

Image, antécédent

- Ex. 1** — Soit $E = \{a, b, c, d\}$ et $F = \{\alpha, \beta, \gamma\}$.
1. Expliciter (si c'est possible) une application f_1 de E dans F telle que f_1 soit surjective.
 2. Expliciter (si c'est possible) une application f_2 de E dans F telle que f_2 soit injective.
 3. Expliciter (si c'est possible) une application f_3 de E dans F telle que $f_3(E) = \{\beta, \gamma\}$.
 4. Expliciter (si c'est possible) une application f_4 de E dans F telle que $f_4^{-1}(F) = \{a\}$.
 5. Expliciter (si c'est possible) une application f_5 de E dans F telle que $f_5^{-1}(\{\alpha\}) = E$.
 6. Expliciter (si c'est possible) une application f_6 de E dans F telle que $f_6^{-1}(\{\alpha, \beta\}) = \emptyset$.

Ex. 2 — Soit $E = \mathbb{R}^2$, muni d'un repère orthonormé, et $F = (Ox)$. On considère l'application f qui associe à un élément M de E son projeté orthogonal sur F .

1. Donner l'écriture analytique de cette application.
2. Quelle est l'image de $(1, 3)$ par f . Quels sont les antécédents de $(5, 0)$? De $(\alpha, 0)$ (avec $\alpha \in \mathbb{R}$) ?
3. Justifier que f est surjective mais pas injective.

Ex. 3 — On considère le cercle trigonométrique \mathcal{C} , le point $B(-1, 0)$ et la droite D d'équation $x = 1$. L'application f associe à un point M de \mathcal{C} le point d'intersection de (BM) et de D .

1. L'application f est-elle bien définie? Si non, modifiez l'énoncé afin qu'elle le soit.
2. Montrer que f est bijective.
3. Soit $A(1, 0)$ et $C(2, 0)$. Déterminer $f^{-1}([AC])$.

Ex. 4 — 1. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$. Que vaut $f([1; 2])$? $f([-1/2; 2])$? $f([a; b])$ avec $a < b$?

2. Soit $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Déterminer $f(\mathbb{R} \setminus \{1\})$.

Ex. 5 — Soit $f : E \rightarrow F$, A et B deux parties de E et C et D deux parties de F .

1. Montrer que

$$\begin{aligned} \text{a) } f^{-1}(C \cup D) &= f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D); & \text{c) } f(A \cup B) &= f(A) \cup f(B); \\ \text{b) } f^{-1}(C \cap D) &= f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D); & \text{d) } f(A \cap B) &\subset f(A) \cap f(B). \end{aligned}$$

2. Montrer que l'assertion suivante est fautive : $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
3. A-t'on $\mathcal{C}_F(f(A)) \subset f(\overline{A})$? A-t'on $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$?

Composition

Ex. 6 — Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

1. Décomposer f en composée de deux fonctions g et h . En déduire que f est bien définie.
2. Expliciter $h \circ g$.

Ex. 7 — Soit $f(x) = ax + b$ une fonction d'une variable réelle x , avec a et b deux paramètres réels.

On note f_n la fonction $\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_n$.

Démontrez que si $a \neq 1$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = a^n x + b \frac{1 - a^n}{1 - a}$$

Expliciter f_n lorsque $a = 1$.

Ex. 8 — On considère les fonctions suivantes

$$\begin{aligned} f &: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x \end{cases} & g &: \begin{cases}]1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(x-1) \end{cases} \\ h &: \begin{cases} \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 + \frac{1}{x^2} \end{cases} \end{aligned}$$

Pour chacune des fonctions suivantes, dire si elle est bien définie et dans ce cas, donner son expression algébrique

$$\begin{aligned} f \circ g \quad g \circ f \quad f \circ h \quad h \circ f \quad g \circ h \quad h \circ g \\ h \circ g \circ f \quad g \circ f \circ h \end{aligned}$$

Injective, surjective, bijective

Ex. 9 — Pour chacune des applications f définie de E dans F , dire si elle est surjective, injective, bijective et déterminer $f^{-1}(E)$.

1. $E = \mathbb{R}, F = \mathbb{R}, \forall x \in E, f(x) = 2x^4 + x + 1$.
2. $E = \mathbb{R}, F = \mathbb{R}, \forall x \in E, f(x) = e^x - x$.
3. $E = \mathbb{Z}, F = \mathbb{Z}, \forall x \in E, f(x) = 2x - x^2$.

Ex. 10 — Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité des applications suivantes.

1. $f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \lfloor x \rfloor \end{cases}$
2. $f_2 : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z} \\ x \longmapsto \lfloor x \rfloor \end{cases}$
3. $f_3 : \begin{cases} [1; 2[\longrightarrow \mathbb{Z} \\ x \longmapsto \lfloor x \rfloor \end{cases}$
4. $f_4 : \begin{cases} [1; 2[\longrightarrow \{1\} \\ x \longmapsto \lfloor x \rfloor \end{cases}$

Ex. 11 — Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = |x^2 + 2x|$$

Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. Résoudre l'équation $f(x) = a$.
2. En déduire les antécédents éventuels de a par x . La fonction f est-elle injective ? surjective ? bijective ? Si oui, expliciter f^{-1} .
3. Reprendre les deux questions précédentes avec la fonction g définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

Ex. 12 — Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.
Montrer que f admet une bijection réciproque que l'on explicitera.

Ex. 13 — Reprendre l'exercice précédent avec $f(x) = \frac{x^3}{1 + |x^3|}$.

