

Ex. 1 — Justifier que les applications suivantes sont linéaires, calculer leur image et noyau :

1. $f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \longmapsto (2x - y, x + y) \end{cases}$
2. $f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \longmapsto (2x - 3y, x - y, x + 2y) \end{cases}$
3. $f_3 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \longmapsto (x - 2y, x, 5y) \end{cases}$
4. $f_4 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \longmapsto (2x + 3y - z, \\ -2x - 3y + z, \\ 4x + 6y - 2z) \end{cases}$
5. $f_5 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \longmapsto (3x - y, 2x + z, x - 2z) \end{cases}$
6. $f_6 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ (x, y, z) \longmapsto (x + y + z) + xX + (y - z)X^2 \end{cases}$
7. $f_7 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \longmapsto (x - y + z, x + 2y - z, 2x + z) \end{cases}$
8. $f_8 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \longmapsto (z, x - y, y + z) \end{cases}$
9. $f_9 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \longmapsto (x + y, y + z, 2x - 3y + z) \end{cases}$

Ex. 2 — Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, \mathcal{F} une famille finie d'éléments de E .

1. Montrer que si \mathcal{F} est liée, $u(\mathcal{F})$ est liée. Donner la contraposée de cette implication.
2. Montrer que si \mathcal{F} est génératrice (de E), $u(\mathcal{F})$ est génératrice de $\text{Im } u$.

Ex. 3 — Soient E, F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Montrer que f est injective si et seulement si f transforme toute famille libre de E en une famille libre de F .
2. Montrer que f est surjective si et seulement elle transforme une famille génératrice de E en une famille génératrice de F .
3. Montrer que f est surjective si et seulement elle transforme une base de E en une base de F .

Ex. 4 — Soit E un e.v. et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f vérifie l'équation $f^2 - 3f + 2\text{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Montrer que f est inversible et donner l'expression de f^{-1} en fonction de f et de Id_E .

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe deux réels α_n et β_n tels que $f^n = \alpha_n f + \beta_n \text{Id}_E$.

Quelle relation de récurrence vérifient les suites $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

3. En déduire l'expression de f^n en fonction de f , de Id_E et de n .
4. Donner enfin l'expression de f^{-n} en fonction de f et de Id_E .

Ex. 5 — TRÈS UTILE Soit E un e.v. de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose que

$$\exists g \in \mathcal{L}(E), \quad g \circ f = \text{Id}_E$$

Démontrer que f est injective. En déduire qu'elle est bijective.

2. On suppose que

$$\exists g \in \mathcal{L}(E), \quad f \circ g = \text{Id}_E$$

Que peut-on dire de f ? Justifier votre réponse.

3. Donner un énoncé similaire à propos des matrices carrées.

Ex. 6 — Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} admettant une base (e_1, e_2, e_3) . Soit f un endomorphisme de E défini par : $f(e_1) = 2e_2 + 3e_3$, $f(e_2) = 2e_1 - 5e_2 - 8e_3$ et $f(e_3) = -e_1 + 4e_2 + 6e_3$.

1. Justifier l'existence et l'unicité de f .
2. Déterminer $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ et en donner une base.
3. Déterminer $\text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E)$ et en donner une base.
4. Montrer que $\text{Ker}(f - \text{Id}_E) \cap \text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E) = \{0_E\}$.
5. Montrer que la réunion des deux bases précédentes constitue une base de E . Trouver l'image par f^2 des vecteurs de cette base.

Ex. 7 — Dans \mathbb{R}^4 , montrer *sans aucun calcul* que l'ensemble E des $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ vérifiant que $x + 3y - 2z - 5t = 0$ et $x + 2y + z - t = 0$ est un sous-espace vectoriel. En donner la dimension.

Ex. 8 — VRAI OU FAUX ? Soit f est une application linéaire d'un e.v. E dans un e.v. F

1. si (e_1, e_2, \dots, e_n) est libre alors $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est libre;
2. si $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est libre alors (e_1, e_2, \dots, e_n) est libre;
3. si (e_1, e_2, \dots, e_n) est génératrice de E alors $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est génératrice de F ;

4. si $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est génératrice de F alors (e_1, e_2, \dots, e_n) est génératrice de E ;
5. si $\text{Im } f = F$ alors f est injective;
6. si $\text{Im } f = F$ et $\dim F = \dim E$ alors f est injective;
7. si $\text{Im } f = \text{Im } g$ et $\text{Ker } f = \text{Ker } g$ alors $f = g$ (avec g une autre application linéaire de E dans F).

Ex. 9 — Soit E un espace vectoriel et $(f, g) \in (\mathcal{L}(E))^2$.

