

Dénombrement à maîtriser

Ex. 1 — De combien de façons différentes peut-on choisir p entiers (x_1, x_2, \dots, x_p) dans $\llbracket 1 ; n \rrbracket$ de façon à ce que $x_1 < x_2 < \dots < x_p$?

Ex. 2 — On dispose de 10 jetons de Scrabble portant les lettres de l'alphabet de A à J .

1. Combien de mots peut-on écrire avec ces dix lettres ?
2. Combien de mots peut-on écrire avec ces dix lettres où B, A et C apparaissent dans cet ordre et côte à côte ?
3. Combien de mots peut-on écrire avec ces dix lettres où B, A et C apparaissent dans cet ordre ?

Ex. 3 — 1. Combien le mot *livre* possède-t-il d'anagrammes ? et le mot *feuille* ? et le mot *Mississippi* ?

2. Quel est le coefficient de $a^3b^4c^2d$ dans $(a + b + c + d)^{10}$?

Ex. 4 — Un jeu comporte 32 cartes dont 8 par couleur. Une main est constitué de 8 cartes non ordonnées.

1. Quel est le nombre de main possibles ?
2. Combien de mains contiennent un as ?
3. Combien comprennent au moins un cœur ou une dame ?
4. Combien ne contiennent que des cartes de deux couleurs au plus ?

Ex. 5 — Une urne contient 10 boules noires numérotées, 5 boules blanches numérotées et 3 boules rouges numérotées. On tire simultanément 4 boules dans l'urne.

1. Nombre de tirages possibles ?
2. Nombre de tirages contenant au moins une boule noire ?
3. Nombre de tirages contenant autant de boules blanches que de rouge ?
4. Nombre de tirages contenant les trois couleurs ?

Ex. 6 — Pour payer l'autoroute, une personne doit mettre 20 € dans un automate qui n'accepte que les pièces de 1 € et 2 €. Supposant qu'elle ait la monnaie suffisante, de combien de façons peut-elle payer ? (On

tient compte de l'ordre d'introduction des pièces dans l'appareil).

Ex. 7 — On veut distribuer 7 prospectus dans 10 boîtes aux lettres nominatives. De combien de façons peut-on le faire si

1. on met au plus un prospectus par boîte et les prospectus sont identiques ?
2. on met au plus un prospectus par boîte et les prospectus sont différents ?
3. on met un nombre quelconque de prospectus par boîte et les prospectus sont tous différents ?
4. on met un nombre quelconque de prospectus par boîte et les prospectus sont identiques ?

Ex. 8 — **PROBLÈME DES RENCONTRES** Lors d'un dîner, 5 personnes disposent leur chapeau au vestiaire. Au moment du départ, les convives un peu pressés reprennent au hasard chacun un chapeau. Combien y a-t-il de possibilités au total ? Combien y a-t-il de possibilités pour que personne ne reprenne son chapeau ?

Ex. 9 — Dans le quadrillage \mathbb{N}^2 , on appelle chemin croissant tout parcours qui suit le quadrillage en se déplaçant uniquement vers la droite et vers le haut.

1. Combien y a-t-il de chemins croissants de longueur N ? Combien de points distincts permettent-ils d'atteindre ?
2. A et B sont les points de coordonnées respectives $(0, 0)$ et (p, n) .
Combien de chemins croissants y a-t-il pour aller de A à B ?
3. On appelle chemin strictement croissant reliant A à B les chemins tels qu'on ne fait jamais deux pas consécutifs vers la droite. Combien y-a-t-il de tels chemins ?

Ex. 10 — Soit $E = \llbracket 0 ; n \rrbracket$.

1. Combien y'a-t-il de couples (x, y) dans E^2 ?
2. Combien de couples $(x, y) \in E^2$ tels que
 - a) $x + y = n$?
 - b) $x \neq y$?
 - c) $x \leq y$?
 - d) $x < y$?
 - e) $x + y = k$ avec $k \in \llbracket 0 ; 2n \rrbracket$?

Ex. 11 — Soient p et q deux entiers. Dénombrer les mots écrits avec uniquement des 0 et des 1 :

1. comportant $p + q$ occurrences de 0 ou de 1 ;

- comportant p occurrences de 0 et q occurrences de 1 ;
- comportant p occurrences de 0 et q occurrences de 1, sans que deux 0 ne soient consécutifs ;
- comportant p occurrences de 0 et q occurrences de 1 avec au plus une série de 0 ; deux séries de 0 ; k séries de 0.

Entraînement

Ex. 12 — On note A l'ensemble des nombres de 6 chiffres formés avec les chiffres 1, 2, 3, ..., 9.

- Combien y a-t-il d'éléments de A ?
- Combien y a-t-il d'éléments de A dont tous les chiffres sont pairs ?
- Combien y a-t-il d'éléments de A dont tous les chiffres sont différents ?
- Combien y a-t-il d'éléments de A dont tous les chiffres forment une suite croissante strictement ?

