

Applications linéaires

BCPST I, 12/2017

Exercice 1

Justifier que les applications suivantes sont linéaires, calculer leur image et noyau :

1. $f_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y, z) \longmapsto (2x - y, x + y)$
2. $f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y) \longmapsto (2x - 3y, x - y, x + 2y)$
3. $f_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y, z) \longmapsto (x - 2y, x, 5y)$
4. $f_4 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y, z) \longmapsto (2x + 3y - z,$
 $-2x - 3y + z,$
 $4x + 6y - 2z)$
5. $f_5 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y, z) \longmapsto (3x - y, 2x + z, x - 2z)$
6. $f_6 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$
 $(x, y, z) \longmapsto (x + y + z) + xX + (y - z)X^2$
7. $f_7 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y, z) \longmapsto (x - y + z, x + 2y - z, 2x + z)$
8. $f_8 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y, z) \longmapsto (z, x - y, y + z)$
9. $f_9 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y, z) \longmapsto (x + y, y + z, 2x - 3y + z)$

Exercice 2

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, \mathcal{F} une famille finie d'éléments de E .

1. Montrer que si \mathcal{F} est liée, $u(\mathcal{F})$ est liée. Donner la contraposée de cette implication.
2. Montrer que si \mathcal{F} est génératrice (de E), $u(\mathcal{F})$ est génératrice de $\text{Im } u$.

Exercice 3

Soient E, F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Montrer que f est injective si et seulement si f transforme toute famille libre de E en une famille libre de F .
2. Montrer que f est surjective si et seulement elle transforme une famille génératrice de E en une famille génératrice de F .
3. Montrer que f est surjective si et seulement elle transforme une base de E en une base de F .

Exercice 4

Soit E un e.v. et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f vérifie l'équation $f^2 - 3f + 2\text{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Montrer que f est inversible et donner l'expression de f^{-1} en fonction de f et de Id_E .

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe deux réels α_n et β_n tels que $f^n = \alpha_n f + \beta_n \text{Id}_E$.

Quelle relation de récurrence vérifient les suites $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

3. En déduire l'expression de f^n en fonction de f , de Id_E et de n .

4. Donner enfin l'expression de f^{-n} en fonction de f et de Id_E .

Exercice 5 — Très utile

Soit E un e.v. de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose que

$$\exists g \in \mathcal{L}(E), \quad g \circ f = \text{Id}_E$$

Démontrer que f est injective. En déduire qu'elle est bijective.

2. On suppose que

$$\exists g \in \mathcal{L}(E), \quad f \circ g = \text{Id}_E$$

Que peut-on dire de f ? Justifier votre réponse.

3. Donner un énoncé similaire à propos des matrices carrées.

Exercice 6

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} admettant une base (e_1, e_2, e_3) . Soit f un endomorphisme de E défini par : $f(e_1) = 2e_2 + 3e_3$, $f(e_2) = 2e_1 - 5e_2 - 8e_3$ et $f(e_3) = -e_1 + 4e_2 + 6e_3$.

1. Justifier l'existence et l'unicité de f .
2. Déterminer $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ et en donner une base.
3. Déterminer $\text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E)$ et en donner une base.
4. Montrer que $\text{Ker}(f - \text{Id}_E) \cap \text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E) = \{0_E\}$.
5. Montrer que la réunion des deux bases précédentes constitue une base de E . Trouver l'image par f^2 des vecteurs de cette base.

Exercice 7

Dans \mathbb{R}^4 , montrer *sans aucun calcul* que l'ensemble E des $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ vérifiant que $x + 3y - 2z - 5t = 0$ et $x + 2y + z - t = 0$ est un sous-espace vectoriel. En donner la dimension.

Exercice 8 — Vrai ou faux ?

Soit f est une application linéaire d'un e.v. E dans un e.v. F

1. si (e_1, e_2, \dots, e_n) est libre alors $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est libre ;

- si $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est libre alors (e_1, e_2, \dots, e_n) est libre;
- si (e_1, e_2, \dots, e_n) est génératrice de E alors $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est génératrice de F ;
- si $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est génératrice de F alors (e_1, e_2, \dots, e_n) est génératrice de E ;
- si $\text{Im } f = F$ alors f est injective;
- si $\text{Im } f = F$ et $\dim F = \dim E$ alors f est injective;
- si $\text{Im } f = \text{Im } g$ et $\text{Ker } f = \text{Ker } g$ alors $f = g$ (avec g une autre application linéaire de E dans F).

