## Dénombrement à maîtriser

**Ex. 1** — De combien de façons différentes peut-on choisir $p$ entiers $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ dans $[\![ 1 ; n ]\!]$ de façon à ce que $x_1 < x_2 < \ldots < x_p$ ?

**Ex. 2** — On dispose de 10 jetons de Scrabble portant les lettres de l'alphabet de $A$ à $J$.

1. Combien de mots peut-on écrire avec ces dix lettres ?
2. Combien de mots peut-on écrire avec ces dix lettres où $B$, $A$ et $C$ apparaissent dans cet ordre et côte à côte ?
3. Combien de mots peut-on écrire avec ces dix lettres où $B$, $A$ et $C$ apparaissent dans cet ordre ?

**Ex. 3** —
1. Combien le mot *livre* possède-t-il d'anagrammes ? et le mot *feuille* ? et le mot *Mississipi* ?
2. Quel est le coefficient de $a^3b^4c^2d$ dans $(a+b+c+d)^{10}$

**Ex. 4** — Un jeu comporte 32 cartes dont 8 par couleur. Une main est constitué de 8 cartes non ordonnées.

1. Quel est le nombre de main possibles ?
2. Combien de mains contiennent un as ?
3. Combien comprennent au moins un cœur ou une dame ?
4. Combien ne contiennent que des cartes de deux couleurs au plus ?

**Ex. 5** — Une urne contient 10 boules noires numérotées, 5 boules blanches numérotées et 3 boules rouges numérotées. On tire simultanément 4 boules dans l'urne.

1. Nombre de tirages possibles ?
2. Nombre de tirages contenant au moins une boule noire ?
3. Nombre de tirages contenant autant de boules blanches que de rouge ?
4. Nombre de tirages contenant les trois couleurs ?

**Ex. 6** — Pour payer l'autoroute, une personne doit mettre 20 € dans un automate qui n'accepte que les pièces de 1 € et 2 €. Supposant qu'elle ait la monnaie suffisante, de combien de façons peut-elle payer ? (On tient compte de l'ordre d'introduction des pièces dans l'appareil).

**Ex. 7** — On veut distribuer 7 prospectus dans 10 boîtes aux lettres nominatives. De combien de façons peut-on le faire si

1. on met au plus un prospectus par boîte et les prospectus sont identiques ?
2. on met au plus un prospectus par boîte et les prospectus sont différents ?
3. on met un nombre quelconque de prospectus par boîte et les prospectus sont tous différents ?
4. on met un nombre quelconque de prospectus par boîte et les prospectus sont identiques ?

**Ex. 8** — Problème des rencontres Lors d'un dîner, 5 personnes disposent leur chapeau au vestiaire. Au moment du départ, les convives un peu pressés reprennent au hasard chacun un chapeau. Combien y a-t-il de possibilités au total ? Combien y a-t-il de possibilités pour que personne ne reprenne son chapeau ?

**Ex. 9** — Dans le quadrillage $\mathbb{N}^2$, on appelle chemin croissant tout parcours qui suit le quadrillage en se déplaçant uniquement vers la droite et vers le haut.

1. Combien y a-t-il de chemins croissants de longueur $N$ ? Combien de points distincts permettent-ils d'atteindre ?
2. $A$ et $B$ sont les points de coordonnées respectives $(0,0)$ et $(p,n)$.
   Combien de chemins croissants y a-t-il pour aller de $A$ à $B$ ?
3. On appelle chemin strictement croissant reliant $A$ à $B$ les chemins tels qu'on ne fait jamais deux pas consécutifs vers la droite. Combien y-a-t'il de tels chemins ?

**Ex. 10** — Soit $E = [\![0 ; n]\!]$.

1. Combien y'a-t-il de couples $(x, y)$ dans $E^2$ ?
2. Combien de couples $(x, y) \in E^2$ tels que
   a) $x + y = n$ ?
   b) $x \neq y$ ?
   c) $x \leqslant y$ ?
   d) $x < y$ ?
   e) $x + y = k$ avec $k \in [\![0 ; 2n]\!]$ ?

