Dénombrement

BCPST 1, 12/2017

Dénombrement à maîtriser

Exercice 1

De combien de façons différentes peut-on choisir p entiers $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ dans $[\![1 ; n]\!]$ de façon à ce que $x_1 < x_2 < \ldots < x_p$?

Exercice 2

On dispose de 10 jetons de Scrabble portant les lettres de l'alphabet de A à J.

1. Combien de mots peut-on écrire avec ces dix lettres ?
2. Combien de mots peut-on écrire avec ces dix lettres où B, A et C apparaissent dans cet ordre et côte à côte ?
3. Combien de mots peut-on écrire avec ces dix lettres où B, A et C apparaissent dans cet ordre ?

Exercice 3

1. Combien le mot *livre* possède-t-il d'anagrammes ? et le mot *feuille* ? et le mot *Mississipi* ?
2. Quel est le coefficient de $a^3b^4c^2d$ dans $(a+b+c+d)^{10}$

Exercice 4

Un jeu comporte 32 cartes dont 8 par couleur. Une main est constitué de 8 cartes non ordonnées.

1. Quel est le nombre de main possibles ?
2. Combien de mains contiennent un as ?
3. Combien comprennent au moins un cœur ou une dame ?
4. Combien ne contiennent que des cartes de deux couleurs au plus ?

Exercice 5

Une urne contient 10 boules noires numérotées, 5 boules blanches numérotées et 3 boules rouges numérotées. On tire simultanément 4 boules dans l'urne. Quel est le nombre...

1. ... de tirages possibles ?
2. ... de tirages contenant au moins une boule noire ?
3. ... de tirages contenant autant de boules blanches que de rouge ?
4. ... de tirages contenant les trois couleurs ?

Exercice 6

Pour payer l'autoroute, une personne doit mettre 20 € dans un automate qui n'accepte que les pièces de 1 € et 2 €. Supposant qu'elle ait la monnaie suffisante, de combien de façons peut-elle payer ? (On tient compte de l'ordre d'introduction des pièces dans l'appareil).

Exercice 7

On veut distribuer 7 prospectus dans 10 boîtes aux lettres nominatives. De combien de façons peut-on le faire si

1. on met au plus un prospectus par boîte et les prospectus sont identiques ?
2. on met au plus un prospectus par boîte et les prospectus sont différents ?
3. on met un nombre quelconque de prospectus par boîte et les prospectus sont tous différents ?
4. on met un nombre quelconque de prospectus par boîte et les prospectus sont identiques ?

Exercice 8 — Problème des rencontres

Lors d'un dîner, 5 personnes disposent leur chapeau au vestiaire. Au moment du départ, les convives un peu pressés reprennent au hasard chacun un chapeau. Combien y a-t-il de possibilités au total ? Combien y a-t-il de possibilités pour que personne ne reprenne son chapeau ?

Exercice 9

Dans le quadrillage $\mathbb{N}^2$, on appelle chemin croissant tout parcours qui suit le quadrillage en se déplaçant uniquement vers la droite et vers le haut.

1. Combien y a-t-il de chemins croissants de longueur N ? Combien de points distincts permettent-ils d'atteindre ?
2. A et B sont les points de coordonnées respectives $(0, 0)$ et (p, n).
   Combien de chemins croissants y a-t-il pour aller de A à B ?
3. On appelle chemin strictement croissant reliant A à B les chemins tels qu'on ne fait jamais deux pas consécutifs vers la droite. Combien y-a-t'il de tels chemins ?

Exercice 10

Soit $E = [\![0 ; n]\!]$.

1. Combien y'a-t-il de couples (x, y) dans E^2 ?
2. Combien de couples $(x, y) \in E^2$ tels que
   a) $x + y = n$?
   b) $x \neq y$?
   c) $x \leqslant y$?
   d) $x < y$?
   e) $x + y = k$ avec $k \in [\![0 ; 2n]\!]$?

Exercice 11

Soient p et q deux entiers. Dénombrer les mots écrits avec uniquement des 0 et des 1 :

1. comportant $p + q$ occurrences de 0 ou de 1 ;
2. comportant p occurrences de 0 et q occurrences de 1 ;

3. comportant p occurrences de 0 et q occurrences de 1, sans que deux 0 ne soient consécutifs ;
4. comportant p occurrences de 0 et q occurrences de 1 avec au plus une série de 0 ; deux séries de 0 ; k séries de 0.

Entraînement

Exercice 12

On note A l'ensemble des nombres de 6 chiffres formés avec le chiffres 1, 2, 3, ..., 9.

1. Combien y a-t-il d'éléments de A?
2. Combien y a-t-il d'éléments de A dont tous les chiffres sont pairs ?
3. Combien y a-t-il d'éléments de A dont tous les chiffres sont différents ?
4. Combien y a-t-il d'éléments de A dont tous les chiffres forment une suite croissante strictement ?

