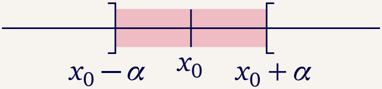
Limites d’une fonction — Continuité ponctuelle

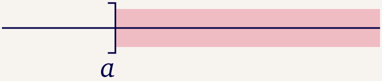
Parties de $\mathbb{R}$ et ordre

Définition 1.1 — Voisinage

Un voisinage de x_0 est un intervalle ouvert de la forme $]x_0 - \alpha\,;x_0 + \alpha[$ avec $\alpha > 0$.



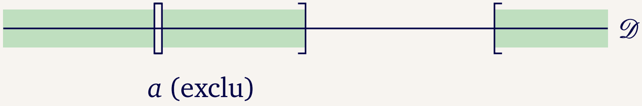
Un voisinage de $+\infty$ est un intervalle ouvert de la forme $]a\,;\,+\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$.



Limites d’une fonction en un point

Notations du chapitre

Dans tout ce chapitre, $\mathscr{D}$ est un domaine de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point, ou bien une réunion finie de tels intervalles de $\mathbb{R}$.



Un exemple de domaine de définition

Définition 2.3 — Limite finie en un point

Soit f est une fonction de $\mathscr{D}$ dans $\mathbb{R}$ et x_0 un point ou une borne finie de $\mathscr{D}$.

La fonction f tend vers ℓ en x_0 si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in \mathscr{D} \cap \,]x_0 - \alpha \,;\, x_0 + \alpha[\,, \qquad |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Proposition 2.4 — Unicité de la limite

Soit f est une fonction de $\mathscr{D}$ dans $\mathbb{R}$ et x_0 un point ou une borne finie de $\mathscr{D}$.

Si f tend vers ℓ en x_0, alors il existe un seul réel ℓ vérifiant cette propriété.

Thm. & Déf. 2.5 — Continuité ponctuelle

Soit f est une fonction de $\mathscr{D}$ dans $\mathbb{R}$ et x_0 un point de $\mathscr{D}$.

Si f admet une limite en x_0 alors nécessairement cette limite est égale à $f(x_0)$. Dans ce cas, on dit que f est continue en x_0.

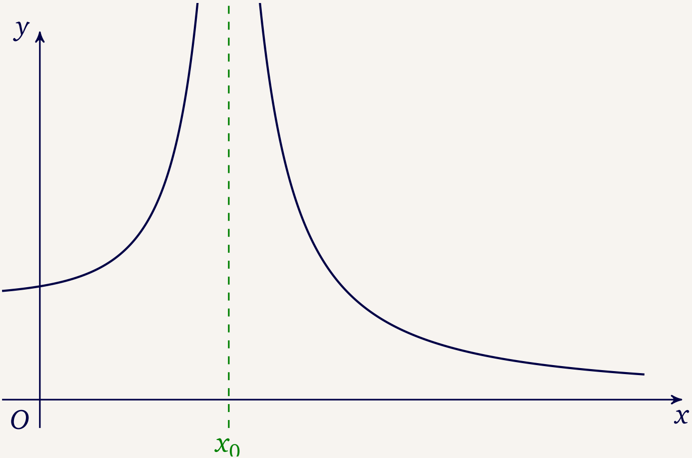
Définition 2.6 — Limites infinies en un point fini

Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point ou une borne finie de $\mathscr{D}$.

La fonction f tend vers $+\infty$ en x_0 si et seulement si

$$\forall M > 0, \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in \mathscr{D} \cap \left]x_0 - \alpha \,;\, x_0 + \alpha\right[, \quad f(x) > M.$$

La fonction f tend vers $-\infty$ en x_0 si et seulement si $-f$ tend vers $+\infty$.



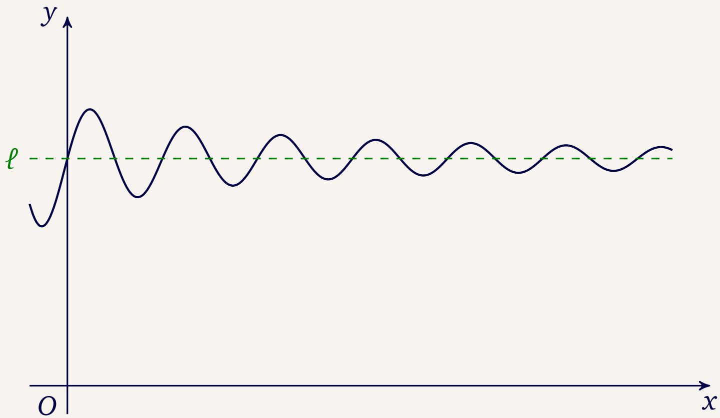
Asymptote verticale $x = x_0$.

