

Module et argument

Ex. 1 — Écrire sous forme algébrique

$$\frac{1+2i}{3-4i} + \frac{1-i}{3+i} - \frac{1}{1+\frac{2}{i}} \quad \frac{1}{(1+2i)^2} \quad \frac{(1+i)^3}{(1-i)^2} \quad (1 + (1 + (1+2i)^2)^{-1})$$

Ex. 2 — Exprimer sous forme algébrique les nombres complexes de modules r et d'argument t

$$r = \sqrt{2}, t = \frac{\pi}{4} \quad r = 2, t = \frac{-\pi}{3} \quad r = 2, t = \frac{2\pi}{3}$$

$$r = 3, t = \frac{3\pi}{2} \quad r = 1, t = k\pi \quad r = 1, t = \frac{k\pi}{2}$$

Ex. 3 — Déterminer le module et l'argument de

$$z_1 = \frac{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}{2}, \quad z_2 = 1 + i, \quad z = \frac{z_1}{z_2}$$

En déduire les valeurs de $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$.

Ex. 4 — 1. Calculer $(1 + i\sqrt{3})^{2017}$.

2. Résoudre $z^4 = 8(1 - i\sqrt{3})$.

Ex. 5 — Soit $u = \sqrt{2 - \sqrt{2}} - i\sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

1. Calculer u^2 puis u^4 .

2. En déduire module et argument de u .

3. Calculer $\cos \frac{3\pi}{8}$.

Ex. 6 — Simplifier les expressions ($n \in \mathbb{N}, \theta \in \mathbb{R}$)

$$(1 + \cos \theta + i \sin \theta)^n, \quad \left(\frac{1 + i \tan \theta}{1 - i \tan \theta} \right)^n$$

Ex. 7 — Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et $z = \frac{1 + \cos \theta + i \sin \theta}{1 - \cos \theta - i \sin \theta}$. Déterminer $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$, $|z|$ et $\arg(z)$.

Ex. 8 — Soit $(\alpha, \beta) \in [0; 2\pi[$. Déterminer le module et l'argument des nombres complexes suivants :

$$z_1 = 1 + e^{i\alpha}; \quad z_2 = \frac{1}{1 + e^{i\alpha}}; \quad z_3 = e^{i\alpha e^{i\beta}}.$$

Ex. 9 — Soient V et V' des vecteurs d'affixes z et z' , tels que $zz' = z'\bar{z}$. Que peut-on dire sur V et V' ?

Ex. 10 — Déterminer les complexes z telles que $z, z - 1$ et $1/z$ aient le même module.

Ex. 11 — Calculer $S = \cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11}$
INDICATION : Interpréter cette somme comme la partie réelle d'un nombre complexe.

Équations dans \mathbb{C}

Ex. 12 — 1. Chercher les solutions complexes α de l'équation $\alpha^2 = -5 + 12i$.

2. Résoudre l'équation $z^2 - \sqrt{5}z - 3i = 0$.

INDICATION : On pourra mettre d'abord sous forme canonique.

Ex. 13 — Résoudre dans \mathbb{C} le système

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 1 + i \\ z_1 z_2 = 2 - i \end{cases}$$

Ex. 14 — Résoudre dans \mathbb{C} $z^3 = 4\sqrt{2}(1 + i)$.

Ex. 15 — Résoudre dans \mathbb{C} $|z + 1| = |z| + 1$.

Ex. 16 — Résoudre les équations suivantes dans \mathbb{C} :

1. $z^2 - 2^{\theta+1} \cos \theta z + 2^{2\theta} = 0$;

2. $z^2 - \frac{4}{\sin \theta} z + \frac{13}{\sin^2 \theta} - 9 = 0, \theta \in]0, \pi[$;

3. $2z^2(1 - \cos 2\theta) - 2z \sin 2\theta + 1 = 0, \theta \in]0, \pi[$;

4. $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0$;

5. $iz^2 + iz + 1 + i = 0$;

6. $z^2 - 2e^{i\theta}z + 2i \sin \theta e^{i\theta} = 0$ (on écrira les racines sous forme trigonométriques).

Ex. 17 — 1. Pour $t \in \mathbb{R}$, résoudre l'équation d'inconnue complexe $z : z^2 + 2tz + 1 = 0$ (E_t)

2. Quel est l'ensemble Ω des points M_z d'affixe z , où z est solution de (E_t), lorsque t décrit \mathbb{R} ?

Ex. 18 — Résoudre les équations d'inconnue réelle x

1. $\cos 3x - \sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

2. $\cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x = 2 \cos x$;

3. $\sqrt{3} \cos x + \sin x > 1$.

