f_2(x) = \dfrac{a}{(x-1)^2} + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{x-2}$) ;
3. $f_3(x) = x^2\mathrm{e}^{3x}$;
4. $f_4(x) = x^{n-1}\ln x$.

Ex. 37 — Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$f_n \; : \left|\begin{array}{rcl}]-1\,;\,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^{n-1}\ln(1+x) \end{array}\right. .$$

Montrer que f_n est n fois dérivable sur $]-1\,;\,+\infty[$ et que

$$\forall x \in]-1\,;\,+\infty[\,, \quad f_n^{(n)}(x) = (n-1)!\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+x)^k}.$$

Ex. 38 — Calculer la dérivée d'ordre n de $\mathrm{e}^{\sqrt{3}x}\sin(x)$

Ex. 39 — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la classe de la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} (1-x^2)^n \text{ si } |x| < 1 \\ \quad 0 \text{ sinon} \end{cases}$$