Définition 2.8 — Limite finie en $+\infty$

On suppose que $\mathscr{D}$ contient un voisinage de $+\infty$. Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$.

La fonction f tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A > 0, \quad x \in \mathscr{D} \cap \,]A\,;\,+\infty[\, \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$



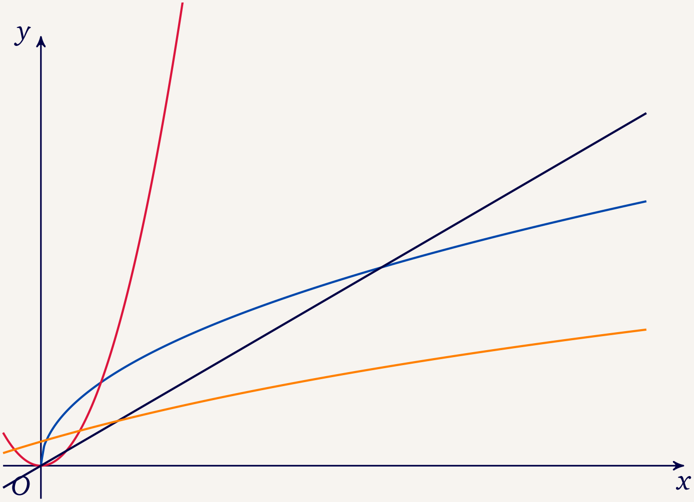
Asymptote horizontale $y = \ell$

Définition 2.10 — Limite infinie en $+\infty$

On suppose que $\mathscr{D}$ contient un voisinage de $+\infty$. Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$.

La fonction f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ si et seulement si

$$\forall M > 0, \quad \exists A > 0 \qquad x \in \mathscr{D} \cap \,]A\,;\,+\infty[\; \Longrightarrow f(x) > M.$$



Différents comportements possibles en $+\infty$

Définition 2.12 — Limites par valeurs supérieures, inférieures

$f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, x_0 un point ou une borne finie ou infinie de $\mathscr{D}$.

La fonction f tend vers ℓ par valeurs supérieures en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et si $f(x) \geqslant \ell$ sur un voisinage de x_0.
On note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell^+$ ou bien $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell^+$.

La fonction f tend vers ℓ par valeurs inférieures quand x tend vers x_0 si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et si $f(x) < \ell$ sur un voisinage de x_0.

On note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell^-$ ou bien $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell^-$.

Définition 2.13 — Limite à gauche en x_0

Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point ou une borne supérieure de $\mathscr{D}$.

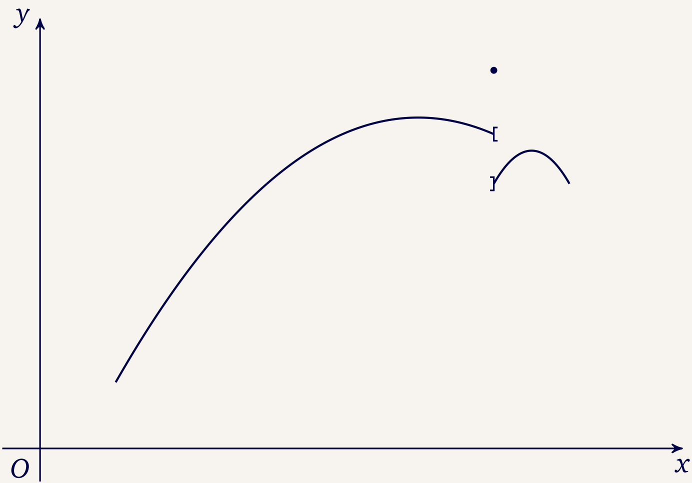
La fonction f admet une limite à gauche en x_0 si et seulement si la restriction de f à
$\mathscr{D} \cap \left]-\infty\ ; x_0\right[$ admet une limite en x_0.