Exercice 13

Soit E un ensemble de cardinal n.

1. Déterminer le nombre de couples (A,B) de parties de E vérifiant $B \subset A$.

   INDICATION : *Discuter suivant le nombre d'éléments de A.*
2. En déduire le nombre de couples (A,B) de parties de E vérifiant $A \cap B = \varnothing$.
3. En déduire le nombre de triplets (A,B,C) de parties de E vérifiant $A \sqcup B \sqcup C = E$. (la notation de la réunion avec des symboles à angles droit : $A \sqcup B \sqcup C$ signifie que les ensembles sont 2 à 2 disjoints)
4. Retrouver ce dernier résultat par un raisonnement direct. Généraliser.

Exercice 14

Soit E un ensemble fini, non vide, de cardinal n, A et B deux parties de E de cardinaux respectifs a et b. On note c le cardinal de $A \cup B$. Calculer card $A \cap B$, card $\overline{A} \cap B$, card $A \cap \overline{B}$, card $\overline{A} \cap \overline{B}$, card $\overline{A} \cup B$, card $A \cup \overline{B}$, card $\overline{A} \cup \overline{B}$, en fonction de a, b, c et n.

Exercice 15

Un gardien de zoo donne à manger à ses 13 singes.

1. Il distribue ses 8 fruits différents (une pomme, une banane, etc...). Combien y a-t-il de distributions possibles
   a) s'il donne au plus un fruit à chaque singe ?
   b) si chaque singe peut recevoir de 0 à 8 fruits ?
2. Mêmes questions si les 8 fruits sont 8 pommes Golden identiques.

Exercice 16

Soit Ω l'ensemble des nombres entiers naturels formés de 4 chiffres pris dans $\{1,2,3,4,5\}$.

Soit A le sous-ensemble de Ω dont les éléments ont 4 chiffres différents, B le sous-ensemble de Ω dont les éléments ont exactement un chiffre doublé, C celui dont les éléments ont exactement 2 chiffres distincts doublés, D celui dont les éléments ont exactement un chiffre triplé, E celui dont les éléments ont 4 fois le même chiffre.

1. Calculer le cardinal de Ω , A , B , C , D et E.
2. Montrer que (A,B,C,D,E) forme une partition de Ω.
3. On additionne tous les nombres de Ω. Quelle est la somme trouvée ?

Exercice 17

On dispose de 32 joueurs de tennis. De combien de façons peut-on organiser le premier tour d'un tournoi de tennis en simple ? en double ? en simple de manière à ce que les joueurs 1 et 2 ne puissent pas se rencontrer avant la finale ?

Exercice 18

Combien de mots peut-on former avec les lettres A, B, C, D et E, en utilisant une seule fois chaque lettre ? Combien de mot de 5 lettres commencent par A ? Combien de mot de 5 lettres commencent par A et finissent par B ? Combien de mot de 5 lettres où le A apparaît avant le B ?

Exercice 19

Dans le plan, on considère n points M_1, $M_2, \ldots, M_n$ tels que trois quelconques ne soient pas alignés. Quel est le nombre de polygones à n cotés que l'on peut construire avec ces points ?

Exercice 20

Un jury est composé de 10 membres tirés au sort parmi 8 hommes et 9 femmes.

1. Combien de jurys différents peut-on former ?
2. Combien de jurys comportant 5 hommes et 5 femmes peut-on former ?
3. Monsieur X refuse de siéger avec Madame Y. Combien de jurys peut-on former dans ces conditions ?

Exercice 21

Combien y-a-t-il de surjections de E vers F lorsque $\mathrm{card}(E) = n+1$ et $\mathrm{card}(F) = n$?

Répondre à cette question lorsque $\mathrm{card}(E) = n+2$ et lorsque $\mathrm{card}(E) = n+3$.

Exercice 22

1. Combien y a-t-il d'élèves dans une classe où 27 étudient l'anglais, 15 l'allemand et 9 les deux langues, sachant que chaque élève étudie au moins une langue ?
2. Dans une classe de 31 élèves, 16 étudient l'anglais, 13 l'espagnol, 14 l'allemand, 4 l'anglais et l'espagnol, 6 l'espagnol et l'allemand, 5 l(anglis et l'allemand. Combien étudient les 3 langues ?

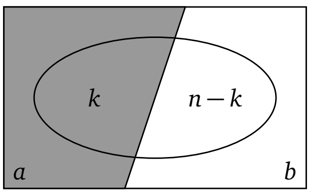
Exercice 23
On dispose de 8 boules numérotées et de quatre sacs numérotés. On répartir les 8 boules dans les sacs. Combien y a-t-il de répartitions possibles ? Combien de répartitions telles qu'aucun sac ne soit vide ?