Ex. 13 — Soit E un ensemble de cardinal n .

- Déterminer le nombre de couples (A, B) de parties de E vérifiant $B \subset A$.
INDICATION : Discuter suivant le nombre d'éléments de A .
- En déduire le nombre de couples (A, B) de parties de E vérifiant $A \cap B = \emptyset$.
- En déduire le nombre de triplets (A, B, C) de parties de E vérifiant $A \sqcup B \sqcup C = E$. (la notation de la réunion avec des symboles à angles droit : $A \sqcup B \sqcup C$ signifie que les ensembles sont 2 à 2 disjoints)
- Retrouver ce dernier résultat par un raisonnement direct. Généraliser.

Ex. 14 — Soit E un ensemble fini, non vide, de cardinal n , A et B deux parties de E de cardinaux respectifs a et b . On note c le cardinal de $A \cup B$. Calculer $\text{card} A \cap B$, $\text{card} \bar{A} \cap B$, $\text{card} A \cap \bar{B}$, $\text{card} \bar{A} \cap \bar{B}$, $\text{card} \bar{A} \cup B$, $\text{card} A \cup \bar{B}$, $\text{card} \bar{A} \cup \bar{B}$, en fonction de a , b , c et n .

Ex. 15 — Un gardien de zoo donne à manger à ses 13 singes.

- Il distribue ses 8 fruits différents (une pomme, une banane, etc...). Combien y a-t-il de distributions possibles
 - s'il donne au plus un fruit à chaque singe ?
 - si chaque singe peut recevoir de 0 à 8 fruits ?
- Mêmes questions si les 8 fruits sont 8 pommes Golden identiques.

Ex. 16 — Soit Ω l'ensemble des nombres entiers naturels formés de 4 chiffres pris dans $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Soit A le sous-ensemble de Ω dont les éléments ont 4 chiffres différents, B le sous-ensemble de Ω dont les éléments ont exactement un chiffre doublé, C celui dont les éléments ont exactement 2 chiffres distincts doublés, D celui dont les éléments ont exactement un chiffre triplé, E celui dont les éléments ont 4 fois le même chiffre.

- Calculer le cardinal de Ω, A, B, C, D et E .
- Montrer que (A, B, C, D, E) forme une partition de Ω .
- On additionne tous les nombres de Ω . Quelle est la somme trouvée ?

Ex. 17 — On dispose de 32 joueurs de tennis. De combien de façons peut-on organiser le premier tour d'un tournoi de tennis en simple ? en double ? en simple de manière à ce que les joueurs 1 et 2 ne puissent pas se rencontrer avant la finale ?

Ex. 18 — Combien de mots peut-on former avec les lettres A, B, C, D et E, en utilisant une seule fois chaque lettre ? Combien de mot de 5 lettres commencent par A ? Combien de mot de 5 lettres commencent par A et finissent par B ? Combien de mot de 5 lettres où le A apparaît avant le B ?

Ex. 19 — Dans le plan, on considère n points M_1, M_2, \dots, M_n tels que trois quelconques ne soient pas alignés. Quel est le nombre de polygones à n cotés que l'on peut construire avec ces points ?

Ex. 20 — Un jury est composé de 10 membres tirés au sort parmi 8 hommes et 9 femmes.

- Combien de jurys différents peut-on former ?
- Combien de jurys comportant 5 hommes et 5 femmes peut-on former ?
- Monsieur X refuse de siéger avec Madame Y. Combien de jurys peut-on former dans ces conditions ?

Ex. 21 — Combien y a-t-il de surjections de E vers F lorsque $\text{card}(E) = n + 1$ et $\text{card}(F) = n$?

Répondre à cette question lorsque $\text{card}(E) = n + 2$ et lorsque $\text{card}(E) = n + 3$.

Ex. 22 — 1. Combien y a-t-il d'élèves dans une classe où 27 étudient l'anglais, 15 l'allemand et 9 les deux langues, sachant que chaque élève étudie au moins une langue ?

2. Dans une classe de 31 élèves, 16 étudient l'anglais, 13 l'espagnol, 14 l'allemand, 4 l'anglais et l'espagnol, 6 l'espagnol et l'allemand, 5 l'anglais et l'allemand. Combien étudient les 3 langues ?

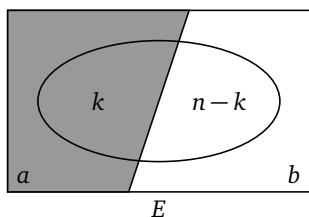
Ex. 23 — On dispose de 8 boules numérotées et de quatre sacs numérotés. On répartit les 8 boules dans les sacs. Combien y a-t-il de répartitions possibles ? Combien de répartitions telles qu'aucun sac ne soit vide ?