Cette limite est notée $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \ell$ ou $f(x) \xrightarrow[\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}]{} \ell$.

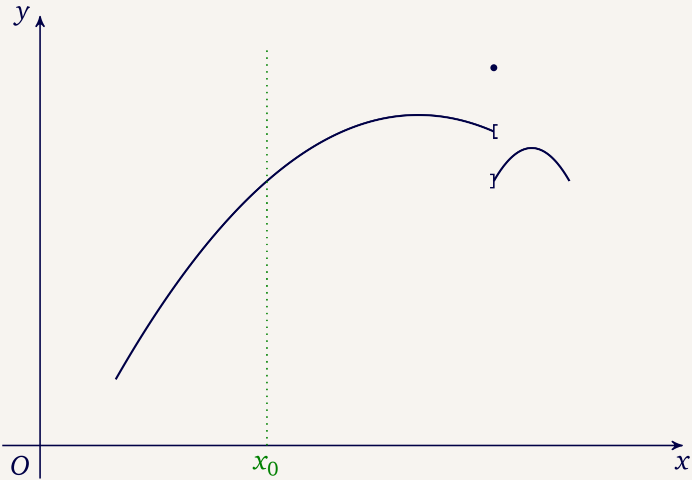
Définition 2.14 — Limite à droite en x_0

Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point ou une borne inférieure de $\mathscr{D}$.

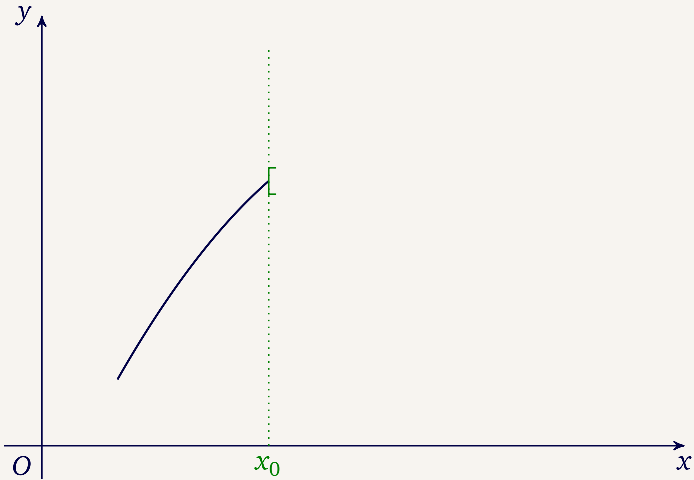
La fonction f admet une limite à droite en x_0 si et seulement si la restriction de f à $\mathscr{D} \cap \,]x_0\,;\,+\infty[$ admet une limite en x_0. Cette limite est notée $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \ell$ ou $f(x) \xrightarrow[\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}]{} \ell$.



