

# DÉNOMBREMENT

BCPST I, 3/2018

## DÉNOMBREMENT À MAÎTRISER

### Exercice 1

De combien de façons différentes peut-on choisir  $p$  entiers  $(x_1, x_2, \dots, x_p)$  dans  $\llbracket 1 ; n \rrbracket$  de façon à ce que  $x_1 < x_2 < \dots < x_p$  ?

### Exercice 2

On dispose de 10 jetons de Scrabble portant les lettres de l'alphabet de  $A$  à  $J$ .

1. Combien de mots peut-on écrire avec ces dix lettres ?
2. Combien de mots peut-on écrire avec ces dix lettres où  $B, A$  et  $C$  apparaissent dans cet ordre et côte à côte ?
3. Combien de mots peut-on écrire avec ces dix lettres où  $B, A$  et  $C$  apparaissent dans cet ordre ?

### Exercice 3

1. Combien le mot *livre* possède-t-il d'anagrammes ? et le mot *feuille* ? et le mot *Mississippi* ?
2. Quel est le coefficient de  $a^3 b^4 c^2 d$  dans  $(a + b + c + d)^{10}$  ?

### Exercice 4

Un jeu comporte 32 cartes dont 8 par couleur. Une main est constitué de 8 cartes non ordonnées.

1. Quel est le nombre de main possibles ?
2. Combien de mains contiennent un as ?
3. Combien comprennent au moins un cœur ou une dame ?
4. Combien ne contiennent que des cartes de deux couleurs au plus ?

### Exercice 5

Une urne contient 10 boules noires numérotées, 5 boules blanches numérotées et 3 boules rouges numérotées. On tire simultanément 4 boules dans l'urne. Quel est le nombre...

1. ... de tirages possibles ?
2. ... de tirages contenant au moins une boule noire ?

3. ... de tirages contenant autant de boules blanches que de rouge ?

4. ... de tirages contenant les trois couleurs ?

### Exercice 6

Pour payer l'autoroute, une personne doit mettre 20 € dans un automate qui n'accepte que les pièces de 1 € et 2 €. Supposant qu'elle ait la monnaie suffisante, de combien de façons peut-elle payer ? (On tient compte de l'ordre d'introduction des pièces dans l'appareil).

### Exercice 7

On veut distribuer 7 prospectus dans 10 boîtes aux lettres nominatives. De combien de façons peut-on le faire si

1. on met au plus un prospectus par boîte et les prospectus sont identiques ?
2. on met au plus un prospectus par boîte et les prospectus sont différents ?
3. on met un nombre quelconque de prospectus par boîte et les prospectus sont tous différents ?
4. on met un nombre quelconque de prospectus par boîte et les prospectus sont identiques ?

### Exercice 8 — Problème des rencontres

Lors d'un dîner, 5 personnes disposent leur chapeau au vestiaire. Au moment du départ, les convives un peu pressés reprennent au hasard chacun un chapeau. Combien y a-t-il de possibilités au total ? Combien y a-t-il de possibilités pour que personne ne reprenne son chapeau ?

### Exercice 9

Dans le quadrillage  $\mathbb{N}^2$ , on appelle chemin croissant tout parcours qui suit le quadrillage en se déplaçant uniquement vers la droite et vers le haut.

1. Combien y a-t-il de chemins croissants de longueur  $N$  ? Combien de points distincts permettent-ils d'atteindre ?

- $A$  et  $B$  sont les points de coordonnées respectives  $(0, 0)$  et  $(p, n)$ .  
Combien de chemins croissants y a-t-il pour aller de  $A$  à  $B$  ?
- On appelle chemin strictement croissant reliant  $A$  à  $B$  les chemins tels qu'on ne fait jamais deux pas consécutifs vers la droite. Combien y-a-t'il de tels chemins ?

### Exercice 10

Soit  $E = \llbracket 0 ; n \rrbracket$ .

