Applications

bcpst 1, 3/2018

Image, antécédent

Exercice 1

Soit $E = \{a, b, c, d\}$ et $F = \{\alpha, \beta, \gamma\}$.

1. Expliciter (si c'est possible) une application f_1 de E dans F telle que f_1 soit surjective.
2. Expliciter (si c'est possible) une application f_2 de E dans F telle que f_2 soit injective.
3. Expliciter (si c'est possible) une application f_3 de E dans F telle que $f_3\langle E\rangle = \{\beta, \gamma\}$.
4. Expliciter (si c'est possible) une application f_4 de E dans F telle que $f_4^{-1}\langle F\rangle = \{a\}$.
5. Expliciter (si c'est possible) une application f_5 de E dans F telle que $f_5^{-1}\langle\{\alpha\}\rangle = E$.
6. Expliciter (si c'est possible) une application f_6 de E dans F telle que $f_6^{-1}\langle\{\alpha, \beta\}\rangle = \varnothing$.

Exercice 2

Soit $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé. On considère l'application f qui associe à un élément M de $\mathbb{R}^2$ son projeté orthogonal sur (Ox).

1. Donner l'écriture analytique de cette application.
2. Quelle est l'image de $(1, 3)$ par f ? Quels sont les antécédents de $(5, 0)$? de $(\alpha, 0)$ (avec $\alpha \in \mathbb{R}$) ?
3. Justifier que f est surjective mais pas injective.

Exercice 3

On considère le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$, le point $B(-1, 0)$ et la droite D d'équation $x = 1$.
L'application f associe à un point M de $\mathscr{C}$ le point d'intersection de (BM) et de D.

1. L'application f est-elle bien définie ? Si non, modifiez l'énoncé afin qu'elle le soit.
2. Montrer que f est bijective.
3. Soit $A(1, 0)$ et $C(2, 0)$. Déterminer $f^{-1}\langle[AC]\rangle$.

Exercice 4

1. Soit $f : \left|\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{array}\right.$.
   Que vaut $f\langle[1\,;2]\rangle$? $f\langle[-1/2\,;2]\rangle$? $f\langle[a\,;b]\rangle$ avec $a < b$?
2. Soit $f(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
   Déterminer $f\langle\mathbb{R} \setminus \{1\}\rangle$.

Exercice 5

Soit $f : E \longrightarrow F$, A et B deux parties de E et C et D deux parties de F.

1. Montrer que
   a) $f^{-1}\langle C \cup D\rangle = f^{-1}\langle C\rangle \cup f^{-1}\langle D\rangle$;
   b) $f^{-1}\langle C \cap D\rangle = f^{-1}\langle C\rangle \cap f^{-1}\langle D\rangle$;
   c) $f\langle A \cup B\rangle = f\langle A\rangle \cup f\langle B\rangle$;
   d) $f\langle A \cap B\rangle \subset f\langle A\rangle \cap f\langle B\rangle$.
2. Montrer que l'assertion suivante est fausse :
$$f\langle A \cap B\rangle = f\langle A\rangle \cap f\langle B\rangle$$
3. A-t'on $\complement_F(f\langle A\rangle) \subset f\langle \overline{A}\rangle$?
   A-t'on $f\langle \overline{A}\rangle \subset \overline{(f\langle A\rangle)}$?

Composition

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

1. Décomposer f en composée de deux fonctions g et h. En déduire que f est bien définie.
2. Expliciter $h \circ g$.

Exercice 7

Soit $f(x) = ax + b$ une fonction d'une variable réelle x, avec a et b deux paramètres réels.
On note f_n la fonction $\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}$.
Démontrez que si $a \neq 1$
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = a^n x + b\frac{1-a^n}{1-a}$$
Expliciter f_n lorsque $a = 1$.

Exercice 8

On considère les fonctions suivantes
$$f : \left|\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \mathrm{e}^x \end{array}\right. \qquad g : \left|\begin{array}{l}]1\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln(x-1) \end{array}\right.$$
$$h : \left|\begin{array}{l} \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 1 + \dfrac{1}{x^2} \end{array}\right.$$

Pour chacune des fonctions suivantes, dire si elle est bien définie et dans ce cas, donner son expression algébrique

$$f\circ g \quad g\circ f \quad f\circ h \quad h\circ f \quad g\circ h \quad h\circ g$$
$$h\circ g\circ f \quad g\circ f\circ h$$

INJECTIVE, SURJECTIVE, BIJECTIVE

Exercice 9

Pour chacune des applications f définie de E dans F, dire si elle est surjective, injective, bijective et déterminer $f\langle E\rangle$.