Ex. 14 — Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$:
 $(x, y, z) \longmapsto (x + y, y + z, x + 2y + z)$
L'application f est-elle injective ? surjective ? À quelle condition le triplet (a, b, c) de réels est-il élément de $f(\mathbb{R}^3)$?

Ex. 15 — Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$:
 $(x, y) \longmapsto (x + y, xy)$
 f est-elle injective ? surjective ? À quelle condition le couple (a, b) de réels est-il élément de $f(\mathbb{R}^2)$?

Ex. 16 — Montrer que f réalise une bijection de I sur $f(I)$ et déterminer explicitement sa bijection réciproque.

1. $I = [0; 2], \forall x \in I, f(x) = x^2 + x - 1$;
2. $I = \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$.

★ **Ex. 17** — Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$:

$$y \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } y = 0 \\ y - 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité éventuelles de f et de g .
2. Préciser $g \circ f$ et $f \circ g$.

Ex. 18 — Soit E, F et G trois ensembles, $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective et f surjective alors g est injective.
2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g injective alors f est surjective.
3. Soit E, F, G et H quatre ensembles non vides et $f : E \longrightarrow F, g : F \longrightarrow G$ et $h : G \longrightarrow H$. On suppose que $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives. Prouver que f, g et h sont bijectives.

Ex. 19 — Soit E un ensemble et $f : E \longrightarrow E$ une fonction telle que $f \circ f \circ f = f$.

1. Montrer que f est injective ssi f est surjective.
2. Montrer que f est injective ou surjective ssi $f = \text{Id}_E$.

Ex. 20 — 1. Soit E, F et G trois ensembles non vides et $f : E \longrightarrow F, g : F \longrightarrow G$. Montrer que

- a) Si $g \circ f$ est injective alors f est injective ;
- b) Si $g \circ f$ est surjective alors f est surjective.

Ex. 21 — Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow E$ telles que $f \circ g \circ f$ soit bijective. Montrer que f et g sont bijectives.

Divers

Ex. 22 — Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Que veulent dire les énoncés suivants ?

- | | |
|--|--|
| 1. $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = y$;
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) = y$; | 3. $\exists y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = y$;
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) = y$. |
|--|--|

Ex. 23 — Soit E et F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$ une application.

1. Soit $A \subset E$. Montrer que, si f est injective, alors la restriction de f à A au départ et $f(A)$ à l'arrivée est bijective.
2. Soit $B \subset f(E)$. Montrer que si f est injective, alors la restriction de f à $f^{-1}(B)$ au départ et B à l'arrivée est bijective.

★ **Ex. 24** — Soit E, F et G trois ensembles, $f : E \rightarrow F$, et $g : E \rightarrow G$ deux applications. On considère $h : E \rightarrow F \times G$

$$h : \begin{cases} E \rightarrow F \times G \\ x \mapsto (f(x), g(x)) \end{cases}$$

1. Montrer que si f ou g est injective alors h est injective.
2. On suppose f et g surjectives ; h est-elle nécessairement surjective ?

Ex. 25 — Dire si les propositions suivantes sont vraies, fausses... ou autre chose :

1. soit E et F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$:
 f injective
 $\iff \forall (x, y) \in E^2, x = y \text{ ou } f(x) \neq f(y)$;
2. si f et g sont bijectives, de E dans F , $(f \circ g)^{-1} = (f^{-1} \circ g^{-1}) = \text{Id}_E$;
3. deux applications f et g de E dans E telles que $f \circ g = \text{Id}_E$ sont bijectives ;
4. pour toute application f de E dans F , et toute partie A de E , $f^{-1}(f(A)) = A$.

Ex. 26 — 1. Soit $f : E \rightarrow F$ une application surjective. Montrer que si la famille $(B_i)_{i \in I}$ est une partition de F , alors la famille $(f^{-1}(B_i))_{i \in I}$ est une partition de E .

2. Donnez un exemple où f est surjective, $(A_i)_{i \in I}$ est une partition de E et $(f(A_i))_{i \in I}$ n'est pas une partition de F .

Ex. 27 — Soit f une application de E dans E . On suppose que f vérifie $f \circ f \circ f = \text{id}_E$. Montrer que f est bijective et exprimer f^{-1} en fonction de f .

Ex. 28 — Soit l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par : $f((x, y)) = (x + y, x + 2y)$ est-elle injective ? surjective ?

Ex. 29 — 1. Soit f l'application de \mathbb{R} dans $[-1 ; 1]$ définie par $f(x) = \sin(\pi x)$. f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

2. On note g la restriction de f à $]-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}[$. Montrer que g est une application bijective de $]-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}[$ sur $] -1 ; 1[$.
3. Soit h l'application de \mathbb{R} dans $] -1 ; 1[$ définie par $h(x) = \frac{x}{1 + |x|}$. Montrer que h est bijective et déterminer sa réciproque.

Ex. 30 — L'application de \mathbb{N}^* dans \mathbb{N} qui à x s'associe $5x - 1$ est-elle bijective ? Si oui, déterminer sa bijection réciproque.

Ex. 31 — Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x - y^2 \end{cases}$$

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. Trouver $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $f \circ g = \text{Id}_{\mathbb{R}}$.

Ex. 32 — Soit $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$. On pose $A_1 = \mathbb{N}$ et $A_2 = \mathbb{Z}^-$.

1. Comparer $f(A_1 \cap A_2)$ et $f(A_1) \cap f(A_2)$.
2. Comparer $f(\overline{A_1})$ et $\overline{f(A_1)}$.