Ex. 19 — Pour $a \in \mathbb{R}$, résoudre le système d'équations d'inconnues réelles x et y :

$$\begin{cases} \cos a + \cos(a + x) + \cos(a + y) = 0 \\ \sin a + \sin(a + x) + \sin(a + y) = 0 \end{cases}$$

Ex. 20 — Résoudre dans \mathbb{C} les équations

1. $e^z = -4$;

2. $e^z = 2i$;

3. $e^z = 1 + i$;
4. $e^{2z} = \sqrt{3} - i$;
5. $e^{iz} = \frac{\sqrt{2}-2}{2}(1+i)$;
6. $e^{(1+i)z} = i$.

Ex. 21 — Soit $u = e^{\frac{2i\pi}{7}}$. On pose $S = u + u^2 + u^4$ et $T = u^3 + u^5 + u^6$. Calculer S et T (on pourra calculer leur somme et leur produit).

Ex. 22 — On souhaite résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

$$(E) \quad z^4 - 4(1+i)z^3 + 12iz^2 + 8(1-i)z - 5 = 0$$

1. Déterminer les solutions réelles de (E).
2. Déterminer les solutions imaginaires pures de (E).
3. En déduire une factorisation de (E) puis résoudre complètement (E).

Complexes et trigonométrie

Ex. 23 — Pour quelles valeurs de n le complexe $\operatorname{Re}((1-i\sqrt{3})^5(1-i)^{3n})$ est un réel positif?

Ex. 24 — Calculer $\cos 4x$, $\sin 4x$, $\sin x \cos 3x$, $\cos 2x \sin 2x$ en fonction de $\sin x$, de $\cos x$ et de leurs puissances.

- Ex. 25** —
1. Calculer $\cos(5x)$ et $\sin(5x)$ en fonction respectivement de $\cos x$ et $\sin x$.
 2. En déduire une équation polynomiale de degré 5 dont $\cos(\pi/10)$ est solution.
 3. Résoudre cette équation, et donner une expression de $\cos(\pi/10)$ utilisant des racines carrées.

Ex. 26 — Linéariser les produits $\cos^2 x \sin x$, $\cos^3 x \sin^2 x$ et $\cos^3 x \sin^4 x$.

Ex. 27 — Linéariser $\cos^4 t$ et $\cos^4 t \sin^4 t$ et $\sin^6 t$.

Ex. 28 — Soit $a \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$.

1. Résoudre $z^2 + 2z \cos a + 1 = 0$.
2. Interpréter, pour z réel, $z^2 + 2z \cos a + 1$ comme un module.
3. Résoudre $z^{2n} - 2z^n \cos(na) + 1 = 0$.

Ex. 29 — UN CLASSIQUE Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $C_n = \sum_{k=0}^n \cos(kx)$ et $S_n = \sum_{k=0}^n \sin(kx)$.

1. On demande de calculer C_n et S_n de deux façons :

- a) en reconnaissant dans $Z_n = C_n + iS_n$ la somme des premiers termes d'une suite géométrique;
- b) en calculant $\sin(x/2)C_n$ et $\sin(x/2)S_n$ au moyen de sommes télescopiques.

2. En déduire le calcul de $\sum_{k=1}^n k \cos(kx)$ et de $\sum_{k=1}^n k \sin(kx)$, où $x \in \mathbb{R}$.

Ex. 30 — Calculer les sommes suivantes, avec $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On donnera le résultat sous forme d'un réel.

1. $S_1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kx)$;
2. $S_2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos((3k+1)x)$;
3. $S_3 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos^2(kx)$.

Ex. 31 — Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n k i^{k-1} = \frac{i - ni^n - (n+1)i^{n+1}}{2}$$

En déduire les valeurs des sommes réelles

$$S_1 = 1 - 3 + 5 - 7 + \dots + (-1)^p(2p+1)$$

$$S_2 = 2 - 4 + 6 - 8 + \dots + (-1)^{p+1}2p$$

Divers

Ex. 32 — On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

1. Calculer j^3 , $1 + j + j^2$.
2. Simplifier les expressions

$$(1+j)^5, \quad \frac{1}{(1+j)^4}, \quad \frac{1}{1-j^2}$$

3. Montrer que si α et β sont deux réels, alors

$$\alpha + j\beta = 0 \implies \alpha = \beta = 0$$

En déduire une condition nécessaire et suffisante sur $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ pour que l'on ait $a + bj + cj^2 = 0$.

Ex. 33 — 1. Soit a, b et c trois complexes distincts. Montrer que les images de a, b et c sont alignés ssi $\frac{b-a}{c-a} \in \mathbb{R}$.

2. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points B, M et M' d'affixes respectives i, z et iz soient alignés.
3. Même question pour que B, M et M' forment un triangle équilatéral.

Ex. 34 — UNE FORMULE DE SOMMATION

1. Démontrer la formule

$$\frac{1}{\cos a \cos b} = \frac{1}{\sin(a-b)} (\tan a - \tan b)$$

Préciser les ensembles de définition.

2. Soit $n \in \llbracket 3 ; +\infty \llbracket$. Calculer, lorsqu'elle a un sens, la somme $\sum_{k=2}^n \frac{1}{\cos(k-1)x \cos kx}$.

Ex. 35 — Soit $\theta \in \mathbb{R}$ fixé. On considère $z \in \mathbb{C}$ tel que $z + \frac{1}{z} = 2 \cos \theta$. Que vaut $z^n + \frac{1}{z^n}$? (On pourra montrer que $|z| = 1$.)

Ex. 36 — n et p sont chacun la somme des carrés de deux entiers. Montrer que c'est aussi le cas de leur produit np .

INDICATION : n et p peuvent être interpréter à l'aide des modules de deux complexes.

Ex. 37 — Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation d'inconnue réelle $x \cos a + \cos(a+x) + \cos(a+2x) + \dots + \cos(a+nx) = 0$.

Ex. 38 — Soit $\varphi : \begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto iz + \bar{z} \end{cases}$.

- Déterminer $\varphi \circ \varphi$. Que peut-on en déduire pour φ ?
- Soit $Z \in \mathbb{C}$, déterminer $\varphi^{-1}(\{Z\})$. Représenter $\varphi^{-1}(\{Z\})$ sur un dessin.
- Déterminer $\varphi \langle \mathbb{C} \rangle$.

Ex. 39 — 1. Déterminer les complexes z qui vérifiant $z = \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z$.

2. Retrouver ce résultat en utilisant les cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire.

Ex. 40 — Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier l'expression $(1+i)^n + (1-i)^n$.

Ex. 41 — IDENTITÉ DU PARALLÉLOGRAMME

Soient u et v deux complexes. Montrer que : $|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$. Interpréter géométriquement.

Ex. 42 — Résoudre dans \mathbb{C} les équations :

- $z^2 - (5 + 4i\sqrt{3})z + 9 = 0$
- $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right) + 1 = 0$
- $z^6 - (1-i)z^3 - i = 0$

Ex. 43 — Soit $\theta \in \mathbb{R}$ fixé. On considère $z \in \mathbb{C}$ tel que $z + \frac{1}{z} = 2 \cos \theta$. Que vaut $z^n + \frac{1}{z^n}$? (On pourra montrer que $|z| = 1$.)

Ex. 44 — Soit $a = e^{i\alpha}$ et $b = e^{i\beta}$. Simplifier $\frac{a+b}{a-b}$ et $\frac{a+b}{1-ab}$.

Ex. 45 — Montrer que

$$\frac{(1+i)^n - (1-i)^n}{i} = 2^{\frac{n+2}{2}} \sin \frac{n\pi}{4}$$

Ex. 46 — Soient $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$.

- Montrer $\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|$.
- Étudier les cas d'égalité de la formule précédente.

Ex. 47 — Résoudre $4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0$.

Ex. 48 — Résoudre l'équation suivante, sachant qu'il y a une solution imaginaire pure :

$$(i-1)z^3 - (5i-11)z^2 - (43+i)z + 9 + 37i = 0$$

Ex. 49 — 1. Montrer que toute droite du plan a pour équation complexe : $az + \bar{a}\bar{z} = b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{R}$.

- Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$, a, b non tous deux nuls. Discuter la nature de $E = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } az + b\bar{z} = c\}$.
RÉPONSE : si $|a| \neq |b|$: une solution unique,
si $|a| = |b|$: une droite ou \emptyset .

Ex. 50 — Trouver a, b, c trois complexes de module 1 tels que $a + b + c = 1$ et $abc = 1$.

RÉPONSE : $(0, a, a+b, a+b+c = 1)$ forme un losange donc l'un des nombres vaut 1 et les deux autres sont opposés $\{a, b, c\} = \{1, i, -i\}$.

Ex. 51 — Les points A, B , et M ayant pour affixes a, b , et z , calculer l'affixe du symétrique de M par rapport à la droite (AB) .

RÉPONSE : $z' = \frac{(b-a)\bar{z} + a\bar{b} - \bar{a}b}{\bar{b} - \bar{a}}$.

Ex. 52 — Soit $z \in \mathbb{C}$ et p et q ses racines carrées. À quelle condition z, p, q forment-ils un triangle rectangle en z ?

RÉPONSE : cercle circonscrit ssi $|z| = 1$.

