Image, antécédent

Ex. 1 — Soit $E = \{a, b, c, d\}$ et $F = \{\alpha, \beta, \gamma\}$.

1. Expliciter (si c'est possible) une application f_1 de E dans F telle que f_1 soit surjective.
2. Expliciter (si c'est possible) une application f_2 de E dans F telle que f_2 soit injective.
3. Expliciter (si c'est possible) une application f_3 de E dans F telle que $f_3\langle E\rangle = \{\beta, \gamma\}$.
4. Expliciter (si c'est possible) une application f_4 de E dans F telle que $f_4^{-1}\langle F\rangle = \{a\}$.
5. Expliciter (si c'est possible) une application f_5 de E dans F telle que $f_5^{-1}\langle\{\alpha\}\rangle = E$.
6. Expliciter (si c'est possible) une application f_6 de E dans F telle que $f_6^{-1}\langle\{\alpha, \beta\}\rangle = \varnothing$.

Ex. 2 — Soit $E = \mathbb{R}^2$, muni d'un repère orthonormé, et $F = (Ox)$. On considère l'application f qui associe à un élément M de E son projeté orthogonal sur F.

1. Donner l'écriture analytique de cette application.
2. Quelle est l'image de $(1, 3)$ par f. Quels sont les antécédents de $(5, 0)$? De $(\alpha, 0)$ (avec $\alpha \in \mathbb{R}$) ?
3. Justifier que f est surjective mais pas injective.

Ex. 3 — On considère le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$, le point $B(-1, 0)$ et la droite D d'équation $x = 1$.
L'application f associe à un point M de $\mathscr{C}$ le point d'intersection de (BM) et de D.

1. L'application f est-elle bien définie ? Si non, modifiez l'énoncé afin qu'elle le soit.
2. Montrer que f est bijective.
3. Soit $A(1, 0)$ et $C(2, 0)$. Déterminer $f^{-1}\langle[AC]\rangle$.

Ex. 4 —
1. Soit $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{array}\right.$. Que vaut $f\langle[1\,;2]\rangle$? $f\langle[-1/2\,;2]\rangle$? $f\langle[a\,;b]\rangle$ avec $a < b$?
2. Soit $f(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Déterminer $f\langle\mathbb{R}\setminus\{1\}\rangle$.

Ex. 5 — Soit $f : E \longrightarrow F$, A et B deux parties de E et C et D deux parties de F.

1. Montrer que
   a) $f^{-1}\langle C\cup D\rangle = f^{-1}\langle C\rangle \cup f^{-1}\langle D\rangle$;
   b) $f^{-1}\langle C\cap D\rangle = f^{-1}\langle C\rangle \cap f^{-1}\langle D\rangle$;
   c) $f\langle A\cup B\rangle = f\langle A\rangle \cup f\langle B\rangle$;
   d) $f\langle A\cap B\rangle \subset f\langle A\rangle \cap f\langle B\rangle$.
2. Montrer que l'assertion suivante est fausse : $f\langle A\cap B\rangle = f\langle A\rangle \cap f\langle B\rangle$.
3. A-t'on $\complement_F(f\langle A\rangle) \subset f\langle\overline{A}\rangle$? A-t'on $f\langle\overline{A}\rangle \subset \overline{(f\langle A\rangle)}$?

Composition

Ex. 6 — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

1. Décomposer f en composée de deux fonctions g et h. En déduire que f est bien définie.
2. Expliciter $h \circ g$.

Ex. 7 — Soit $f(x) = ax + b$ une fonction d'une variable réelle x, avec a et b deux paramètres réels.
On note f_n la fonction $\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}$.
Démontrez que si $a \neq 1$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = a^n x + b\frac{1-a^n}{1-a}$$

Expliciter f_n lorsque $a = 1$.

Ex. 8 — On considère les fonctions suivantes

$$f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \mathrm{e}^x \end{array}\right. \qquad g : \left| \begin{array}{l}]1\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln(x-1) \end{array}\right.$$

$$h : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 1+\dfrac{1}{x^2} \end{array}\right.$$

Pour chacune des fonctions suivantes, dire si elle est bien définie et dans ce cas, donner son expression algébrique

$$f\circ g \quad g\circ f \quad f\circ h \quad h\circ f \quad g\circ h \quad h\circ g$$
$$h\circ g\circ f \quad g\circ f\circ h$$

Injective, surjective, bijective

Ex. 9 — Pour chacune des applications f définie de E dans F, dire si elle est surjective, injective, bijective et déterminer $f\langle E\rangle$.

