

**Ex. 1** — Justifier que les applications suivantes sont linéaires, calculer leur image et noyau :

1.  $f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \longmapsto (2x - y, x + y) \end{cases}$
2.  $f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \longmapsto (2x - 3y, x - y, x + 2y) \end{cases}$
3.  $f_3 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \longmapsto (x - 2y, x, 5y) \end{cases}$
4.  $f_4 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \longmapsto (2x + 3y - z, \\ -2x - 3y + z, \\ 4x + 6y - 2z) \end{cases}$
5.  $f_5 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \longmapsto (3x - y, 2x + z, x - 2z) \end{cases}$
6.  $f_6 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ (x, y, z) \longmapsto (x + y + z) + xX + (y - z)X^2 \end{cases}$
7.  $f_7 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \longmapsto (x - y + z, x + 2y - z, 2x + z) \end{cases}$
8.  $f_8 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \longmapsto (z, x - y, y + z) \end{cases}$
9.  $f_9 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \longmapsto (x + y, y + z, 2x - 3y + z) \end{cases}$

**Ex. 2** — Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $\mathcal{F}$  une famille finie d'éléments de  $E$ .

1. Montrer que si  $\mathcal{F}$  est liée,  $u(\mathcal{F})$  est liée. Donner la contraposée de cette implication.
2. Montrer que si  $\mathcal{F}$  est génératrice (de  $E$ ),  $u(\mathcal{F})$  est génératrice de  $\text{Im } u$ .

**Ex. 3** — Soient  $E, F$  deux espaces vectoriels et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

1. Montrer que  $f$  est injective si et seulement si  $f$  transforme toute famille libre de  $E$  en une famille libre de  $F$ .
2. Montrer que  $f$  est surjective si et seulement elle transforme une famille génératrice de  $E$  en une famille génératrice de  $F$ .
3. Montrer que  $f$  est surjective si et seulement elle transforme une base de  $E$  en une base de  $F$ .

**Ex. 4** — Soit  $E$  un e.v. et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . On suppose que  $f$  vérifie l'équation  $f^2 - 3f + 2\text{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .

1. Montrer que  $f$  est inversible et donner l'expression de  $f^{-1}$  en fonction de  $f$  et de  $\text{Id}_E$ .

2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , montrer qu'il existe deux réels  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  tels que  $f^n = \alpha_n f + \beta_n \text{Id}_E$ .

Quelle relation de récurrence vérifient les suites  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ?

3. En déduire l'expression de  $f^n$  en fonction de  $f$ , de  $\text{Id}_E$  et de  $n$ .
4. Donner enfin l'expression de  $f^{-n}$  en fonction de  $f$  et de  $\text{Id}_E$ .

**Ex. 5** — TRÈS UTILE Soit  $E$  un e.v. de dimension finie, et  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

1. On suppose que

$$\exists g \in \mathcal{L}(E), \quad g \circ f = \text{Id}_E$$

Démontrer que  $f$  est injective. En déduire qu'elle est bijective.

2. On suppose que

$$\exists g \in \mathcal{L}(E), \quad f \circ g = \text{Id}_E$$

Que peut-on dire de  $f$  ? Justifier votre réponse.

3. Donner un énoncé similaire à propos des matrices carrées.

**Ex. 6** — Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  admettant une base  $(e_1, e_2, e_3)$ . Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$  défini par :  $f(e_1) = 2e_2 + 3e_3$ ,  $f(e_2) = 2e_1 - 5e_2 - 8e_3$  et  $f(e_3) = -e_1 + 4e_2 + 6e_3$ .

1. Justifier l'existence et l'unicité de  $f$ .
2. Déterminer  $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$  et en donner une base.
3. Déterminer  $\text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E)$  et en donner une base.
4. Montrer que  $\text{Ker}(f - \text{Id}_E) \cap \text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E) = \{0_E\}$ .
5. Montrer que la réunion des deux bases précédentes constitue une base de  $E$ . Trouver l'image par  $f^2$  des vecteurs de cette base.