Montrer que $f \langle \text{Ker}(g \circ f) \rangle = \text{Ker } g \cap \text{Im } f$.

Ex. 10 — Soit $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P \longmapsto P(X-1) \end{cases}$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer $\text{Ker } \varphi$. Que pouvez-vous dire de φ ?

Ex. 11 — Soit (e_1, e_2, e_3) une base d'un espace vectoriel E et λ un réel. Démontrer que la donnée de

$$f(e_1) = e_1 + e_2 \quad f(e_2) = e_1 - e_2 \quad f(e_3) = e_1 + \lambda e_3$$

définit un endomorphisme de E . Comment choisir λ pour que f soit injective? surjective?

Ex. 12 — Soit E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que

1. f est injective ssi l'image de toute famille libre de E est une famille libre de F ;
2. f est surjective ssi l'image de toute famille génératrice de E est une famille génératrice de F ;
3. f est bijective ssi l'image de toute base de E est une base de F .

Ex. 13 — Soit E un espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E tel que $\forall u \in E, (u, f(u))$ est liée. Montrer que f est une homothétie.

Ex. 14 — Soit $\gamma : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P \longmapsto P(X+1) - 2P(X) \end{cases}$.

1. Montrer que γ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. a) Déterminer l'image des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ par γ .
b) En déduire $\text{Im } \gamma$.
3. Déterminer $\text{Ker } \gamma$.

Ex. 15 — Soit $E = \mathbb{R}_2[x], F = \mathbb{R}[X]$ et $f : \begin{cases} E \longrightarrow F \\ P \longmapsto xP'(x) \end{cases}$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Montrer que f définit un endomorphisme de E .

3. Déterminer $\text{Ker } f$.

Ex. 16 — Soit $\varphi : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ définie par $\varphi(P) = P(X+1) - P(X)$. Montrer que φ est une application linéaire et déterminer $\text{Ker}(\varphi)$.

Ex. 17 — Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

1. Montrer que $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g \circ f)$ et $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im } g$.
2. Montrer que si, de plus, g est injective, alors $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(g \circ f)$.
3. Donner une condition suffisante pour que $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im } g$.

Ex. 18 — Soit f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E tels que $g \circ f = f \circ g$. Montrer que $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont stables par g .

Ex. 19 — On considère l'application f de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \left(-\frac{1}{2}x + 3y, -\frac{1}{2}x + 2y \right).$$

1. Vérifier que f est une application linéaire.
2. Chercher un vecteur $v_1 = (x_1, y_1)$ et un vecteur $v_2 = (x_2, y_2)$ de \mathbb{R}^2 tels que

$$f(v_1) = \frac{1}{2}v_1 \quad \text{et} \quad f(v_2) = v_2$$
3. Montrer que (v_1, v_2) est une base de \mathbb{R}^2 .
4. Donner, avec toutes les justifications nécessaires, une base de $\text{Im } f$. Que peut-on dire de f ?
5. Dans la suite de cet exercice, on considère $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$ (n fois). Déterminer $f^n(v_1)$ et $f^n(v_2)$.
6. On note (e_1, e_2) la base canonique de \mathbb{R}^2 , c'est-à-dire $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$.

a) Exprimer e_1 en fonction de v_1 et v_2 et faire de même pour e_2 .

b) En déduire $f^n(e_1)$ et $f^n(e_2)$ en fonction de e_1 et e_2 , puis $f^n(x, y)$ pour (x, y) quelconque dans \mathbb{R}^2 .

7. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les deux suites définies par $x_0 = 1$ et $y_0 = 1$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad x_{k+1} = -\frac{1}{2}x_k + 3y_k \quad \text{et} \quad y_{k+1} = -\frac{1}{2}x_k + 2y_k$$

a) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = (x_n, y_n)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n = f^n(u_0)$.

b) En déduire l'expression de u_n puis celle de x_n et y_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ex. 20 — Soit E l'e.v. des suites numériques et f :

$$\begin{cases} E \longrightarrow E \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \longmapsto (nu_n)_{n \in \mathbb{N}} \end{cases}.$$

1. Montrer que f est une a.l. Est-elle injective ? surjective ?
2. Soit g : $\begin{cases} E \longrightarrow E \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \longmapsto (u_{n-1})_{n \geq 1} \end{cases}$
Montrer que g est une a.l.
3. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.

★ **Ex. 21** — Soient α un nombre réel et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'application φ suivante est un isomorphisme d'espaces vectoriels et exprimer sa réciproque.

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ P \longmapsto (P(\alpha), P'(\alpha), \dots, P^{(k)}(\alpha), \dots, P^{(n)}(\alpha)) \end{cases}$$

Utilisation des matrices

Ex. 22 — Soit E un espace de dimension 3 et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 \neq 0$ et $u^3 = 0$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

INDICATION : Partir d'un vecteur e tel que $u^2(e) \neq 0$.

