Ex. 1 — Justifier que les applications suivantes sont linéaires, calculer leur image et noyau :

1. $f_1 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x-y, x+y) \end{array} \right.$
2. $f_2 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x-3y, x-y, x+2y) \end{array} \right.$
3. $f_3 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-2y, x, 5y) \end{array} \right.$
4. $f_4 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+3y-z, \\ & & -2x-3y+z, \\ & & 4x+6y-2z) \end{array} \right.$
5. $f_5 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (3x-y, 2x+z, x-2z) \end{array} \right.$
6. $f_6 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z)+xX+(y-z)X^2 \end{array} \right.$
7. $f_7 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y+z, x+2y-z, 2x+z) \end{array} \right.$.
8. $f_8 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (z, x-y, y+z) \end{array} \right.$
9. $f_9 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, y+z, 2x-3y+z) \end{array} \right.$

Ex. 2 — Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$, $\mathscr{F}$ une famille finie d'éléments de E.

1. Montrer que si $\mathscr{F}$ est liée, $u(\mathscr{F})$ est liée. Donner la contraposée de cette implication.
2. Montrer que si $\mathscr{F}$ est génératrice (de E), $u(\mathscr{F})$ est génératrice de $\operatorname{Im} u$.

Ex. 3 — Soient E, F deux espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

1. Montrer que f est injective si et seulement si f transforme toute famille libre de E en une famille libre de F.
2. Montrer que f est surjective si et seulement elle transforme une famille génératrice de E en une famille génératrice de F.
3. Montrer que f est surjective si et seulement elle transforme une base de E en une base de F.

Ex. 4 — Soit E un e.v. et $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que f vérifie l'équation $f^2 - 3f + 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

1. Montrer que f est inversible et donner l'expression de f^{-1} en fonction de f et de Id_E.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe deux réels α_n et β_n tels que $f^n = \alpha_n f + \beta_n \mathrm{Id}_E$.
   Quelle relation de récurrence vérifient les suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
3. En déduire l'expression de f^n en fonction de f, de Id_E et de n.
4. Donner enfin l'expression de f^{-n} en fonction de f et de Id_E.

Ex. 5 — TRÈS UTILE Soit E un e.v. de dimension finie, et $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. On suppose que
   $$\exists g \in \mathscr{L}(E), \qquad g \circ f = \mathrm{Id}_E$$
   Démontrer que f est injective. En déduire qu'elle est bijective.
2. On suppose que
   $$\exists g \in \mathscr{L}(E), \qquad f \circ g = \mathrm{Id}_E$$
   Que peut-on dire de f ? Justifier votre réponse.
3. Donner un énoncé similaire à propos des matrices carrées.

Ex. 6 — Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ admettant une base (e_1, e_2, e_3). Soit f un endomorphisme de E défini par : $f(e_1) = 2e_2 + 3e_3$, $f(e_2) = 2e_1 - 5e_2 - 8e_3$ et $f(e_3) = -e_1 + 4e_2 + 6e_3$.

1. Justifier l'existence et l'unicité de f.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ et en donner une base.
3. Déterminer $\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ et en donner une base.
4. Montrer que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{Id}_E) = \{0_E\}$.
5. Montrer que la réunion des deux bases précédentes constitue une base de E. Trouver l'image par f^2 des vecteurs de cette base.

Ex. 7 — Dans $\mathbb{R}^4$, montrer *sans aucun calcul* que l'ensemble E des $u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ vérifiant que $x+3y-2z-5t = 0$ et $x+2y+z-t = 0$ est un sous-espace vectoriel. En donner la dimension.

Ex. 8 — VRAI OU FAUX ? Soit f est une application linéaire d'un e.v. E dans un e.v. F

1. si $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est libre alors $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est libre ;
2. si $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est libre alors $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est libre ;
3. si $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est génératrice de E alors $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est génératrice de F ;

4. si $(f(e_1),\dots,f(e_n))$ est génératrice de F alors $(e_1,e_2,\dots,e_n)$ est génératrice de E ;
5. si $\operatorname{Im} f = F$ alors f est injective ;
6. si $\operatorname{Im} f = F$ et $\dim F = \dim E$ alors f est injective ;
7. si $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} g$ et $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$ alors $f = g$ (avec g une autre application linéaire de E dans F).

Ex. 9 — Soit E un espace vectoriel et $(f,g) \in (\mathscr{L}(E))^2$.
Montrer que $f\langle \operatorname{Ker}(g\circ f)\rangle = \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f$.