**Ex. 11** — Soient $p$ et $q$ deux entiers. Dénombrer les mots écrits avec uniquement des 0 et des 1 :

1. comportant $p + q$ occurrences de 0 ou de 1 ;

2. comportant $p$ occurrences de 0 et $q$ occurrences de 1 ;
3. comportant $p$ occurrences de 0 et $q$ occurrences de 1, sans que deux 0 ne soient consécutifs ;
4. comportant $p$ occurrences de 0 et $q$ occurrences de 1 avec au plus une série de 0 ; deux séries de 0 ; $k$ séries de 0.

### Entraînement

**Ex. 12** — On note $A$ l'ensemble des nombres de 6 chiffres formés avec le chiffres 1, 2, 3, ..., 9.

1. Combien y a-t-il d'éléments de $A$ ?
2. Combien y a-t-il d'éléments de $A$ dont tous les chiffres sont pairs ?
3. Combien y a-t-il d'éléments de $A$ dont tous les chiffres sont différents ?
4. Combien y a-t-il d'éléments de $A$ dont tous les chiffres forment une suite croissante strictement ?

**Ex. 13** — Soit $E$ un ensemble de cardinal $n$.

1. Déterminer le nombre de couples $(A, B)$ de parties de $E$ vérifiant $B \subset A$.
   INDICATION : *Discuter suivant le nombre d'éléments de A.*
2. En déduire le nombre de couples $(A, B)$ de parties de $E$ vérifiant $A \cap B = \varnothing$.
3. En déduire le nombre de triplets $(A, B, C)$ de parties de $E$ vérifiant $A \sqcup B \sqcup C = E$. (la notation de la réunion avec des symboles à angles droit : $A \sqcup B \sqcup C$ signifie que les ensembles sont 2 à 2 disjoints)
4. Retrouver ce dernier résultat par un raisonnement direct. Généraliser.

**Ex. 14** — Soit $E$ un ensemble fini, non vide, de cardinal $n$, $A$ et $B$ deux parties de $E$ de cardinaux respectifs $a$ et $b$. On note $c$ le cardinal de $A \cup B$. Calculer $\operatorname{card} A \cap B$, $\operatorname{card} \overline{A} \cap B$, $\operatorname{card} A \cap \overline{B}$, $\operatorname{card} \overline{A} \cap \overline{B}$, $\operatorname{card} \overline{A} \cup B$, $\operatorname{card} A \cup \overline{B}$, $\operatorname{card} \overline{A} \cup \overline{B}$, en fonction de $a$, $b$, $c$ et $n$.

**Ex. 15** — Un gardien de zoo donne à manger à ses 13 singes.

1. Il distribue ses 8 fruits différents (une pomme, une banane, etc...). Combien y a-t-il de distributions possibles
   a) s'il donne au plus un fruit à chaque singe ?
   b) si chaque singe peut recevoir de 0 à 8 fruits ?
2. Mêmes questions si les 8 fruits sont 8 pommes Golden identiques.

**Ex. 16** — Soit $\Omega$ l'ensemble des nombres entiers naturels formés de 4 chiffres pris dans $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
Soit $A$ le sous-ensemble de $\Omega$ dont les éléments ont 4 chiffres différents, $B$ le sous-ensemble de $\Omega$ dont les éléments ont exactement un chiffre doublé, $C$ celui dont les éléments ont exactement 2 chiffres distincts doublés, $D$ celui dont les éléments ont exactement un chiffre triplé, $E$ celui dont les éléments ont 4 fois le même chiffre.

1. Calculer le cardinal de $\Omega$, $A$, $B$, $C$, $D$ et $E$.
2. Montrer que $(A, B, C, D, E)$ forme une partition de $\Omega$.
3. On additionne tous les nombres de $\Omega$. Quelle est la somme trouvée ?

