Module et argument

Ex. 1 — Écrire sous forme algébrique

$$\frac{1+2\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}} \quad \frac{1}{(1+2\mathrm{i})^2} \quad \frac{(1+\mathrm{i})^3}{(1-\mathrm{i})^2}$$

$$\frac{1+\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}}+\frac{1-\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}} \quad \frac{1}{1+\frac{2}{\mathrm{i}}} \quad (1+(1+(1+2\mathrm{i})^2)^{-1})$$

Ex. 2 — Exprimer sous forme algébrique les nombres complexes de modules r et d'argument t

$$r=\sqrt{2}, t=\frac{\pi}{4} \qquad r=2, t=\frac{-\pi}{3} \qquad r=2, t=\frac{2\pi}{3}$$
$$r=3, t=\frac{3\pi}{2} \qquad r=1, t=k\pi \qquad r=1, t=\frac{k\pi}{2}$$

Ex. 3 — Déterminer le module et l'argument de

$$z_1=\frac{\sqrt{6}+\mathrm{i}\sqrt{2}}{2}, \qquad z_2=1+i, \quad z=\frac{z_1}{z_2}$$

En déduire les valeurs de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$.

Ex. 4 — 1. Calculer $\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^{2017}$.

2. Résoudre $z^4=8(1-\mathrm{i}\sqrt{3})$.

Ex. 5 — Soit $u=\sqrt{2-\sqrt{2}}-\mathrm{i}\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

1. Calculer u^2 puis u^4.
2. En déduire module et argument de u.
3. Calculer $\cos\frac{3\pi}{8}$.

Ex. 6 — Simplifier les expressions ($n\in\mathbb{N}$, $\theta\in\mathbb{R}$)

$$(1+\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n, \qquad \left(\frac{1+\mathrm{i}\tan\theta}{1-\mathrm{i}\tan\theta}\right)^n$$

Ex. 7 — Soit $\theta\in\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et $z=\dfrac{1+\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta}{1-\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta}$. Déterminer $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$, $|z|$ et $\arg(z)$.

Ex. 8 — Soit $(\alpha,\beta)\in[0\,;2\pi[^2$. Déterminer le module et l'argument des nombres complexes suivants :

$$z_1=1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}; \qquad z_2=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}; \qquad z_3=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}}.$$

Ex. 9 — Soient V et V' des vecteurs d'affixes z et z', tels que $z\overline{z'}=z'\overline{z}$. Que peut-on dire sur V et V' ?

Ex. 10 — Déterminer les complexes z telles que z, $z-1$ et $1/z$ aient le même module.

Ex. 11 — Calculer $S=\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}$

INDICATION : *Interpréter cette somme comme la partie réelle d'un nombre complexe.*

Équations dans $\mathbb{C}$

Ex. 12 — 1. Chercher les solutions complexes α de l'équation $\alpha^2=-5+12\mathrm{i}$.

2. Résoudre l'équation $z^2-\sqrt{5}z-3\mathrm{i}=0$.

   INDICATION : *On pourra mettre d'abord sous forme canonique.*

Ex. 13 — Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système

$$\begin{cases} z_1+z_2=1+\mathrm{i} \\ z_1z_2=2-\mathrm{i} \end{cases}$$

Ex. 14 — Résoudre dans $\mathbb{C}$ $\;z^3=4\sqrt{2}(1+i)$.

Ex. 15 — Résoudre dans $\mathbb{C}$ $\;|z+1|=|z|+1$.

Ex. 16 — Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:

1. $z^2-2^{\theta+1}\cos\theta\, z+2^{2\theta}=0$;
2. $z^2-\dfrac{4}{\sin\theta}z+\dfrac{13}{\sin^2\theta}-9=0$, $\theta\in]0,\pi[$;
3. $2z^2(1-\cos 2\theta)-2z\sin 2\theta+1=0$, $\theta\in]0,\pi[$;
4. $z^2-2\mathrm{i}z-1+2\mathrm{i}=0$;
5. $\mathrm{i}z^2+\mathrm{i}z+1+\mathrm{i}=0$;
6. $z^2-2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z+2\mathrm{i}\sin\theta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=0$ (on écrira les racines sous forme trigonométriques).

Ex. 17 — 1. Pour $t\in\mathbb{R}$, résoudre l'équation d'inconnue complexe z : $z^2+2tz+1=0$ (E_t)

2. Quel est l'ensemble Ω des points M_z d'affixe z, où z est solution de (E_t), lorsque t décrit $\mathbb{R}$?

Ex. 18 — Résoudre les équations d'inconnue réelle x

1. $\cos 3x-\sin 3x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;
2. $\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x=2\cos x$;
3. $\sqrt{3}\cos x+\sin x>1$.