- Combien y'a-t-il de couples  $(x, y)$  dans  $E^2$  ?
- Combien de couples  $(x, y) \in E^2$  tels que
  - $x + y = n$  ?
  - $x \neq y$  ?
  - $x \leq y$  ?
  - $x < y$  ?
  - $x + y = k$  avec  $k \in \llbracket 0 ; 2n \rrbracket$  ?

### Exercice 11

Soient  $p$  et  $q$  deux entiers. Dénombrer les mots écrits avec uniquement des 0 et des 1 :

- comportant  $p + q$  occurrences de 0 ou de 1 ;
- comportant  $p$  occurrences de 0 et  $q$  occurrences de 1 ;
- comportant  $p$  occurrences de 0 et  $q$  occurrences de 1, sans que deux 0 ne soient consécutifs ;
- comportant  $p$  occurrences de 0 et  $q$  occurrences de 1 avec au plus une série de 0 ; deux séries de 0 ;  $k$  séries de 0.

## ENTRAÎNEMENT

### Exercice 12

On note  $A$  l'ensemble des nombres de 6 chiffres formés avec le chiffres 1, 2, 3, ..., 9.

- Combien y a-t-il d'éléments de  $A$  ?
- Combien y a-t-il d'éléments de  $A$  dont tous les chiffres sont pairs ?
- Combien y a-t-il d'éléments de  $A$  dont tous les chiffres sont différents ?
- Combien y a-t-il d'éléments de  $A$  dont tous les chiffres forment une suite croissante strictement ?

### Exercice 13

Soit  $E$  un ensemble de cardinal  $n$ .

- Déterminer le nombre de couples  $(A, B)$  de parties de  $E$  vérifiant  $B \subset A$ .  
INDICATION : Discuter suivant le nombre d'éléments de  $A$ .
- En déduire le nombre de couples  $(A, B)$  de parties de  $E$  vérifiant  $A \cap B = \emptyset$ .
- En déduire le nombre de triplets  $(A, B, C)$  de parties de  $E$  vérifiant  $A \sqcup B \sqcup C = E$ . (la notation de la réunion avec des symboles à angles droit :  $A \sqcup B \sqcup C$  signifie que les ensembles sont 2 à 2 disjoints)
- Retrouver ce dernier résultat par un raisonnement direct. Généraliser.

### Exercice 14

Soit  $E$  un ensemble fini, non vide, de cardinal  $n$ ,  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$  de cardinaux respectifs  $a$  et  $b$ . On note  $c$  le cardinal de  $A \cup B$ . Calculer  $\text{card} A \cap B$ ,  $\text{card} \bar{A} \cap B$ ,  $\text{card} A \cap \bar{B}$ ,  $\text{card} \bar{A} \cap \bar{B}$ ,  $\text{card} \bar{A} \cup B$ ,  $\text{card} A \cup \bar{B}$ ,  $\text{card} \bar{A} \cup \bar{B}$ , en fonction de  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $n$ .

### Exercice 15

Un gardien de zoo donne à manger à ses 13 singes.

- Il distribue ses 8 fruits différents (une pomme, une banane, etc...). Combien y a-t-il de distributions possibles
  - s'il donne au plus un fruit à chaque singe ?
  - si chaque singe peut recevoir de 0 à 8 fruits ?
- Mêmes questions si les 8 fruits sont 8 pommes Golden identiques.

### Exercice 16

Soit  $\Omega$  l'ensemble des nombres entiers naturels formés de 4 chiffres pris dans  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

Soit  $A$  le sous-ensemble de  $\Omega$  dont les éléments ont 4 chiffres différents,  $B$  le sous-ensemble de  $\Omega$  dont les éléments ont exactement un chiffre doublé,  $C$  celui dont les éléments ont exactement 2 chiffres distincts doublés,  $D$  celui dont les éléments ont exactement un chiffre triplé,  $E$  celui dont les éléments ont 4 fois le même chiffre.

- Calculer le cardinal de  $\Omega, A, B, C, D$  et  $E$ .