**Ex. 17** — On dispose de 32 joueurs de tennis. De combien de façons peut-on organiser le premier tour d'un tournoi de tennis en simple ? en double ? en simple de manière à ce que les joueurs 1 et 2 ne puissent pas se rencontrer avant la finale ?

**Ex. 18** — Combien de mots peut-on former avec les lettres A, B, C, D et E, en utilisant une seule fois chaque lettre ? Combien de mot de 5 lettres commencent par A ? Combien de mot de 5 lettres commencent par A et finissent par B ? Combien de mot de 5 lettres où le A apparaît avant le B ?

**Ex. 19** — Dans le plan, on considère $n$ points $M_1, M_2, \dots, M_n$ tels que trois quelconques ne soient pas alignés. Quel est le nombre de polygones à $n$ cotés que l'on peut construire avec ces points ?

**Ex. 20** — Un jury est composé de 10 membres tirés au sort parmi 8 hommes et 9 femmes.

1. Combien de jurys différents peut-on former ?
2. Combien de jurys comportant 5 hommes et 5 femmes peut-on former ?
3. Monsieur X refuse de siéger avec Madame Y. Combien de jurys peut-on former dans ces conditions ?

**Ex. 21** — Combien y-a-t-il de surjections de $E$ vers $F$ lorsque $\operatorname{card}(E) = n + 1$ et $\operatorname{card}(F) = n$ ?
Répondre à cette question lorsque $\operatorname{card}(E) = n + 2$ et lorsque $\operatorname{card}(E) = n + 3$.

**Ex. 22** — 1. Combien y a-t-il d'élèves dans une classe où 27 étudient l'anglais, 15 l'allemand et 9 les deux langues, sachant que chaque élève étudie au moins une langue ?

2. Dans une classe de 31 élèves, 16 étudient l'anglais, 13 l'espagnol, 14 l'allemand, 4 l'anglais et l'espagnol, 6 l'espagnol et l'allemand, 5 l(anglis et l'allemand. Combien étudient les 3 langues ?

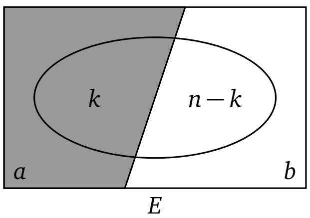
**Ex. 23** — On dispose de 8 boules numérotées et de quatre sacs numérotés. On répartir les 8 boules dans les sacs. Combien y a-t-il de répartitions possibles ? Combien de répartitions telles qu'aucun sac ne soit vide ?

**Ex. 24** — Dans une urne on place $n$ boules blanche et une seule noire. On tire simultanément $k$ boules. Déterminer successivement le nombre de tirages sans boules noires, avec au moins une boule noire, possibles en tout. Qu'obtenez-vous ?

**Ex. 25** — Formule de Vandermonde Démontrer que, pour $a$, $b$ et $n$ entiers naturels,

$$\sum_{k=0}^{a+b} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$$

On pourrait compter de deux façons différentes le nombre de sous-ensembles à $n$ éléments d'un ensemble à $a+b$ éléments.




### Divers

**Ex. 26** — Combien peut-on former de nombres plus grands que 2000 avec les chiffres $0, 1, 2, 3, 4$, en ne répétant pas le même chiffre dans chacun des nombres ?

**Ex. 27** — Combien y a-t-il d'anagrammes du mot *anagramme* ? Si on range ces mots par ordre alphabétique, à quelle place apparaît le mot *anagramme* ?

**Ex. 28** — Calculer la somme des nombres obtenus en permutant les chiffres $1, 2, 3, 5, 8$ de toutes les façons possibles.

**Ex. 29** — De combien de façons différentes peut-on payer une somme de 1 € à l'aide de pièces de 1 et 2 centimes exclusivement ?

