

Nombres complexes

BCPST I, 12/2017

Module et argument

Exercice 1

Écrire sous forme algébrique

$$\frac{1+i}{3-i} + \frac{1-i}{3+i} - \frac{1}{1+\frac{2}{i}} \left(1 + (1+(1+2i)^2)^{-1}\right)$$

Exercice 2

Exprimer sous forme algébrique les nombres complexes de modules r et d'argument t

$$r = \sqrt{2}, t = \frac{\pi}{4} \quad r = 2, t = \frac{-\pi}{3} \quad r = 2, t = \frac{2\pi}{3}$$
$$r = 3, t = \frac{3\pi}{2} \quad r = 1, t = k\pi \quad r = 1, t = \frac{k\pi}{2}$$

Exercice 3

Déterminer le module et l'argument de

$$z_1 = \frac{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}{2}, \quad z_2 = 1 + i, \quad z = \frac{z_1}{z_2}$$

En déduire les valeurs de $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$.

Exercice 4

- Calculer $(1 + i\sqrt{3})^{2017}$.
- Résoudre $z^4 = 8(1 - i\sqrt{3})$.

Exercice 5

Soit $u = \sqrt{2 - \sqrt{2}} - i\sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

- Calculer u^2 puis u^4 .
- En déduire module et argument de u .
- Calculer $\cos \frac{3\pi}{8}$.

Exercice 6

Simplifier les expressions ($n \in \mathbb{N}, \theta \in \mathbb{R}$)

$$(1 + \cos \theta + i \sin \theta)^n, \quad \left(\frac{1 + i \tan \theta}{1 - i \tan \theta}\right)^n$$

Exercice 7

Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et $z = \frac{1 + \cos \theta + i \sin \theta}{1 - \cos \theta - i \sin \theta}$.
Déterminer $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$, $|z|$ et $\arg(z)$.

Exercice 8

Soit $(\alpha, \beta) \in [0; 2\pi[$. Déterminer le module et l'argument des nombres complexes suivants :

$$z_1 = 1 + e^{i\alpha}; \quad z_2 = \frac{1}{1 + e^{i\alpha}}; \quad z_3 = e^{i\alpha e^{i\beta}}.$$

Exercice 9

Soient V et V' des vecteurs d'affixes z et z' , tels que $\overline{zz'} = z'\overline{z}$. Que peut-on dire sur V et V' ?

Exercice 10

Déterminer les complexes z telles que z , $z - 1$ et $1/z$ aient le même module.

Exercice 11

Calculer $S = \cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11}$
INDICATION : Interpréter cette somme comme la partie réelle d'un nombre complexe.

Équations dans \mathbb{C}

Exercice 12

- Chercher les solutions complexes α de l'équation $\alpha^2 = -5 + 12i$.
- Résoudre l'équation $z^2 - \sqrt{5}z - 3i = 0$.

INDICATION : On pourra mettre d'abord sous forme canonique.

Exercice 13

Résoudre dans \mathbb{C} le système

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 1 + i \\ z_1 z_2 = 2 - i \end{cases}$$

Exercice 14

Résoudre dans \mathbb{C} $z^3 = 4\sqrt{2}(1 + i)$.

Exercice 15

Résoudre dans \mathbb{C} $|z + 1| = |z| + 1$.

Exercice 16

Résoudre les équations suivantes dans \mathbb{C} :

- $z^2 - 2^{\theta+1} \cos \theta z + 2^{2\theta} = 0$;
- $z^2 - \frac{4}{\sin \theta} z + \frac{13}{\sin^2 \theta} - 9 = 0, \theta \in]0, \pi[$;
- $2z^2(1 - \cos 2\theta) - 2z \sin 2\theta + 1 = 0, \theta \in]0, \pi[$;
- $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0$;
- $iz^2 + iz + 1 + i = 0$;
- $z^2 - 2e^{i\theta}z + 2i \sin \theta e^{i\theta} = 0$ (on écrira les racines sous forme trigonométriques).

Exercice 17

- Pour $t \in \mathbb{R}$, résoudre l'équation d'inconnue complexe $z : z^2 + 2tz + 1 = 0$ (E_t)
- Quel est l'ensemble Ω des points M_z d'affixe z , où z est solution de (E_t), lorsque t décrit \mathbb{R} ?

Exercice 18

Résoudre les équations d'inconnue réelle x

- $\cos 3x - \sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
- $\cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x = 2 \cos x$;
- $\sqrt{3} \cos x + \sin x > 1$.