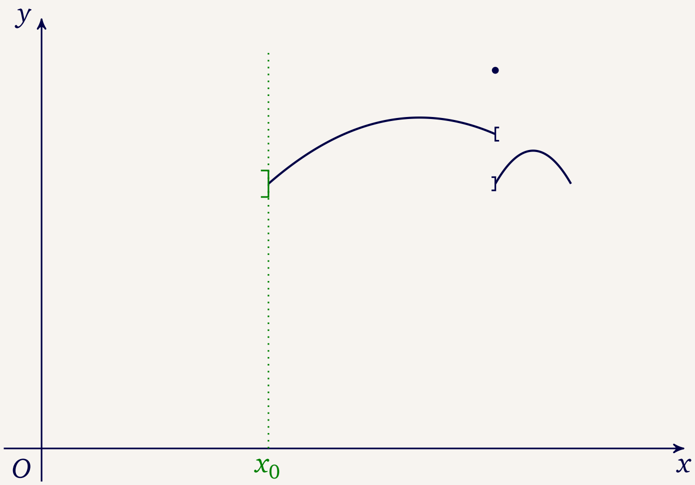
Limites à gauche et à droite



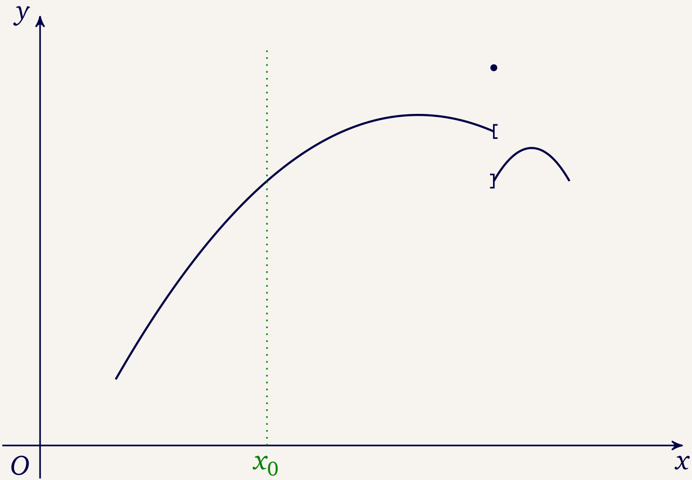
Limites à gauche et à droite



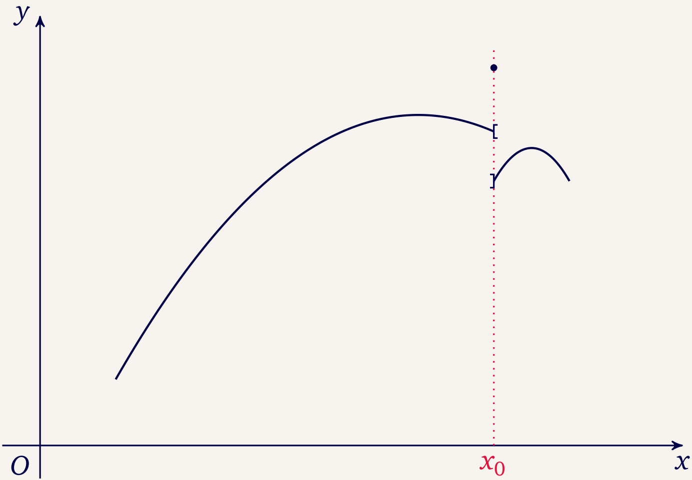
Limites à gauche et à droite



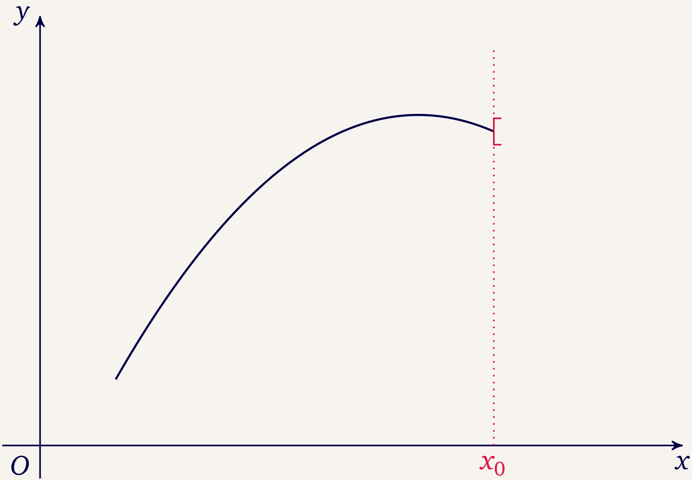
Limites à gauche et à droite



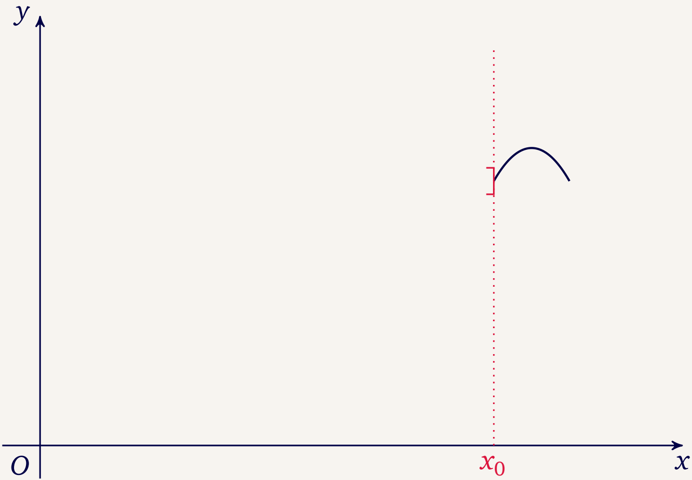
Limites à gauche et à droite



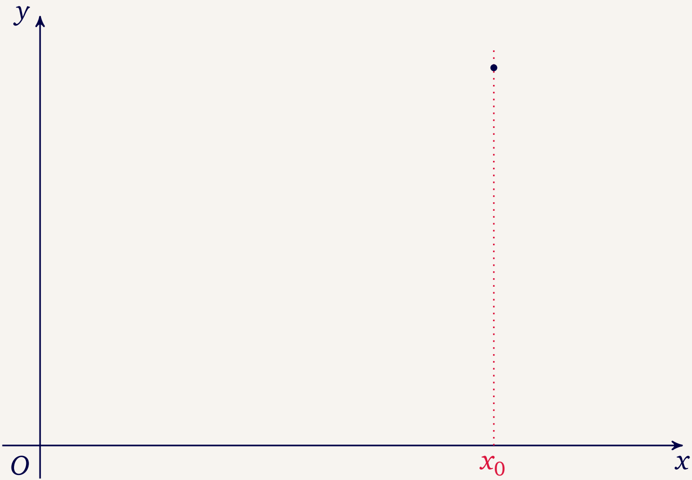
Limites à gauche et à droite



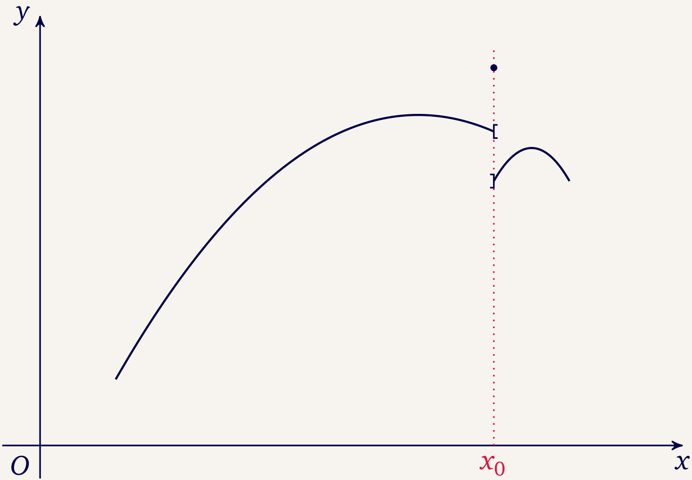
Limites à gauche et à droite



Limites à gauche et à droite



Limites à gauche et à droite



Limites à gauche et à droite

Définition 2.16 — Continuité à gauche, à droite

Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point de $\mathscr{D}$.

La fonction f est continue...

- ...à gauche en x_0 si elle admet une limite à gauche en x_0 et que $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f = f(x_0)$;