Ex. 10 — Soit $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P(X-1) \end{array} \right.$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer $\operatorname{Ker}\varphi$. Que pouvez-vous dire de φ ?

Ex. 11 — Soit (e_1,e_2,e_3) une base d'un espace vectoriel E et λ un réel. Démontrer que la donnée de

$$f(e_1)=e_1+e_2 \qquad f(e_2)=e_1-e_2 \qquad f(e_3)=e_1+\lambda e_3$$

définit un endomorphisme de E. Comment choisir λ pour que f soit injective ? surjective ?

Ex. 12 — Soit E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Montrer que

1. f est injective ssi l'image de toute famille libre de E est une famille libre de F ;
2. f est surjective ssi l'image de toute famille génératrice de E est une famille génératrice de F ;
3. f est bijective ssi l'image de toute base de E est une base de F.

Ex. 13 — Soit E un espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E tel que $\forall u \in E, (u, f(u))$ est liée. Montrer que f est une homothétie.

Ex. 14 — Soit $\gamma : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1)-2P(X) \end{array} \right.$.

1. Montrer que γ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. a) Déterminer l'image des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ par γ.
   b) En déduire $\operatorname{Im}\gamma$.
3. Déterminer $\operatorname{Ker}\gamma$.

Ex. 15 — Soit $E = \mathbb{R}_2[x]$, $F = \mathbb{R}[X]$ et $f : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ P & \longmapsto & xP'(x) \end{array} \right.$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Montrer que f définit un endomorphisme de E.
3. Déterminer $\operatorname{Ker} f$.

Ex. 16 — Soit $\varphi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par $\varphi(P) = P(X+1) - P(X)$. Montrer que φ est une application linéaire et déterminer $\operatorname{Ker}(\varphi)$.

Ex. 17 — Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$.

1. Montrer que $\operatorname{Ker}(f) \subset \operatorname{Ker}(g\circ f)$ et $\operatorname{Im}(g\circ f) \subset \operatorname{Im} g$.
2. Montrer que si, de plus, g est injective, alors $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(g\circ f)$.
3. Donner une condition suffisante pour que $\operatorname{Im}(g\circ f) = \operatorname{Im} g$.

Ex. 18 — Soit f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E tels que $g\circ f = f\circ g$. Montrer que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont stables par g.

Ex. 19 — On considère l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \left(-\frac{1}{2}x + 3y, -\frac{1}{2}x + 2y\right).$$

1. Vérifier que f est une application linéaire.
2. Chercher un vecteur $v_1 = (x_1,y_1)$ et un vecteur $v_2 = (x_2,y_2)$ de $\mathbb{R}^2$ tels que
$$f(v_1) = \frac{1}{2}v_1 \qquad \text{et} \qquad f(v_2) = v_2$$
3. Montrer que (v_1,v_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.
4. Donner, avec toutes les justifications nécessaires, une base de $\operatorname{Im} f$. Que peut-on dire de f ?
5. Dans la suite de cet exercice, on considère $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $f^n = f\circ f\circ\cdots\circ f$ (n fois).
Déterminer $f^n(v_1)$ et $f^n(v_2)$.
6. On note (e_1,e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$.
   a) Exprimer e_1 en fonction de v_1 et v_2 et faire de même pour e_2.
   b) En déduire $f^n(e_1)$ et $f^n(e_2)$ en fonction de e_1 et e_2, puis $f^n(x,y)$ pour (x,y) quelconque dans $\mathbb{R}^2$.
7. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les deux suites définies par $x_0 = 1$ et $y_0 = 1$ et
$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \ x_{k+1} = -\frac{1}{2}x_k + 3y_k \text{ et } y_{k+1} = -\frac{1}{2}x_k + 2y_k$$
   a) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (x_n,y_n)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = f^n(u_0)$.
   b) En déduire l'expression de u_n puis celle de x_n et y_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ex. 20 — Soit E l'e.v. des suites numériques et $f : \left|\begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (nu_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}\right.$.

1. Montrer que f est une a.l. Est-elle injective ? surjective ?
2. Soit $g : \left|\begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (u_{n-1})_{n\geqslant 1} \end{array}\right.$ Montrer que g est une a.l.
3. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.

★ **Ex. 21** — Soient α un nombre réel et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'application φ suivante est un isomorphisme d'espaces vectoriels et exprimer sa réciproque.

$$\varphi : \left|\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(\alpha), P'(\alpha), \cdots, P^{(k)}(\alpha), \cdots, P^{(n)}(\alpha)) \end{array}\right.$$

Utilisation des matrices

Ex. 22 — Soit E un espace de dimension 3 et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^2 \neq 0$ et $u^3 = 0$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Indication : *Partir d'un vecteur e tel que $u^2(e) \neq 0$.*

Ex. 23 — Déterminer le noyau et l'image des applications linéaires canoniquement associées aux matrices suivantes (on a le droit de réfléchir avant de se lancer dans des calculs...) :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Ex. 24 — Soit M une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1.