Ex. 19 — Pour $a\in\mathbb{R}$, résoudre le système d'équations d'inconnues réelles x et y :

$$\begin{cases} \cos a+\cos(a+x)+\cos(a+y)=0 \\ \sin a+\sin(a+x)+\sin(a+y)=0 \end{cases}$$

Ex. 20 — Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations

1. $\mathrm{e}^z=-4$;
2. $\mathrm{e}^z=2\mathrm{i}$;

3. $e^z = 1 + i$;
4. $e^{2z} = \sqrt{3} - i$;
5. $e^{iz} = \dfrac{\sqrt{2}-2}{2}(1+i)$;
6. $e^{(1+i)z} = i$.

Ex. 21 — Soit $u = e^{\frac{2i\pi}{7}}$. On pose $S = u + u^2 + u^4$ et $T = u^3 + u^5 + u^6$. Calculer S et T (on pourra calculer leur somme et leur produit).

Ex. 22 — On souhaite résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

(E) $z^4 - 4(1+i)\,z^3 + 12i\,z^2 + 8(1-i)\,z - 5 = 0$

1. Déterminer les solutions réelles de (E).
2. Déterminer les solutions imaginaires pures de (E).
3. En déduire une factorisation de (E) puis résoudre complètement (E).

Complexes et trigonométrie

Ex. 23 — Pour quelles valeurs de n le complexe $paf(1 - i\sqrt{3})^5(1-i)^{3^n}$ est un réel positif ?

Ex. 24 — Calculer $\cos 4x$, $\sin 4x$, $\sin x \cos 3x$, $\cos 2x \sin 2x$ en fonction de $\sin x$, de $\cos x$ et de leurs puissances.

Ex. 25 —
1. Calculer $\cos(5x)$ et $\sin(5x)$ en fonction respectivement de $\cos x$ et $\sin x$.
2. En déduire une équation polynômiale de degré 5 dont $cos\,(\pi/10)$ est solution.
3. Résoudre cette équation, et donner une expression de $\cos(\pi/10)$ utilisant des racines carrées.

Ex. 26 — Linéariser les produits $\cos^2 x \sin x$, $\cos^3 x \sin^2 x$ et $\cos^3 x \sin^4 x$.

Ex. 27 — Linéariser $\cos^4 t$ et $\cos^4 t \sin^4 t$ et $\sin^6 t$.

Ex. 28 — Soit $a \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$.
1. Résoudre $z^2 + 2z\cos a + 1 = 0$.
2. Interpréter, pour z réel, $z^2 + 2z\cos a + 1$ comme un module.
3. Résoudre $z^{2n} - 2z^n\cos(na) + 1 = 0$.

Ex. 29 — Un classique Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $C_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)$.
1. On demande de calculer C_n et S_n de deux façons :
   a) en reconnaissant dans $Z_n = C_n + iS_n$ la somme des premiers termes d'une suite géométrique ;
   b) en calculant $\sin(x/2)C_n$ et $\sin(x/2)S_n$ au moyen de sommes télescopiques.
2. En déduire le calcul de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\cos(kx)$ et de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\sin(kx)$, où $x \in \mathbb{R}$.

Ex. 30 — Calculer les sommes suivantes, avec $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On donnera le résultat sous forme d'un réel.
1. $S_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(kx)$;
2. $S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos\big((3k+1)x\big)$;
3. $S_3 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos^2(kx)$.

Ex. 31 — Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} k i^{k-1} = \frac{i - n i^n - (n+1) i^{n+1}}{2}$$

En déduire la valeurs des sommmes réelles

$$S_1 = 1 - 3 + 5 - 7 + \cdots + (-1)^p(2p+1)$$
$$S_2 = 2 - 4 + 6 - 8 + \cdots + (-1)^{p+1}2p$$

Divers

Ex. 32 — On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
1. Calculer j^3, $1 + j + j^2$.
2. Simplifier les expressions
$$(1+j)^5, \quad \frac{1}{(1+j)^4}, \quad \frac{1}{1-j^2}$$
3. Montrer que si α et β sont deux réels, alors
$$\alpha + j\beta = 0 \implies \alpha = \beta = 0$$
En déduire une condition nécessaire et suffisante sur $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ pour que l'on ait $a + bj + cj^2 = 0$.

Ex. 33 —
1. Soit a, b et c trois complexes distincts. Montrer que les images de a, b et c sont alignés ssi $\dfrac{b-a}{c-a} \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points B, M et M' d'affixes respectives i, z et iz soient alignés.
3. Même question pour que B, M et M' forment un triangle équilatéral.