- ...à droite en x_0 si elle admet une limite à droite en x_0 et que $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f = f(x_0)$;

Proposition 2.17 — Lien entre limite, limites à gauche et à droite

Soit x_0 un point ou une borne de $\mathscr{D}$ et $f : \mathscr{D} \setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$.

La fonction f admet une limite en x_0 si et seulement si elle admet une limite à gauche et à droite en x_0 et que

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) \quad \text{auquel cas} \quad \lim_{x \to x_0} f(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$$

Proposition 2.18 — Lien entre continuité, limites à gauche et à droite

Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point à l'intérieur de $\mathscr{D}$.

La fonction f est continue en x_0 si et seulement si elle admet une limite à gauche et à droite en x_0 et que

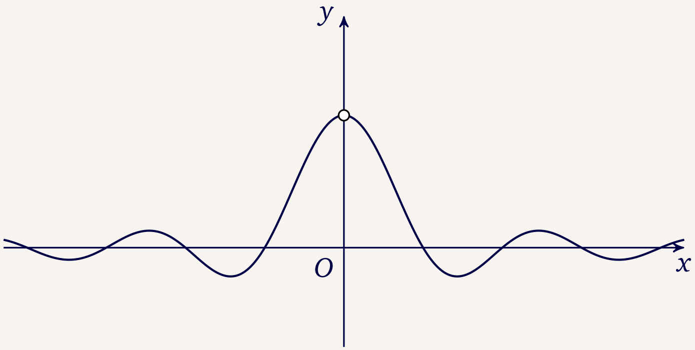
$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$$