1. Montrer que l'on peut trouver deux matrices $A \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ telles que $M = AB$.
2. *Application* Déterminer les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$ telles que $M^2 = 0$.

Matrices et applications linéaires

Ex. 25 — Donner le rang de $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-m \\ 1+m & -1 & 2 \\ 2 & -m & 3 \end{pmatrix}$, où $m \in \mathbb{R}$.

Ex. 26 — Trouver les noyaux et images des endomorphismes représentés par leurs matrices dans les bases canoniques :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Ex. 27 — Pour chacune des matrices suivantes, donner son rang, puis donner une base du noyau et une base de l'image de l'endormorphisme canoniquement associé :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \\ -3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $E = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & -7 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

$C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 10 & 0 & 12 \end{pmatrix}$;

Ex. 28 — Déterminer le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 3 \\ -1 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$.

Ex. 29 — Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base d'un $\mathbb{K}$–e.v. E, $f \in \mathscr{L}(E)$ avec $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$. Quelle est la matrice de f dans $\mathscr{C}$?

1. si $\mathscr{C} = (e_2, e_3, e_1)$;
2. si $\mathscr{C} = (e_1 + e_2, e_3, e_1)$;
3. si $\mathscr{C} = (e_1 - 2e_2, e_3, e_1 + e_2 + e_3)$.

Ex. 30 — Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et $\mathscr{U} = (e_1, e_2, e_2 + e_3)$.

Soit f l'endomorphisme de E représenté dans $\mathscr{B}$ par la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \alpha \end{pmatrix}$

Écrire la matrice de f dans la base $\mathscr{U}$.

Ex. 31 — Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ dans la base canonique. Déterminer la matrice de f dans la base $((1,0,-1),(0,1,1),(1,0,1))$.

Ex. 32 — Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. En utilisant l'application linéaire associée de $\mathscr{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$, calculer A^p pour $p \in \mathbb{Z}$.
2. Même question avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Ex. 33 — Soit $f : \begin{array}{|l} \mathbb{R}_4[X] \longrightarrow \mathbb{R}_4[X] \\ \quad P \longmapsto (X+2)P' - P(X+2) \end{array}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$.
2. Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$.
3. Déterminer le rang, le noyau et l'image de f.

Ex. 34 —

1. Déterminer le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.
2. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que $f(e_1) = e_1 - 2e_2 + e_3$, $f(e_2) = -2e_1 + 3e_2 + e_3$ et $f(e_3) = -2e_2 + 6e_3$.
   a) Écrire la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.
   b) Déterminer le rang de f, une base de son noyau et une base de son image.

Usage de la Force

Ex. 35 — On considère, dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3) les vecteurs $i = (-1,0,-1)$, $j = (2,1,0)$, $k = (0,-1,1)$ et on définit les matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{si } n \in \mathbb{N}$$

$$F_n = {}^t\begin{pmatrix} n & n & 0 \end{pmatrix} \quad C_n = {}^t\begin{pmatrix} n+1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Donner la matrice de passage P de la base (e_1, e_2, e_3) à la base (i, j, k) et calculer son inverse. Calculer la matrice J définie par: $J = P^{-1}AP$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites définies par :
$$\begin{aligned} u_0 = 1 \quad v_0 &= w_0 = 0 \\ u_{n+1} &= 4u_n - 4v_n - 4w_n + n + 1 \\ v_{n+1} &= v_n - w_n + 1 \\ w_{n+1} &= u_n - v_n - w_n \end{aligned}$$
Pour tout entier naturel n, on pose $X_n = {}^t\begin{pmatrix} u_n & v_n & w_n \end{pmatrix}$ et on définit la matrice Y_n par la relation $Y_n = P^{-1}X_n - P^{-1}F_n$.
   a) Calculer Y_0.
   b) Vérifier que $F_{n+1} = AF_n + C_n$
   c) Exprimer, pour tout entier naturel n, X_{n+1} en fonction de X_n, de A et de C_n.
   d) Montrer que $Y_{n+1} = JY_n$, puis calculer Y_n en fonction de n seulement.
3. Donner, pour tout entier naturel n, les expressions de u_n, v_n et w_n en fonction de n.