**Ex. 7** — Dans  $\mathbb{R}^4$ , montrer *sans aucun calcul* que l'ensemble  $E$  des  $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$  vérifiant que  $x + 3y - 2z - 5t = 0$  et  $x + 2y + z - t = 0$  est un sous-espace vectoriel. En donner la dimension.

**Ex. 8** — VRAI OU FAUX ? Soit  $f$  est une application linéaire d'un e.v.  $E$  dans un e.v.  $F$

1. si  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  est libre alors  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$  est libre;
2. si  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$  est libre alors  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  est libre;
3. si  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  est génératrice de  $E$  alors  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$  est génératrice de  $F$ ;

- si  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$  est génératrice de  $F$  alors  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  est génératrice de  $E$ ;
- si  $\text{Im } f = F$  alors  $f$  est injective;
- si  $\text{Im } f = F$  et  $\dim F = \dim E$  alors  $f$  est injective;
- si  $\text{Im } f = \text{Im } g$  et  $\text{Ker } f = \text{Ker } g$  alors  $f = g$  (avec  $g$  une autre application linéaire de  $E$  dans  $F$ ).

**Ex. 9** — Soit  $E$  un espace vectoriel et  $(f, g) \in (\mathcal{L}(E))^2$ .

Montrer que  $f(\text{Ker}(g \circ f)) = \text{Ker } g \cap \text{Im } f$ .

**Ex. 10** — Soit  $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P \longmapsto P(X-1) \end{cases}$ .

- Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
- Déterminer  $\text{Ker } \varphi$ . Que pouvez-vous dire de  $\varphi$ ?

**Ex. 11** — Soit  $(e_1, e_2, e_3)$  une base d'un espace vectoriel  $E$  et  $\lambda$  un réel. Démontrer que la donnée de

$$f(e_1) = e_1 + e_2 \quad f(e_2) = e_1 - e_2 \quad f(e_3) = e_1 + \lambda e_3$$

définit un endomorphisme de  $E$ . Comment choisir  $\lambda$  pour que  $f$  soit injective? surjective?

**Ex. 12** — Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Montrer que

- $f$  est injective ssi l'image de toute famille libre de  $E$  est une famille libre de  $F$ ;
- $f$  est surjective ssi l'image de toute famille génératrice de  $E$  est une famille génératrice de  $F$ ;
- $f$  est bijective ssi l'image de toute base de  $E$  est une base de  $F$ .

**Ex. 13** — Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et  $f$  un endomorphisme de  $E$  tel que  $\forall u \in E, (u, f(u))$  est liée. Montrer que  $f$  est une homothétie.

**Ex. 14** — Soit  $\gamma : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P \longmapsto P(X+1) - 2P(X) \end{cases}$ .

- Montrer que  $\gamma$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
- Déterminer l'image des vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{R}_n[X]$  par  $\gamma$ .
  - En déduire  $\text{Im } \gamma$ .
- Déterminer  $\text{Ker } \gamma$ .

**Ex. 15** — Soit  $E = \mathbb{R}_2[x], F = \mathbb{R}[X]$  et  $f : \begin{cases} E \longrightarrow F \\ P \longmapsto xP'(x) \end{cases}$ .

- Montrer que  $f$  est une application linéaire.
- Montrer que  $f$  définit un endomorphisme de  $E$ .

3. Déterminer  $\text{Ker } f$ .

**Ex. 16** — Soit  $\varphi : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$  définie par  $\varphi(P) = P(X+1) - P(X)$ . Montrer que  $\varphi$  est une application linéaire et déterminer  $\text{Ker}(\varphi)$ .

**Ex. 17** — Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ .

- Montrer que  $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g \circ f)$  et  $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im } g$ .
- Montrer que si, de plus,  $g$  est injective, alors  $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(g \circ f)$ .
- Donner une condition suffisante pour que  $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im } g$ .

**Ex. 18** — Soit  $f$  et  $g$  deux endomorphismes d'un espace vectoriel  $E$  tels que  $g \circ f = f \circ g$ . Montrer que  $\text{Ker } f$  et  $\text{Im } f$  sont stables par  $g$ .