Exercice 19

Pour $a \in \mathbb{R}$, résoudre le système d'équations d'inconnues réelles x et y :

$$\begin{cases} \cos a + \cos(a+x) + \cos(a+y) = 0 \\ \sin a + \sin(a+x) + \sin(a+y) = 0 \end{cases}$$

Exercice 20

Résoudre dans \mathbb{C} les équations

- $e^z = -4$;
- $e^z = 2i$;
- $e^z = 1 + i$;
- $e^{2z} = \sqrt{3} - i$;
- $e^{iz} = \frac{\sqrt{2}-2}{2}(1+i)$;
- $e^{(1+i)z} = i$.

Exercice 21

Soit $u = e^{\frac{2i\pi}{7}}$. On pose $S = u + u^2 + u^4$ et $T = u^3 + u^5 + u^6$. Calculer S et T (on pourra calculer leur somme et leur produit).

Exercice 22

On souhaite résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

$$(E) \quad z^4 - 4(1+i)z^3 + 12iz^2 + 8(1-i)z - 5 = 0$$

- Déterminer les solutions réelles de (E) .
- Déterminer les solutions imaginaires pures de (E) .
- En déduire une factorisation de (E) puis résoudre complètement (E) .

Complexes et trigonométrie**Exercice 23**

Pour quelles valeurs de n le complexe $\left(\frac{(1-i\sqrt{3})^5}{(1-i)^3}\right)^n$ est un réel positif?

Exercice 24

Calculer $\cos 4x$, $\sin 4x$, $\sin x \cos 3x$, $\cos 2x \sin 2x$ en fonction de $\sin x$, de $\cos x$ et de leurs puissances.

Exercice 25

- Calculer $\cos(5x)$ et $\sin(5x)$ en fonction respectivement de $\cos x$ et $\sin x$.
- En déduire une équation polynomiale de degré 5 dont $\cos(\pi/10)$ est solution.
- Résoudre cette équation, et donner une expression de $\cos(\pi/10)$ utilisant des racines carrées.

Exercice 26

Linéariser les produits $\cos^2 x \sin x$, $\cos^3 x \sin^2 x$ et $\cos^3 x \sin^4 x$.

Exercice 27

Linéariser $\cos^4 t$ et $\cos^4 t \sin^4 t$ et $\sin^6 t$.

Exercice 28

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$.

- Résoudre $z^2 + 2z \cos a + 1 = 0$.
- Interpréter, pour z réel, $z^2 + 2z \cos a + 1$ comme un module.
- Résoudre $z^{2n} - 2z^n \cos(na) + 1 = 0$.

Exercice 29 — Un classique

Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $C_n = \sum_{k=0}^n \cos(kx)$ et

$$S_n = \sum_{k=0}^n \sin(kx).$$

- On demande de calculer C_n et S_n de deux façons :
 - en reconnaissant dans $Z_n = C_n + iS_n$ la somme des premiers termes d'une suite géométrique ;
 - en calculant $\sin(x/2)C_n$ et $\sin(x/2)S_n$ au moyen de sommes télescopiques.
- En déduire le calcul de $\sum_{k=1}^n k \cos(kx)$ et de $\sum_{k=1}^n k \sin(kx)$, où $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 30

Calculer les sommes suivantes, avec $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On donnera le résultat sous forme d'un réel.

- $S_1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kx)$;
- $S_2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos((3k+1)x)$;
- $S_3 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos^2(kx)$.

Exercice 31

Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n k i^{k-1} = \frac{i - n i^n - (n+1) i^{n+1}}{2}$$

En déduire les valeurs des sommes réelles

$$S_1 = 1 - 3 + 5 - 7 + \dots + (-1)^p (2p+1)$$

$$S_2 = 2 - 4 + 6 - 8 + \dots + (-1)^{p+1} 2p$$

Divers

Exercice 32

On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

- Calculer j^3 , $1 + j + j^2$.
- Simplifier les expressions

$$(1 + j)^5, \frac{1}{(1 + j)^4}, \frac{1}{1 - j^2}$$

- Montrer que si α et β sont deux réels, alors

$$\alpha + j\beta = 0 \implies \alpha = \beta = 0$$

En déduire une condition nécessaire et suffisante sur $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ pour que l'on ait $a + bj + cj^2 = 0$.

Exercice 33

- Soit a, b et c trois complexes distincts. Montrer que les images de a, b et c sont alignés ssi $\frac{b-a}{c-a} \in \mathbb{R}$.
- Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points B, M et M' d'affixes respectives i, z et iz soient alignés.
- Même question pour que B, M et M' forment un triangle équilatéral.