Ex. 23 — Déterminer le noyau et l'image des applications linéaires canoniquement associées aux matrices suivantes (on a le droit de réfléchir avant de se lancer dans des calculs...) :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1 \ 2 \ 3 \ 4), \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Ex. 24 — Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1.

1. Montrer que l'on peut trouver deux matrices $A \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ telles que $M = AB$.
2. Application Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ telles que $M^2 = 0$.

Matrices et applications linéaires

Ex. 25 — Donner le rang de $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-m \\ 1+m & -1 & 2 \\ 2 & -m & 3 \end{pmatrix}$, où $m \in \mathbb{R}$.

Ex. 26 — Trouver les noyaux et images des endomorphismes représentés par leurs matrices dans les bases canoniques :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Ex. 27 — Pour chacune des matrices suivantes, donner son rang, puis donner une base du noyau et une base de l'image de l'endomorphisme canoniquement associé :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \\ -3 & 4 & 7 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & -7 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 10 & 0 & 12 \end{pmatrix};$$

Ex. 28 — Déterminer le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 3 \\ -1 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$.

Ex. 29 — Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base d'un \mathbb{K} -e.v.

$$E, f \in \mathcal{L}(E) \text{ avec } \text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}. \text{ Quelle}$$

est la matrice de f dans \mathcal{C} ?

1. si $\mathcal{C} = (e_2, e_3, e_1)$;
2. si $\mathcal{C} = (e_1 + 2e_2, e_3, e_1 + e_2 + e_3, e_2, e_3, e_1)$;
3. si $\mathcal{C} = (e_1 - 2e_2, e_3, e_1 + e_2 + e_3)$.

Ex. 30 — Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E et $\mathcal{U} = (e_1, e_2, e_2 + e_3)$.

Soit f l'endomorphisme de E représenté dans \mathcal{B} par

$$\text{la matrice } \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Écrire la matrice de f dans la base \mathcal{U} .

Ex. 31 — Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ dans la base canonique. Déterminer la matrice de f dans la base $((1, 0, -1), (0, 1, 1), (1, 0, 1))$.

Ex. 32 — Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. En utilisant l'application linéaire associée de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$, calculer A^p pour $p \in \mathbb{Z}$.

2. Même question avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Ex. 33 — Soit $f : \mathbb{R}_4[X] \rightarrow \mathbb{R}_4[X]$:
 $P \mapsto (X+2)P' - P(X+2)$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$.
2. Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$.
3. Déterminer le rang, le noyau et l'image de f .

Ex. 34 — 1. Déterminer le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

2. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f(e_1) = e_1 - 2e_2 + e_3$, $f(e_2) = -2e_1 + 3e_2 + e_3$ et $f(e_3) = -2e_2 + 6e_3$.

- a) Écrire la matrice de f dans la base \mathcal{B} .
- b) Déterminer le rang de f , une base de son noyau et une base de son image.

Usage de la Force



Ex. 35 — On considère, dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3) les vecteurs $i = (-1, 0, -1)$, $j = (2, 1, 0)$, $k = (0, -1, 1)$ et on définit les matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{si } n \in \mathbb{N}$$

$$F_n = {}^t \begin{pmatrix} n & n & 0 \end{pmatrix} \quad C_n = {}^t \begin{pmatrix} n+1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Donner la matrice de passage P de la base (e_1, e_2, e_3) à la base (i, j, k) et calculer son inverse. Calculer la matrice J définie par: $J = P^{-1}AP$.
2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites définies par :

$$\begin{aligned} u_0 &= 1 & v_0 &= w_0 = 0 \\ u_{n+1} &= 4u_n - 4v_n - 4w_n + n + 1 \\ v_{n+1} &= v_n - w_n + 1 \\ w_{n+1} &= u_n - v_n - w_n \end{aligned}$$

Pour tout entier naturel n , on pose $X_n = {}^t \begin{pmatrix} u_n & v_n & w_n \end{pmatrix}$ et on définit la matrice Y_n par la relation $Y_n = P^{-1}X_n - P^{-1}F_n$.

- a) Calculer Y_0 .
 - b) Vérifier que $F_{n+1} = AF_n + C_n$
 - c) Exprimer, pour tout entier naturel n , X_{n+1} en fonction de X_n , de A et de C_n .
 - d) Montrer que $Y_{n+1} = JY_n$, puis calculer Y_n en fonction de n seulement.
3. Donner, pour tout entier naturel n , les expressions de u_n , v_n et w_n en fonction de n .