**Ex. 19** — On considère l'application  $f$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \left( -\frac{1}{2}x + 3y, -\frac{1}{2}x + 2y \right).$$

- Vérifier que  $f$  est une application linéaire.
- Chercher un vecteur  $v_1 = (x_1, y_1)$  et un vecteur  $v_2 = (x_2, y_2)$  de  $\mathbb{R}^2$  tels que
 
$$f(v_1) = \frac{1}{2}v_1 \quad \text{et} \quad f(v_2) = v_2$$
- Montrer que  $(v_1, v_2)$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ .
- Donner, avec toutes les justifications nécessaires, une base de  $\text{Im } f$ . Que peut-on dire de  $f$ ?
- Dans la suite de cet exercice, on considère  $n \in \mathbb{N}^*$ . On pose  $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$  ( $n$  fois). Déterminer  $f^n(v_1)$  et  $f^n(v_2)$ .

6. On note  $(e_1, e_2)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ , c'est-à-dire  $e_1 = (1, 0)$  et  $e_2 = (0, 1)$ .

- Exprimer  $e_1$  en fonction de  $v_1$  et  $v_2$  et faire de même pour  $e_2$ .
- En déduire  $f^n(e_1)$  et  $f^n(e_2)$  en fonction de  $e_1$  et  $e_2$ , puis  $f^n(x, y)$  pour  $(x, y)$  quelconque dans  $\mathbb{R}^2$ .

7. Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  les deux suites définies par  $x_0 = 1$  et  $y_0 = 1$  et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad x_{k+1} = -\frac{1}{2}x_k + 3y_k \quad \text{et} \quad y_{k+1} = -\frac{1}{2}x_k + 2y_k$$

- On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}, u_n = (x_n, y_n)$ . Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*, u_n = f^n(u_0)$ .
- En déduire l'expression de  $u_n$  puis celle de  $x_n$  et  $y_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Ex. 20** — Soit  $E$  l'e.v. des suites numériques et  $f$  :

$$\begin{cases} E \longrightarrow E \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \longmapsto (nu_n)_{n \in \mathbb{N}} \end{cases}$$

1. Montrer que  $f$  est une a.l. Est-elle injective? surjective?
2. Soit  $g$  :  $\begin{cases} E \longrightarrow E \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \longmapsto (u_{n-1})_{n \geq 1} \end{cases}$   
Montrer que  $g$  est une a.l.
3. Déterminer  $f \circ g$  et  $g \circ f$ .

★ **Ex. 21** — Soient  $\alpha$  un nombre réel et  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que l'application  $\varphi$  suivante est un isomorphisme d'espaces vectoriels et exprimer sa réciproque.

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ P \longmapsto (P(\alpha), P'(\alpha), \dots, P^{(k)}(\alpha), \dots, P^{(n)}(\alpha)) \end{cases}$$

### Utilisation des matrices

**Ex. 22** — Soit  $E$  un espace de dimension 3 et  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $u^2 \neq 0$  et  $u^3 = 0$ . Montrer qu'il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

INDICATION : Partir d'un vecteur  $e$  tel que  $u^2(e) \neq 0$ .

**Ex. 23** — Déterminer le noyau et l'image des applications linéaires canoniquement associées aux matrices suivantes (on a le droit de réfléchir avant de se lancer dans des calculs...) :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

**Ex. 24** — Soit  $M$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  de rang 1.

1. Montrer que l'on peut trouver deux matrices  $A \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$  telles que  $M = AB$ .
2. Application Déterminer les matrices de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$  telles que  $M^2 = 0$ .

### Matrices et applications linéaires

**Ex. 25** — Donner le rang de  $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-m \\ 1+m & -1 & 2 \\ 2 & -m & 3 \end{pmatrix}$ , où  $m \in \mathbb{R}$ .

**Ex. 26** — Trouver les noyaux et images des endomorphismes représentés par leurs matrices dans les bases canoniques :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

**Ex. 27** — Pour chacune des matrices suivantes, donner son rang, puis donner une base du noyau et une base de l'image de l'endomorphisme canoniquement associé :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \\ -3 & 4 & 7 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & -7 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 10 & 0 & 12 \end{pmatrix};$$

**Ex. 28** — Déterminer le rang de la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 3 \\ -1 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ .

**Ex. 29** — Soit  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  une base d'un  $\mathbb{K}$ -e.v.

$$E, f \in \mathcal{L}(E) \text{ avec } \text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}. \text{ Quelle}$$

est la matrice de  $f$  dans  $\mathcal{C}$  ?

1. si  $\mathcal{C} = (e_2, e_3, e_1)$ ;
2. si  $\mathcal{C} = (e_1 + 2e_2, e_3, e_1 + e_2 + e_3)$ .
3. si  $\mathcal{C} = (e_1 - e_2, e_3, e_1)$ ;

**Ex. 30** — Soit  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  une base d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  et  $\mathcal{U} = (e_1, e_2, e_2 + e_3)$ .

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $E$  représenté dans  $\mathcal{B}$  par

$$\text{la matrice } \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Écrire la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{U}$ .

**Ex. 31** — Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  de matrice  $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$  dans la base canonique. Déterminer la matrice de  $f$  dans la base  $((1, 0, -1), (0, 1, 1), (1, 0, 1))$ .

**Ex. 32** — Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

1. En utilisant l'application linéaire associée de  $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$ , calculer  $A^p$  pour  $p \in \mathbb{Z}$ .

2. Même question avec  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$ .

**Ex. 33** — Soit  $f : \mathbb{R}_4[X] \rightarrow \mathbb{R}_4[X]$  définie par  $P \mapsto (X+2)P' - P(X+2)$ .

1. Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_4[X]$ .
2. Donner la matrice de  $f$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_4[X]$ .
3. Déterminer le rang, le noyau et l'image de  $f$ .

**Ex. 34** — 1. Déterminer le rang de la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ .

2. Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension 3 et  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  une base de  $E$ . Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  telle que  $f(e_1) = e_1 - 2e_2 + e_3$ ,  $f(e_2) = -2e_1 + 3e_2 + e_3$  et  $f(e_3) = -2e_2 + 6e_3$ .
  - a) Écrire la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
  - b) Déterminer le rang de  $f$ , une base de son noyau et une base de son image.

### Usage de la Force



**Ex. 35** — On considère, dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$  muni de sa base canonique  $(e_1, e_2, e_3)$  les vecteurs  $i = (-1, 0, -1)$ ,  $j = (2, 1, 0)$ ,  $k = (0, -1, 1)$  et on définit les matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{si } n \in \mathbb{N}$$

$$F_n = {}^t \begin{pmatrix} n & n & 0 \end{pmatrix} \quad C_n = {}^t \begin{pmatrix} n+1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Donner la matrice de passage  $P$  de la base  $(e_1, e_2, e_3)$  à la base  $(i, j, k)$  et calculer son inverse. Calculer la matrice  $J$  définie par:  $J = P^{-1}AP$ .
2. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  trois suites définies par :

$$\begin{aligned} u_0 &= 1 & v_0 &= w_0 = 0 \\ u_{n+1} &= 4u_n - 4v_n - 4w_n + n + 1 \\ v_{n+1} &= v_n - w_n + 1 \\ w_{n+1} &= u_n - v_n - w_n \end{aligned}$$

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $X_n = {}^t \begin{pmatrix} u_n & v_n & w_n \end{pmatrix}$  et on définit la matrice  $Y_n$  par la relation  $Y_n = P^{-1}X_n - P^{-1}F_n$ .

- a) Calculer  $Y_0$ .
  - b) Vérifier que  $F_{n+1} = AF_n + C_n$ .
  - c) Exprimer, pour tout entier naturel  $n$ ,  $X_{n+1}$  en fonction de  $X_n$ , de  $A$  et de  $C_n$ .
  - d) Montrer que  $Y_{n+1} = JY_n$ , puis calculer  $Y_n$  en fonction de  $n$  seulement.
3. Donner, pour tout entier naturel  $n$ , les expressions de  $u_n$ ,  $v_n$  et  $w_n$  en fonction de  $n$ .