1. $E=\mathbb{R}$, $F=\mathbb{R}$, $\forall x\in E$, $\quad f(x)=2x^4+x+1$.
2. $E=\mathbb{R}$, $F=\mathbb{R}$, $\forall x\in E$, $\quad f(x)=\mathrm{e}^x-x$.
3. $E=\mathbb{Z}$, $F=\mathbb{Z}$, $\forall x\in E$, $\quad f(x)=2x-x^2$.

Exercice 10

Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité des applications suivantes.

1. $f_1 : \left|\begin{array}{l} \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R} \\ x\longmapsto\lfloor x\rfloor\end{array}\right.$
2. $f_2 : \left|\begin{array}{l} \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{Z} \\ x\longmapsto\lfloor x\rfloor\end{array}\right.$
3. $f_3 : \left|\begin{array}{r} [1\,;2[\longrightarrow\mathbb{Z} \\ x\longmapsto\lfloor x\rfloor\end{array}\right.$
4. $f_4 : \left|\begin{array}{r} [1\,;2[\longrightarrow\{1\} \\ x\longmapsto\lfloor x\rfloor\end{array}\right.$

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)=\left|x^2+2x\right|$$

Soit $a\in\mathbb{R}$.

1. Résoudre l'équation $f(x)=a$.
2. En déduire les antécédents éventuels de a par x. La fonction f est-elle injective ? surjective ? bijective ? Si oui, expliciter f^{-1}.
3. Reprendre les deux questions précédentes avec la fonction g définie par

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad g(x)=\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

Exercice 12

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}$.
Montrer que f admet une bijection réciproque que l'on explicitera.

Exercice 13

Reprendre l'exercice précédent avec $f(x)=\dfrac{x^3}{1+|x^3|}$.

Exercice 14

Soit $f : \left|\begin{array}{l} \mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3 \\ (x,y,z)\longmapsto(x+y,y+z,x+2y+z)\end{array}\right.$
L'application f est-elle injective ? surjective ? À quelle condition le triplet (a,b,c) de réels est-il élément de $f\left\langle\mathbb{R}^3\right\rangle$?

Exercice 15

Soit $f : \left|\begin{array}{l} \mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2 \\ (x,y)\longmapsto(x+y,xy)\end{array}\right.$
f est-elle injective ? surjective ? À quelle condition le couple (a,b) de réels est-il élément de $f\left\langle\mathbb{R}^2\right\rangle$?

Exercice 16

Montrer que f réalise une bijection de I sur $f\langle I\rangle$ et déterminer explicitement sa bijection réciproque.

1. $I=[\,0\,;2\,]$, $\forall x\in I$, $\ f(x)=x^2+x-1$;
2. $I=\mathbb{R}$, $\forall x\in I$, $\ f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$.

★ **Exercice 17**

Soit $f : \left|\begin{array}{l} \mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N} \\ x\longmapsto x+1\end{array}\right.$ et $g : \left|\begin{array}{l} \mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N} \\ y\longmapsto\left|\begin{array}{ll} 0 & \text{si } y=0 \\ y-1 & \text{sinon.}\end{array}\right.\end{array}\right.$

1. Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité éventuelles de f et de g.
2. Préciser $g\circ f$ et $f\circ g$.

Exercice 18

Soit E, F et G trois ensembles, $f : E\longrightarrow F$ et $g : F\longrightarrow G$ deux applications.

1. Montrer que si $g\circ f$ est injective et f surjective alors g est injective.
2. Montrer que si $g\circ f$ est surjective et g injective alors f est surjective.
3. Soit E, F, G et H quatre ensembles non vides et $f : E\longrightarrow F$, $g : F\longrightarrow G$ et $h : G\longrightarrow H$.

On suppose que $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives. Prouver que f, g et h sont bijectives.