Exercice 34 — Une formule de sommation

- Démontrer la formule

$$\frac{1}{\cos a \cos b} = \frac{1}{\sin(a-b)} (\tan a - \tan b)$$

Préciser les ensembles de définition.

- Soit $n \in \llbracket 3 ; +\infty \llbracket$. Calculer, lorsqu'elle a un sens, la

$$\text{somme} \quad \sum_{k=2}^n \frac{1}{\cos(k-1)x \cos kx}.$$

Exercice 35

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ fixé. On considère $z \in \mathbb{C}$ tel que $z + \frac{1}{z} = 2 \cos \theta$.

Que vaut $z^n + \frac{1}{z^n}$? (On pourra montrer que $|z| = 1$.)

Exercice 36

n et p sont chacun la somme des carrés de deux entiers. Montrer que c'est aussi le cas de leur produit np .

INDICATION : n et p peuvent être interprétés à l'aide des modules de deux complexes.

Exercice 37

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation d'inconnue réelle $x \cos a + \cos(a+x) + \cos(a+2x) + \dots + \cos(a+nx) = 0$.

Exercice 38

Soit $\varphi : \begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto iz + \bar{z} \end{cases}$.

- Déterminer $\varphi \circ \varphi$. Que peut-on en déduire pour φ ?
- Soit $Z \in \mathbb{C}$, déterminer $\varphi^{-1}(\{Z\})$. Représenter $\varphi^{-1}(\{Z\})$ sur un dessin.
- Déterminer $\varphi(\mathbb{C})$.

Exercice 39

- Déterminer les complexes z qui vérifient $z = \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z$.
- Retrouver ce résultat en utilisant les cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire.

Exercice 40

Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier l'expression $(1+i)^n + (1-i)^n$.

Exercice 41 — Identité du parallélogramme

Soient u et v deux complexes. Montrer que : $|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$. Interpréter géométriquement.

Exercice 42

Résoudre dans \mathbb{C} les équations :

- $z^2 - (5 + 4i\sqrt{3})z + 9 = 0$
- $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right) + 1 = 0$
- $z^6 - (1-i)z^3 - i = 0$

Exercice 43

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ fixé. On considère $z \in \mathbb{C}$ tel que $z + \frac{1}{z} = 2 \cos \theta$.

Que vaut $z^n + \frac{1}{z^n}$? (On pourra montrer que $|z| = 1$.)

Exercice 44

Soit $a = e^{i\alpha}$ et $b = e^{i\beta}$. Simplifier $\frac{a+b}{a-b}$ et $\frac{a+b}{1-ab}$.

Exercice 45

Montrer que

$$\frac{(1+i)^n - (1-i)^n}{i} = 2^{\frac{n+2}{2}} \sin \frac{n\pi}{4}$$

Exercice 46

Soient $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$.

- Montrer $\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|$.
- Étudier les cas d'égalité de la formule précédente.

Exercice 47

Résoudre $4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0$.

Exercice 48

Résoudre l'équation suivante, sachant qu'il y a une solution imaginaire pure :

$$(i-1)z^3 - (5i-11)z^2 - (43+i)z + 9 + 37i = 0$$

Exercice 49

- Montrer que toute droite du plan a pour équation complexe : $az + \bar{a}z = b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{R}$.

2. Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$, a, b non tous deux nuls. Discuter la nature de $E = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } az + b\bar{z} = c\}$.

RÉPONSE : si $|a| \neq |b|$: une solution unique,

si $|a| = |b|$: une droite ou \emptyset .

Exercice 50

Trouver a, b, c trois complexes de module 1 tels que $a + b + c = 1$ et $abc = 1$.

RÉPONSE : $(0, a, a + b, a + b + c = 1)$ forme un losange donc l'un des nombres vaut 1 et les deux autres sont opposés $\{a, b, c\} = \{1, i, -i\}$.

Exercice 51

Les points A, B , et M ayant pour affixes a, b , et z , calculer l'affixe du symétrique de M par rapport à la droite (AB) .

RÉPONSE : $z' = \frac{(b-a)\bar{z} + a\bar{b} - \bar{a}b}{\bar{b} - \bar{a}}$.

Exercice 52

Soit $z \in \mathbb{C}$ et p et q ses racines carrées. À quelle condition z, p, q forment-ils un triangle rectangle en z ?

RÉPONSE : cercle circonscrit ssi $|z| = 1$.