2. Montrer que  $(A, B, C, D, E)$  forme une partition de  $\Omega$ .
3. On additionne tous les nombres de  $\Omega$ . Quelle est la somme trouvée ?

### Exercice 17

On dispose de 32 joueurs de tennis. De combien de façons peut-on organiser le premier tour d'un tournoi de tennis en simple ? en double ? en simple de manière à ce que les joueurs 1 et 2 ne puissent pas se rencontrer avant la finale ?

### Exercice 18

Combien de mots peut-on former avec les lettres A, B, C, D et E, en utilisant une seule fois chaque lettre ? Combien de mot de 5 lettres commencent par A ? Combien de mot de 5 lettres commencent par A et finissent par B ? Combien de mot de 5 lettres où le A apparaît avant le B ?

### Exercice 19

Dans le plan, on considère  $n$  points  $M_1, M_2, \dots, M_n$  tels que trois quelconques ne soient pas alignés. Quel est le nombre de polygones à  $n$  cotés que l'on peut construire avec ces points ?

### Exercice 20

Un jury est composé de 10 membres tirés au sort parmi 8 hommes et 9 femmes.

1. Combien de jurys différents peut-on former ?
2. Combien de jurys comportant 5 hommes et 5 femmes peut-on former ?
3. Monsieur X refuse de siéger avec Madame Y. Combien de jurys peut-on former dans ces conditions ?

### Exercice 21

Combien y-a-t-il de surjections de  $E$  vers  $F$  lorsque  $\text{card}(E) = n + 1$  et  $\text{card}(F) = n$  ?

Répondre à cette question lorsque  $\text{card}(E) = n + 2$  et lorsque  $\text{card}(E) = n + 3$ .

### Exercice 22

1. Combien y a-t-il d'élèves dans une classe où 27 étudient l'anglais, 15 l'allemand et 9 les deux langues, sachant que chaque élève étudie au moins une langue ?

2. Dans une classe de 31 élèves, 16 étudient l'anglais, 13 l'espagnol, 14 l'allemand, 4 l'anglais et l'espagnol, 6 l'espagnol et l'allemand, 5 l'anglais et l'allemand. Combien étudient les 3 langues ?

### Exercice 23

On dispose de 8 boules numérotées et de quatre sacs numérotés. On répartir les 8 boules dans les sacs. Combien y a-t-il de répartitions possibles ? Combien de répartitions telles qu'aucun sac ne soit vide ?

### Exercice 24

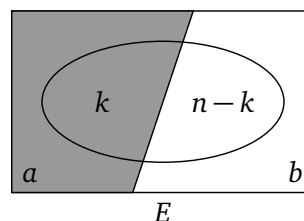
Dans une urne on place  $n$  boules blanche et une seule noire. On tire simultanément  $k$  boules. Déterminer successivement le nombre de tirages sans boules noires, avec au moins une boule noire, possibles en tout. Qu'obtenez-vous ?

### Exercice 25 — Formule de Vandermonde

Démontrer que, pour  $a, b$  et  $n$  entiers naturels,

$$\sum_{k=0}^{a+b} \binom{a}{k} \binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$$

On pourrait compter de deux façons différentes le nombre de sous-ensembles à  $n$  éléments d'un ensemble à  $a + b$  éléments.



### DIVERS

#### Exercice 26

Combien peut-on former de nombres plus grands que 2000 avec les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, en ne répétant pas le même chiffre dans chacun des nombres ?

#### Exercice 27

Combien y a-t-il d'anagrammes du mot *anagramme* ? Si on range ces mots par ordre alphabétique, à quelle place apparaît le mot *anagramme* ?

### Exercice 28

Calculer la somme des nombres obtenus en permutant les chiffres 1, 2, 3, 5, 8 de toutes les façons possibles.

### Exercice 29

De combien de façons différentes peut-on payer une somme de 1 € à l'aide de pièces de 1 et 2 centimes exclusivement ?