Ex. 34 — UNE FORMULE DE SOMMATION

1. Démontrer la formule
$$\frac{1}{\cos a \cos b} = \frac{1}{\sin(a-b)}(\tan a - \tan b)$$
Préciser les ensembles de définition.
2. Soit $n \in [\![3 \,;\, +\infty [\![$. Calculer, lorsqu'elle a un sens, la somme $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\cos(k-1)x \, \cos kx}$.

Ex. 35 — Soit $\theta \in \mathbb{R}$ fixé. On considère $z \in \mathbb{C}$ tel que $z + \frac{1}{z} = 2\cos\theta$. Que vaut $z^n + \frac{1}{z^n}$? (On pourra montrer que $|z| = 1$.)

Ex. 36 — n et p sont chacun la somme des carrés de deux entiers. Montrer que c'est aussi le cas de leur produit np.

INDICATION : *n et p peuvent être interpréter à l'aide des modules de deux complexes.*

Ex. 37 — Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation d'inconnue réelle x $\cos a + \cos(a+x) + \cos(a+2x) + \cdots + \cos(a+nx) = 0$.

Ex. 38 — Soit $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \mathrm{i}z + \overline{z} \end{array} \right.$.

1. Déterminer $\varphi \circ \varphi$. Que peut-on en déduire pour φ ?
2. Soit $Z \in \mathbb{C}$, déterminer $\varphi^{-1}(\{Z\})$. Représenter $\varphi^{-1}(\{Z\})$ sur un dessin.
3. Déterminer $\varphi\langle\mathbb{C}\rangle$.

Ex. 39 —

1. Déterminer les complexes z qui vérifiant $z = \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z$.
2. Retrouver ce résultat en utilisant les cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire.

Ex. 40 — Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier l'expression $(1+i)^n + (1-i)^n$.

Ex. 41 — IDENTITÉ DU PARALLÉLOGRAMME

Soient u et v deux complexes. Montrer que : $|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2\left(|u|^2 + |v|^2\right)$. Interpréter géométriquement.

Ex. 42 — Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

1. $z^2 - \left(5 + 4i\sqrt{3}\right)z + 9 = 0$
2. $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right) + 1 = 0$
3. $z^6 - (1-i)z^3 - i = 0$

Ex. 43 — Soit $\theta \in \mathbb{R}$ fixé. On considère $z \in \mathbb{C}$ tel que $z + \frac{1}{z} = 2\cos\theta$. Que vaut $z^n + \frac{1}{z^n}$? (On pourra montrer que $|z| = 1$.)

Ex. 44 — Soit $a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ et $b = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$. Simplifier $\frac{a+b}{a-b}$ et $\frac{a+b}{1-ab}$.

Ex. 45 — Montrer que
$$\frac{(1+i)^n - (1-i)^n}{i} = 2^{\frac{n+2}{2}} \sin\frac{n\pi}{4}$$

Ex. 46 — Soient $(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$.

1. Montrer $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |z_k|$.
2. Étudier les cas d'égalité de la formule précédente.

Ex. 47 — Résoudre $4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0$.

Ex. 48 — Résoudre l'équation suivante, sachant qu'il y a une solution imaginaire pure :
$$(\mathrm{i}-1)z^3 - (5\mathrm{i}-11)z^2 - (43+\mathrm{i})z + 9 + 37\mathrm{i} = 0$$

Ex. 49 —

1. Montrer que toute droite du plan a pour équation complexe : $az + \overline{az} = b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{R}$.
2. Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$, a, b non tous deux nuls. Discuter la nature de $E = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } az + b\overline{z} = c\}$.

   RÉPONSE : si $|a| \neq |b|$: une solution unique,
   si $|a| = |b|$: une droite ou $\varnothing$.

Ex. 50 — Trouver a, b, c trois complexes de module 1 tels que $a + b + c = 1$ et $abc = 1$.

RÉPONSE : $(0, a, a+b, a+b+c = 1)$ forme un losange donc l'un des nombres vaut 1 et les deux autres sont opposés $\{a, b, c\} = \{1, i, -i\}$.

Ex. 51 — Les points A, B, et M ayant pour affixes a, b, et z, calculer l'affixe du symétrique de M par rapport à la droite (AB).

RÉPONSE : $z' = \dfrac{(b-a)\overline{z} + a\overline{b} - \overline{a}b}{\overline{b} - \overline{a}}$.

Ex. 52 — Soit $z \in \mathbb{C}$ et p et q ses racines carrées. À quelle condition z, p, q forment-ils un triangle rectangle en z ?

RÉPONSE : cercle circonscrit ssi $|z| = 1$.