Exercice 9

Soit E un espace vectoriel et $(f, g) \in (\mathcal{L}(E))^2$.
Montrer que $f(\text{Ker}(g \circ f)) = \text{Ker } g \cap \text{Im } f$.

Exercice 10

Soit $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$.
 $P \mapsto P(X-1)$

- Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
- Déterminer $\text{Ker } \varphi$. Que pouvez-vous dire de φ ?

Exercice 11

Soit (e_1, e_2, e_3) une base d'un espace vectoriel E et λ un réel. Démontrer que la donnée de

$$f(e_1) = e_1 + e_2 \quad f(e_2) = e_1 - e_2 \quad f(e_3) = e_1 + \lambda e_3$$

définit un endomorphisme de E . Comment choisir λ pour que f soit injective? surjective?

Exercice 12

Soit E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que

- f est injective ssi l'image de toute famille libre de E est une famille libre de F ;
- f est surjective ssi l'image de toute famille génératrice de E est une famille génératrice de F ;
- f est bijective ssi l'image de toute base de E est une base de F .

Exercice 13

Soit E un espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E tel que $\forall u \in E, (u, f(u))$ est liée. Montrer que f est une homothétie.

Exercice 14

Soit $\gamma : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$.
 $P \mapsto P(X+1) - 2P(X)$

- Montrer que γ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
- Déterminer l'image des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ par γ .
 - En déduire $\text{Im } \gamma$.
- Déterminer $\text{Ker } \gamma$.

Exercice 15

Soit $E = \mathbb{R}_2[x], F = \mathbb{R}[X]$ et $f : \begin{cases} E \rightarrow F \\ P \mapsto xP'(x) \end{cases}$.

- Montrer que f est une application linéaire.
- Montrer que f définit un endomorphisme de E .
- Déterminer $\text{Ker } f$.

Exercice 16

Soit $\varphi : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ définie par $\varphi(P) = P(X+1) - P(X)$. Montrer que φ est une application linéaire et déterminer $\text{Ker}(\varphi)$.

Exercice 17

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

- Montrer que $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g \circ f)$ et $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im } g$.
- Montrer que si, de plus, g est injective, alors $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(g \circ f)$.
- Donner une condition suffisante pour que $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im } g$.

Exercice 18

Soit f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E tels que $g \circ f = f \circ g$. Montrer que $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont stables par g .

Exercice 19

On considère l'application f de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \left(-\frac{1}{2}x + 3y, -\frac{1}{2}x + 2y \right).$$

- Vérifier que f est une application linéaire.
- Chercher un vecteur $v_1 = (x_1, y_1)$ et un vecteur $v_2 = (x_2, y_2)$ de \mathbb{R}^2 tels que

$$f(v_1) = \frac{1}{2}v_1 \quad \text{et} \quad f(v_2) = v_2$$

- Montrer que (v_1, v_2) est une base de \mathbb{R}^2 .
- Donner, avec toutes les justifications nécessaires, une base de $\text{Im } f$. Que peut-on dire de f ?
- Dans la suite de cet exercice, on considère $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$ (n fois). Déterminer $f^n(v_1)$ et $f^n(v_2)$.
- On note (e_1, e_2) la base canonique de \mathbb{R}^2 , c'est-à-dire $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$.

a) Exprimer e_1 en fonction de v_1 et v_2 et faire de même pour e_2 .

b) En déduire $f^n(e_1)$ et $f^n(e_2)$ en fonction de e_1 et e_2 , puis $f^n(x, y)$ pour (x, y) quelconque dans \mathbb{R}^2 .

- Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les deux suites définies par $x_0 = 1$ et $y_0 = 1$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}, x_{k+1} = -\frac{1}{2}x_k + 3y_k \quad \text{et} \quad y_{k+1} = -\frac{1}{2}x_k + 2y_k$$

a) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = (x_n, y_n)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n = f^n(u_0)$.

- b) En déduire l'expression de u_n puis celle de x_n et y_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 20

Soit E l'e.v. des suites numériques et f :

$$\begin{cases} E \longrightarrow E \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \longmapsto (nu_n)_{n \in \mathbb{N}} \end{cases}$$

1. Montrer que f est une a.l. Est-elle injective? surjective?

2. Soit g :

$$\begin{cases} E \longrightarrow E \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \longmapsto (u_{n-1})_{n \geq 1} \end{cases}$$

Montrer que g est une a.l.

3. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.

★ Exercice 21

Soient α un nombre réel et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'application φ suivante est un isomorphisme d'espaces vectoriels et exprimer sa réciproque.