Ex. 24 — Dans une urne on place n boules blanche et une seule noire. On tire simultanément k boules. Déterminer successivement le nombre de tirages sans boules noires, avec au moins une boule noire, possibles en tout. Qu'obtenez-vous ?

Ex. 25 — FORMULE DE VANDERMONDE Démontrer que, pour a, b et n entiers naturels,

$$\sum_{k=0}^{a+b} \binom{a}{k} \binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$$

On pourrait compter de deux façons différentes le nombre de sous-ensembles à n éléments d'un ensemble à $a + b$ éléments.



Divers

Ex. 26 — Combien peut-on former de nombres plus grands que 2000 avec les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, en ne répétant pas le même chiffre dans chacun des nombres ?

Ex. 27 — Combien y a-t-il d'anagrammes du mot *anagramme* ? Si on range ces mots par ordre alphabétique, à quelle place apparaît le mot *anagramme* ?

Ex. 28 — Calculer la somme des nombres obtenus en permutant les chiffres 1, 2, 3, 5, 8 de toutes les façons possibles.

Ex. 29 — De combien de façons différentes peut-on payer une somme de 1 € à l'aide de pièces de 1 et 2 centimes exclusivement ?

Ex. 30 — Soit $A = \{a, b, c\}$ un alphabet de trois lettres. Combien y a-t-il de mots de 7 lettres construits à

partir de l'alphabet A , commençant par a ou b et contenant au moins une fois la lettre c ?

Ex. 31 — Une classe comporte 44 élèves. De combien de façons peut-on le diviser en deux groupes de 22 ? En 4 groupes de 11 élèves ? Plus généralement, combien y a-t-il de partitions en n parties de p éléments pour un ensemble de cardinal np ?

Un peu plus abstrait...

Ex. 32 — Soit $A = \{a, b, c, d\}$ un alphabet de quatre lettres et $n \geq 4$ un entier. Dénombrer l'ensemble des mots de longueur n sur l'alphabet A dans lesquels chaque lettre apparaît au moins une fois.

Ex. 33 — On place n points sur un cercle.

1. Dénombrer le nombre de cordes du cercles possibles (i.e. de segments joignant deux de nos n points).
2. Sans compter les n points de départ, en combien de points différents se coupent les cordes précédentes ? (On suppose les cordes trois à trois non concourantes).

Ex. 34 — Soit E un ensemble fini à n éléments. Trouver le cardinal des ensembles suivants :

1. $F = \{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, A \cup B = E \text{ et } A \cap B = \emptyset\}$,
2. $G_A = \{B \in \mathcal{P}(E), A \cup B = E\}$ avec A une partie fixée de E à p éléments,
3. $H = \{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, A \cup B = E\}$.

Pour finir...

Ex. 35 — n couples se rencontrent et se saluent. Chaque personne serre (une fois) la main de chacune des autres (sauf celle de son conjoint). Combien y a-t-il de poignées de main échangées ?

Ex. 36 — Un code d'immeuble est formé d'une suite de deux chiffre (de 0 à 9), puis une lettre (A ou B), puis deux chiffre.

1. Combien y a-t-il de codes possibles ?
2. Combien de code contenant la lettre A et deux fois le chiffre 7 exactement ?
3. Ayant oublié le code d'un immeuble, mais constatant que les touches 2, 4, 5 et B sont plus usées

que les autres, combien de combinaisons doit-on tester pour être sûr d'avoir la bonne ?

Ex. 37 — Soit n et p deux entiers naturels non nuls. On note $s_{n,p}$ le nombre de surjections d'un ensemble E à n éléments dans un ensemble F à p éléments.

1. Calculer $s_{n,1}$, $s_{n,n}$, $s_{n,p}$ pour $p > n$.
2. Pour $n \geq 2$ et $p \geq 1$, montrer que l'on a $s_{n,p} = p(s_{n-1,p} + s_{n-1,p-1})$.
3. Dresser un tableau analogue à celui du triangle de Pascal donnant les valeurs de $s_{n,p}$ pour $1 \leq p \leq n \leq 6$.
4. Établir la formule $\sum_{k=1}^p \binom{p}{k} s_{n,k} = p^n$.

Ex. 38 — On suppose qu'une personne ne peut avoir plus de 2 000 000 de cheveux sur la tête. Sachant qu'il y a strictement plus de 58 000 000 de personnes en France, montrer qu'au moins 30 personnes dans le pays ont exactement le même nombre de cheveux sur la tête.

Ex. 39 — Compter le nombre de régions du plan délimitées par n droites du plan non parallèles 2 à 2 et non concourantes 3 à 3.
(Réponse : $\frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$)

Ex. 40 — Soit E un ensemble fini de cardinal $n > 0$, calculer la somme $\sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \text{card}(X)$.