Exercice 24
Dans une urne on place n boules blanche et une seule noire. On tire simultanément k boules. Déterminer successivement le nombre de tirages sans boules noires, avec au moins une boule noire, possibles en tout. Qu'obtenez-vous ?

Exercice 25 — Formule de Vandermonde
Démontrer que, pour a, b et n entiers naturels,

$$\sum_{k=0}^{a+b}\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}=\binom{a+b}{n}$$

On pourrait compter de deux façons différentes le nombre de sous-ensembles à n éléments d'un ensemble à $a+b$ éléments.



Divers

Exercice 26
Combien peut-on former de nombres plus grands que 2000 avec les chiffres $0, 1, 2, 3, 4$, en ne répétant pas le même chiffre dans chacun des nombres ?

Exercice 27
Combien y a-t-il d'anagrammes du mot *anagramme* ? Si on range ces mots par ordre alphabétique, à quelle place apparaît le mot *anagramme* ?

Exercice 28
Calculer la somme des nombres obtenus en permutant les chiffres $1, 2, 3, 5, 8$ de toutes les façons possibles.

Exercice 29
De combien de façons différentes peut-on payer une somme de 1 € à l'aide de pièces de 1 et 2 centimes exclusivement ?

Exercice 30
Soit $A=\{a, b, c\}$ un alphabet de trois lettres. Combien y a-t-il de mots de 7 lettres construits à partir de l'alphabet A, commençant par a ou b et contenant au moins une fois la lettre c ?

Exercice 31
Une classe comporte 44 élèves. De combien de façons peut-on le diviser en deux groupes de TD de 22 ? En 4 groupes de 11 élèves ? Plus généralement, combien y a-t-il de partitions en n parties de p éléments pour un ensemble de cardinal np ?

Un peu plus abstrait...

Exercice 32
Soit $A=\{a, b, c, d\}$ un alphabet de quatre lettres et $n \geqslant 4$ un entier. Dénombrer l'ensemble des mots de longueur n sur l'alphabet A dans lesquels chaque lettre apparaît au moins une fois.

Exercice 33
On place n points sur un cercle.
1. Dénombrer le nombre de cordes du cercles possibles (*i.e.* de segments joignant deux de nos n points).
2. Sans compter les n points de départ, en combien de points différents se coupent les cordes précédentes ? (On suppose les cordes trois à trois non concourantes).

Exercice 34
Soit E un ensemble fini à n éléments. Trouver le cardinal des ensembles suivants :
1. $F=\left\{(A,B)\in\mathscr{P}(E)^2, A\cup B=E \text{ et } A\cap B=\varnothing\right\}$,
2. $G_A=\left\{B\in\mathscr{P}(E), A\cup B=E\right\}$ avec A une partie fixée de E à p éléments,
3. $H=\left\{(A,B)\in\mathscr{P}(E)^2, A\cup B=E\right\}$.

Pour finir...

Exercice 35
n couples se rencontrent et se saluent. Chaque personne serre (une fois) la main de chacune des autres (sauf celle de son conjoint). Combien y a-t-il de poignées de main échangées ?

Exercice 36
Un code d'immeuble est formé d'une suite de deux chiffre (de 0 à 9), puis une lettre (A ou B), puis deux chiffre.
1. Combien y a-t-il de codes possibles ?
2. Combien de code contenant la lettre A et deux fois le chiffre 7 exactement ?
3. Ayant oublié le code d'un immeuble, mais constatant que les touches 2, 4, 5 et B sont plus usées que les autres, combien de combinaisons doit-on tester pour être sûr d'avoir la bonne ?

Exercice 37
Soit n et p deux entiers naturels non nuls. On note $s_{n,p}$ le nombre de surjections d'un ensemble E à n éléments dans un ensemble F à p éléments.

1. Calculer $s_{n,1}$, $s_{n,n}$, $s_{n,p}$ pour $p > n$.
2. Pour $n \geqslant 2$ et $p \geqslant 1$, montrer que l'on a $s_{n,p} = p\left(s_{n-1,p} + s_{n-1,p-1}\right)$.
3. Dresser un tableau analogue à celui du triangle de Pascal donnant les valeurs de $s_{n,p}$ pour $1 \leqslant p \leqslant n \leqslant 6$.
4. Établir la formule $\sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} s_{n,k} = p^k$.

Exercice 38

On suppose qu'une personne ne peut avoir plus de 2 000 000 de cheveux sur la tête. Sachant qu'il y a strictement plus de 58 000 000 de personnes en France, montrer qu'au moins 30 personnes dans le pays ont exactement le même nombre de cheveux sur la tête.

Exercice 39

Compter le nombre de régions du plan délimitées par n droites du plan non parallèles 2 à 2 et non concourantes 3 à 3.

Réponse : $\frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$

Exercice 40

Soit E un ensemble fini de cardinal $n > 0$, calculer la somme $\sum_{X \in \mathscr{P}(E)} \operatorname{card}(X)$.