### Exercice 30

Soit  $A = \{a, b, c\}$  un alphabet de trois lettres. Combien y a-t-il de mots de 7 lettres construits à partir de l'alphabet  $A$ , commençant par  $a$  ou  $b$  et contenant au moins une fois la lettre  $c$  ?

### Exercice 31

Une classe comporte 44 élèves. De combien de façons peut-on le diviser en deux groupes de TD de 22 ? En 4 groupes de 11 élèves ? Plus généralement, combien y a-t-il de partitions en  $n$  parties de  $p$  éléments pour un ensemble de cardinal  $np$  ?

### UN PEU PLUS ABSTRAIT...

#### Exercice 32

Soit  $A = \{a, b, c, d\}$  un alphabet de quatre lettres et  $n \geq 4$  un entier. Dénombrer l'ensemble des mots de longueur  $n$  sur l'alphabet  $A$  dans lesquels chaque lettre apparaît au moins une fois.

#### Exercice 33

On place  $n$  points sur un cercle.

1. Dénombrer le nombre de cordes du cercles possibles (*i.e.* de segments joignant deux de nos  $n$  points).
2. Sans compter les  $n$  points de départ, en combien de points différents se coupent les cordes précédentes ? (On suppose les cordes trois à trois non concourantes).

#### Exercice 34

Soit  $E$  un ensemble fini à  $n$  éléments. Trouver le cardinal des ensembles suivants :

1.  $F = \{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, A \cup B = E \text{ et } A \cap B = \emptyset\}$ ,
2.  $G_A = \{B \in \mathcal{P}(E), A \cup B = E\}$  avec  $A$  une partie fixée de  $E$  à  $p$  éléments,
3.  $H = \{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, A \cup B = E\}$ .

### POUR FINIR...

#### Exercice 35

$n$  couples se rencontrent et se saluent. Chaque personne serre (une fois) la main de chacune des autres (sauf celle de son conjoint). Combien y a-t-il de poignées de main échangées ?

#### Exercice 36

Un code d'immeuble est formé d'une suite de deux chiffre (de 0 à 9), puis une lettre (A ou B), puis deux chiffre.

1. Combien y a-t-il de codes possibles ?
2. Combien de code contenant la lettre A et deux fois le chiffre 7 exactement ?
3. Ayant oublié le code d'un immeuble, mais constatant que les touches 2, 4, 5 et B sont plus usées que les autres, combien de combinaisons doit-on tester pour être sûr d'avoir la bonne ?

#### Exercice 37

Soit  $n$  et  $p$  deux entiers naturels non nuls. On note  $s_{n,p}$  le nombre de surjections d'un ensemble  $E$  à  $n$  éléments dans un ensemble  $F$  à  $p$  éléments.

1. Calculer  $s_{n,1}$ ,  $s_{n,n}$ ,  $s_{n,p}$  pour  $p > n$ .
2. Pour  $n \geq 2$  et  $p \geq 1$ , montrer que l'on a  $s_{n,p} = p(s_{n-1,p} + s_{n-1,p-1})$ .
3. Dresser un tableau analogue à celui du triangle de Pascal donnant les valeurs de  $s_{n,p}$  pour  $1 \leq p \leq n \leq 6$ .
4. Établir la formule  $\sum_{k=1}^p \binom{p}{k} s_{n,k} = p^k$ .

#### Exercice 38

On suppose qu'une personne ne peut avoir plus de 2 000 000 de cheveux sur la tête. Sachant qu'il y a strictement plus de 58 000 000 de personnes en France, montrer qu'au moins 30 personnes dans le pays ont exactement le même nombre de cheveux sur la tête.

#### Exercice 39

Compter le nombre de régions du plan délimitées par  $n$  droites du plan non parallèles 2 à 2 et non concourantes 3 à 3.

Réponse :  $\frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$

**Exercice 40**

Soit  $E$  un ensemble fini de cardinal  $n > 0$ , calculer la somme  $\sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \text{card}(X)$ .