1. $E=\mathbb{R}, F=\mathbb{R}, \forall x\in E, \quad f(x)=2x^4+x+1.$
2. $E=\mathbb{R}, F=\mathbb{R}, \forall x\in E, \quad f(x)=\mathrm{e}^x-x.$
3. $E=\mathbb{Z}, F=\mathbb{Z}, \forall x\in E, \quad f(x)=2x-x^2.$

Ex. 10 — Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité des applications suivantes.

1. $f_1 : \left|\begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \lfloor x\rfloor\end{array}\right.$
2. $f_2 : \left|\begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{Z}\\ x & \longmapsto & \lfloor x\rfloor\end{array}\right.$
3. $f_3 : \left|\begin{array}{rcl}[1\,;2[& \longrightarrow & \mathbb{Z}\\ x & \longmapsto & \lfloor x\rfloor\end{array}\right.$
4. $f_4 : \left|\begin{array}{rcl}[1\,;2[& \longrightarrow & \{1\}\\ x & \longmapsto & \lfloor x\rfloor\end{array}\right.$

Ex. 11 — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)=\left|x^2+2x\right|$$

Soit $a\in\mathbb{R}$.

1. Résoudre l'équation $f(x)=a$.
2. En déduire les antécédents éventuels de a par x. La fonction f est-elle injective ? surjective ? bijective ? Si oui, expliciter f^{-1}.
3. Reprendre les deux questions précédentes avec la fonction g définie par

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad g(x)=\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

Ex. 12 — Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}$. Montrer que f admet une bijection réciproque que l'on explicitera.

Ex. 13 — Reprendre l'exercice précédent avec $f(x)=\dfrac{x^3}{1+|x^3|}$.

Ex. 14 — Soit $f : \left|\begin{array}{rcl}\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y,y+z,x+2y+z)\end{array}\right.$
L'application f est-elle injective ? surjective ? À quelle condition le triplet (a,b,c) de réels est-il élément de $f\left\langle\mathbb{R}^3\right\rangle$?

Ex. 15 — Soit $f : \left|\begin{array}{rcl}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ (x,y) & \longmapsto & (x+y,xy)\end{array}\right.$
f est-elle injective ? surjective ? À quelle condition le couple (a,b) de réels est-il élément de $f\left\langle\mathbb{R}^2\right\rangle$?

Ex. 16 — Montrer que f réalise une bijection de I sur $f\langle I\rangle$ et déterminer explicitement sa bijection réciproque.

1. $I=[\,0\,;2\,], \forall x\in I,\ \ f(x)=x^2+x-1$;
2. $I=\mathbb{R}, \forall x\in I,\ \ f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$.

★ **Ex. 17** — Soit $f : \left|\begin{array}{rcl}\mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N}\\ x & \longmapsto & x+1\end{array}\right.$ et $g : \left|\begin{array}{rcl}\mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N}\\ y & \longmapsto & \left|\begin{array}{ll}0 & \text{si } y=0\\ y-1 & \text{sinon.}\end{array}\right.\end{array}\right.$

1. Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité éventuelles de f et de g.
2. Préciser $g\circ f$ et $f\circ g$.

Ex. 18 — Soit E, F et G trois ensembles, $f : E\longrightarrow F$ et $g : F\longrightarrow G$ deux applications.

1. Montrer que si $g\circ f$ est injective et f surjective alors g est injective.
2. Montrer que si $g\circ f$ est surjective et g injective alors f est surjective.
3. Soit E, F, G et H quatre ensembles non vides et $f : E\longrightarrow F$, $g : F\longrightarrow G$ et $h : G\longrightarrow H$. On suppose que $g\circ f$ et $h\circ g$ sont bijectives. Prouver que f, g et h sont bijectives.

Ex. 19 — Soit E un ensemble et $f : E\longrightarrow E$ une fonction telle que $f\circ f\circ f=f$.