Exercice 19

Soit E un ensemble et $f : E \longrightarrow E$ une fonction telle que $f \circ f \circ f = f$.

1. Montrer que f est injective ssi f est surjective.
2. Montrer que f est injective ou surjective ssi $f = \mathrm{Id}_E$.

Exercice 20

Soit E, F et G trois ensembles non vides et $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$. Montrer que

1. Si $g \circ f$ est injective alors f est injective ;
2. Si $g \circ f$ est surjective alors f est surjective.

Exercice 21

Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow E$ telles que $f \circ g \circ f$ soit bijective. Montrer que f et g sont bijectives.

Divers

Exercice 22

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Que veulent dire les énoncés suivants ?

1. $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = y$;
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\quad f(x) = y$;
3. $\exists y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\quad f(x) = y$;
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\quad f(x) = y$.

Exercice 23

Soit E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application.

1. Soit $A \subset E$. Montrer que, si f est injective, alors la restriction de f à A au départ et $f\langle A\rangle$ à l'arrivée est bijective.
2. Soit $B \subset f\langle E\rangle$. Montrer que si f est injective, alors la restriction de f à $f^{-1}\langle B\rangle$ au départ et B à l'arrivée est bijective.

★ **Exercice 24**

Soit E, F et G trois ensembles, $f : E \longrightarrow F$, et $g : E \longrightarrow G$ deux applications. On considère

$$h : \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow F \times G \\ x \longmapsto (f(x), g(x)) \end{array} \right.$$

1. Montrer que si f ou g est injective alors h est injective.
2. On suppose f et g surjectives ; h est-elle nécessairement surjective ?

Exercice 25

Dire si les propositions suivantes sont vraies, fausses... ou autre chose :

1. soit E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$:
$$f \text{ injective} \iff \forall (x,y) \in E^2,\quad x = y \quad \text{ou} \quad f(x) \neq f(y);$$
2. si f et g sont bijectives, de E dans F, $(f \circ g)^{-1} = (f^{-1} \circ g^{-1}) = \mathrm{Id}_E$;
3. deux applications f et g de E dans E telles que $f \circ g = \mathrm{Id}_E$ sont bijectives ;
4. pour toute application f de E dans F, et toute partie A de E, $f^{-1}(f(A)) = A$.

Exercice 26

Soit $f : E \to F$ une application surjective.

1. Montrer que si la famille $(B_i)_{i\in I}$ est une partition de F, alors la famille $\left(f^{-1}(B_i)\right)_{i\in I}$ est une partition de E.
2. Donnez un exemple où f est surjective, $(A_i)_{i\in I}$ est une partition de E et $\left(f(A_i)\right)_{i\in I}$ n'est pas une partition de F.

Exercice 27

Soit f une application de E dans E. On suppose que f vérifie $f \circ f \circ f = id_E$. Montrer que f est bijective et exprimer f^{-1} en fonction de f.

Exercice 28

Soit l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par : $f((x,y)) = (x+y, x+2y)$ est-elle injective ? surjective ?

Exercice 29

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $[-1\,;1\,]$ définie par $f(x) = \sin(\pi x)$.

1. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
2. On note g la restriction de f à $\left]-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right[$. Montrer que g est une application bijective de $\left]-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right[$ sur $]-1\,;1[$. $]-1,\ 1[$.

3. Soit h l'application de $\mathbb{R}$ dans $]-1\,;\,1[$ définie par $h(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$. Montrer que h est bijective et déterminer sa réciproque.

Exercice 30

L'application de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}$ qui à x s'associe $5x-1$ est-elle bijective ? Si oui, déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 31

Soit $f\ :\ \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x-y^2 \end{array}\right.$.

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. Trouver $g\ :\ \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^2$ telle que $f\circ g=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Exercice 32

Soit $f\ :\ \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ x & \longmapsto & |x| \end{array}\right.$. On pose $A_1=\mathbb{N}$ et $A_2=\mathbb{Z}^-$.

1. Comparer $f\left\langle A_1\cap A_2\right\rangle$ et $f\left\langle A_1\right\rangle\cap f\left\langle A_2\right\rangle$.
2. Comparer $f\left\langle\overline{A_1}\right\rangle$ et $\overline{f\left\langle A_1\right\rangle}$.