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ P \longmapsto (P(\alpha), P'(\alpha), \dots, P^{(k)}(\alpha), \dots, P^{(n)}(\alpha)) \end{cases}$$

Utilisation des matrices

Exercice 22

Soit E un espace de dimension 3 et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 \neq 0$ et $u^3 = 0$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle

la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

INDICATION : Partir d'un vecteur e tel que $u^2(e) \neq 0$.

Exercice 23

Déterminer le noyau et l'image des applications linéaires canoniquement associées aux matrices suivantes (on a le droit de réfléchir avant de se lancer dans des calculs...) :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1 \ 2 \ 3 \ 4), \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Exercice 24

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1.

- Montrer que l'on peut trouver deux matrices $A \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ telles que $M = AB$.
- Application Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ telles que $M^2 = 0$.

Matrices et applications linéaires

Exercice 25

Donner le rang de $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-m \\ 1+m & -1 & 2 \\ 2 & -m & 3 \end{pmatrix}$, où $m \in \mathbb{R}$.

Exercice 26

Trouver les noyaux et images des endomorphismes représentés par leurs matrices dans les bases canoniques :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Exercice 27

Pour chacune des matrices suivantes, donner son rang, puis donner une base du noyau et une base de l'image de l'endomorphisme canoniquement associé :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \\ -3 & 4 & 7 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad E =$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & -7 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 10 & 0 & 12 \end{pmatrix};$$

Exercice 28

Déterminer le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 3 \\ -1 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$.

Exercice 29

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base d'un \mathbb{K} -e.v. E , $f \in \mathcal{L}(E)$

avec $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$. Quelle est la matrice de

f dans \mathcal{C} ?

- si $\mathcal{C} = (e_2, e_3, e_1)$;
- si $\mathcal{C} = (e_1 + e_2, e_3, e_1)$;
- si $\mathcal{C} = (e_1 - 2e_2, e_3, e_1 + e_2 + e_3)$.

Exercice 30

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E et $\mathcal{U} = (e_1, e_2, e_2 + e_3)$.

Soit f l'endomorphisme de E représenté dans \mathcal{B} par la

matrice $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \alpha \end{pmatrix}$

Écrire la matrice de f dans la base \mathcal{U} .

Exercice 31

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ dans la base canonique. Déterminer la matrice de f dans la base $((1, 0, -1), (0, 1, 1), (1, 0, 1))$.

Exercice 32

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. En utilisant l'application linéaire associée de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$, calculer A^p pour $p \in \mathbb{Z}$.

2. Même question avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 33

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}_4[X] \longrightarrow \mathbb{R}_4[X] \\ P \longmapsto (X+2)P' - P(X+2) \end{cases}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$.
2. Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$.
3. Déterminer le rang, le noyau et l'image de f .

Exercice 34

1. Déterminer le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

2. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f(e_1) = e_1 - 2e_2 + e_3$, $f(e_2) = -2e_1 + 3e_2 + e_3$ et $f(e_3) = -2e_2 + 6e_3$.

- a) Écrire la matrice de f dans la base \mathcal{B} .
- b) Déterminer le rang de f , une base de son noyau et une base de son image.

Usage de la Force**Exercice 35**

On considère, dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3) les vecteurs $i = (-1, 0, -1)$, $j = (2, 1, 0)$, $k = (0, -1, 1)$ et on définit les matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{si } n \in \mathbb{N}$$

$$F_n = {}^t \begin{pmatrix} n & n & 0 \end{pmatrix} \quad C_n = {}^t \begin{pmatrix} n+1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Donner la matrice de passage P de la base (e_1, e_2, e_3) à la base (i, j, k) et calculer son inverse. Calculer la matrice J définie par: $J = P^{-1}AP$.

2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites définies par :

$$u_0 = 1 \quad v_0 = w_0 = 0$$

$$u_{n+1} = 4u_n - 4v_n - 4w_n + n + 1$$

$$v_{n+1} = v_n - w_n + 1$$

$$w_{n+1} = u_n - v_n - w_n$$

Pour tout entier naturel n , on pose $X_n = {}^t \begin{pmatrix} u_n & v_n & w_n \end{pmatrix}$ et on définit la matrice Y_n par la relation $Y_n = P^{-1}X_n - P^{-1}F_n$.

- a) Calculer Y_0 .
- b) Vérifier que $F_{n+1} = AF_n + C_n$
- c) Exprimer, pour tout entier naturel n , X_{n+1} en fonction de X_n , de A et de C_n .
- d) Montrer que $Y_{n+1} = JY_n$, puis calculer Y_n en fonction de n seulement.

3. Donner, pour tout entier naturel n , les expressions de u_n , v_n et w_n en fonction de n .