1. Montrer que f est injective ssi f est surjective.
2. Montrer que f est injective ou surjective ssi $f=\mathrm{Id}_E$.

Ex. 20 — 1. Soit E, F et G trois ensembles non vides et $f : E\longrightarrow F$, $g : F\longrightarrow G$. Montrer que

   a) Si $g\circ f$ est injective alors f est injective ;
   b) Si $g\circ f$ est surjective alors f est surjective.

Ex. 21 — Soit $f : E\longrightarrow F$ et $g : F\longrightarrow E$ telles que $f\circ g\circ f$ soit bijective. Montrer que f et g sont bijectives.

Divers

Ex. 22 — Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Que veulent dire les énoncés suivants ?

1. $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x) = y$;
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ \ f(x) = y$;
3. $\exists y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ \ f(x) = y$;
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \ f(x) = y$.

Ex. 23 — Soit E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application.

1. Soit $A \subset E$. Montrer que, si f est injective, alors la restriction de f à A au départ et $f\langle A\rangle$ à l'arrivée est bijective.
2. Soit $B \subset f\langle E\rangle$. Montrer que si f est injective, alors la restriction de f à $f^{-1}\langle B\rangle$ au départ et B à l'arrivée est bijective.

★ **Ex. 24** — Soit E, F et G trois ensembles, $f : E \longrightarrow F$, et $g : E \longrightarrow G$ deux applications. On considère $h : \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow F \times G \\ x \longmapsto (f(x), g(x)) \end{array} \right.$

1. Montrer que si f ou g est injective alors h est injective.
2. On suppose f et g surjectives ; h est-elle nécessairement surjective ?

Ex. 25 — Dire si les propositions suivantes sont vraies, fausses... ou autre chose :

1. soit E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$:
$$f \text{ injective}$$
$$\iff \quad \forall (x,y) \in E^2, \quad x = y \qquad \text{ou} \qquad f(x) \neq f(y);$$
2. si f et g sont bijectives, de E dans F, $(f \circ g)^{-1} = (f^{-1} \circ g^{-1}) = \mathrm{Id}_E$;
3. deux applications f et g de E dans E telles que $f \circ g = \mathrm{Id}_E$ sont bijectives ;
4. pour toute application f de E dans F, et toute partie A de E, $f^{-1}(f(A)) = A$.

Ex. 26 —
1. Soit $f : E \to F$ une application surjective. Montrer que si la famille $(B_i)_{i\in I}$ est une partition de F , alors la famille $\left(f^{-1}(B_i)\right)_{i\in I}$ est une partition de E.
2. Donnez un exemple où f est surjective, $(A_i)_{i\in I}$ est une partition de E et $\left(f(A_i)\right)_{i\in I}$ n'est pas une partition de F.

Ex. 27 — Soit f une application de E dans E. On suppose que f vérifie $f \circ f \circ f = id_E$. Montrer que f est bijective et exprimer f^{-1} en fonction de f.

Ex. 28 — Soit l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par : $f((x,y)) = (x+y, x+2y)$ est-elle injective ? surjective ?

Ex. 29 —
1. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $[-1\,;1]$ définie par $f(x) = \sin(\pi x)$. f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
2. On note g la restriction de f à $\left]-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right[$. Montrer que g est une application bijective de $\left]-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right[$ sur $]-1\,;1[$. $]-1, 1[$.
3. Soit h l'application de $\mathbb{R}$ dans $]-1\,;1[$ définie par $h(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$. Montrer que h est bijective et déterminer sa réciproque.

Ex. 30 — L'application de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}$ qui à x s'associe $5x-1$ est-elle bijective ? Si oui, déterminer sa bijection réciproque.

Ex. 31 — Soit $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto x - y^2 \end{array} \right.$.

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. Trouver $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Ex. 32 — Soit $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \\ x \longmapsto |x| \end{array} \right.$. On pose $A_1 = \mathbb{N}$ et $A_2 = \mathbb{Z}^-$.

1. Comparer $f\langle A_1 \cap A_2\rangle$ et $f\langle A_1\rangle \cap f\langle A_2\rangle$.
2. Comparer $f\left\langle \overline{A_1}\right\rangle$ et $\overline{f\langle A_1\rangle}$.