**Ex. 30** — Soit $A = \{a, b, c\}$ un alphabet de trois lettres. Combien y a-t-il de mots de 7 lettres construits à partir de l'alphabet $A$, commençant par $a$ ou $b$ et contenant au moins une fois la lettre $c$ ?

**Ex. 31** — Une classe comporte 44 élèves. De combien de façons peut-on le diviser en deux groupes de TD de 22 ? En 4 groupes de 11 élèves ? Plus généralement, combien y a-t-il de partitions en $n$ parties de $p$ éléments pour un ensemble de cardinal $np$ ?

### Un peu plus abstrait...

**Ex. 32** — Soit $A = \{a, b, c, d\}$ un alphabet de quatre lettres et $n \geqslant 4$ un entier. Dénombrer l'ensemble des mots de longueur $n$ sur l'alphabet $A$ dans lesquels chaque lettre apparaît au moins une fois.

**Ex. 33** — On place $n$ points sur un cercle.

1. Dénombrer le nombre de cordes du cercles possibles (*i.e.* de segments joignant deux de nos $n$ points).
2. Sans compter les $n$ points de départ, en combien de points différents se coupent les cordes précédentes ? (On suppose les cordes trois à trois non concourantes).

**Ex. 34** — Soit $E$ un ensemble fini à $n$ éléments. Trouver le cardinal des ensembles suivants :

1. $F = \left\{(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2, A \cup B = E \text{ et } A \cap B = \varnothing\right\}$,
2. $G_A = \left\{B \in \mathscr{P}(E), A \cup B = E\right\}$ avec $A$ une partie fixée de $E$ à $p$ éléments,
3. $H = \left\{(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2, A \cup B = E\right\}$.

### Pour finir...

**Ex. 35** — $n$ couples se rencontrent et se saluent. Chaque personne serre (une fois) la main de chacune des autres (sauf celle de son conjoint). Combien y a-t-il de poignées de main échangées ?

**Ex. 36** — Un code d'immeuble est formé d'une suite de deux chiffre (de 0 à 9), puis une lettre (A ou B), puis deux chiffre.

1. Combien y a-t-il de codes possibles ?
2. Combien de code contenant la lettre A et deux fois le chiffre 7 exactement ?
3. Ayant oublié le code d'un immeuble, mais constatant que les touches $2, 4, 5$ et B sont plus usées

que les autres, combien de combinaisons doit-on tester pour être sûr d'avoir la bonne ?

**Ex. 37** — Soit $n$ et $p$ deux entiers naturels non nuls. On note $s_{n,p}$ le nombre de surjections d'un ensemble $E$ à $n$ éléments dans un ensemble $F$ à $p$ éléments.

1. Calculer $s_{n,1}$, $s_{n,n}$, $s_{n,p}$ pour $p > n$.
2. Pour $n \geqslant 2$ et $p \geqslant 1$, montrer que l'on a $s_{n,p} = p\left(s_{n-1,p} + s_{n-1,p-1}\right)$.
3. Dresser un tableau analogue à celui du triangle de Pascal donnant les valeurs de $s_{n,p}$ pour $1 \leqslant p \leqslant n \leqslant 6$.
4. Établir la formule $\sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} s_{n,k} = p^k$.

**Ex. 38** — On suppose qu'une personne ne peut avoir plus de 2 000 000 de cheveux sur la tête. Sachant qu'il y a strictement plus de 58 000 000 de personnes en France, montrer qu'au moins 30 personnes dans le pays ont exactement le même nombre de cheveux sur la tête.

**Ex. 39** — Compter le nombre de régions du plan délimitées par $n$ droites du plan non parallèles 2 à 2 et non concourantes 3 à 3.
(Réponse : $\frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$)

**Ex. 40** — Soit $E$ un ensemble fini de cardinal $n > 0$, calculer la somme $\sum_{X \in \mathscr{P}(E)} \operatorname{card}(X)$.