Thm. & Déf. 2.19 — Prolongement par continuité

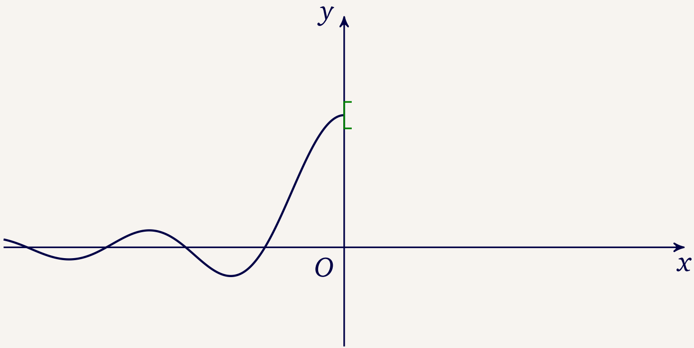
Soit x_0 un point de $\mathscr{D}$ et $f\ :\ \mathscr{D} \setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Si f admet une limite en x_0, alors il existe un unique prolongement $\tilde{f}$ de f à $\mathscr{D} \cup \{x_0\}$ tel que $\tilde{f}$ soit continue en x_0.

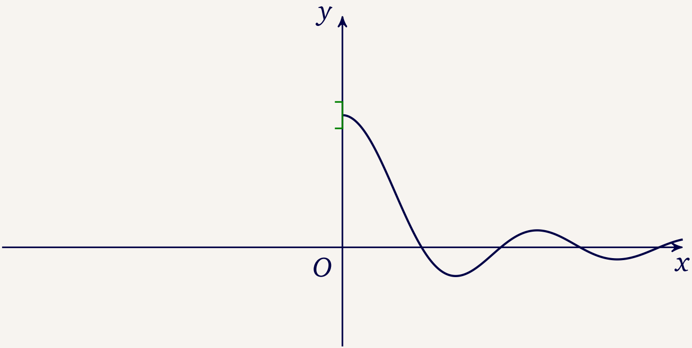
On parle du prolongement par continuité de f en x_0.



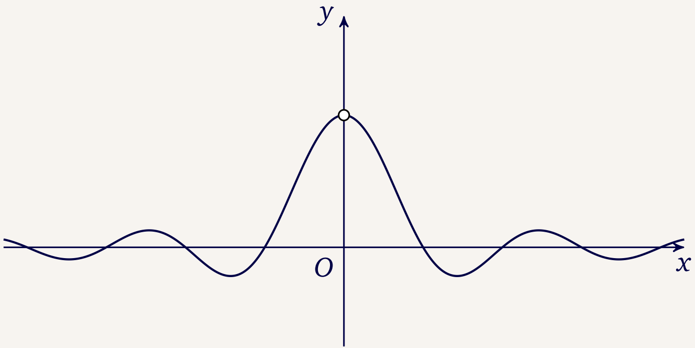
Prolongement par continuité



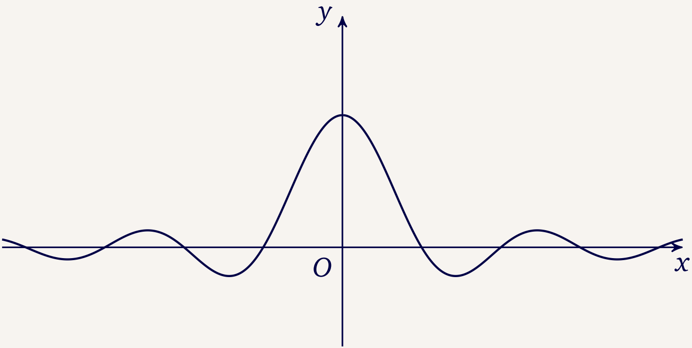
Prolongement par continuité



Prolongement par continuité



Prolongement par continuité



Prolongement par continuité

Opérations sur les limites

Théorème 3.1 — Opérations algébriques – Limites finies

Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, x_0 un point ou une borne éventuellement infinie de $\mathscr{D}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On suppose que $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell$ et que $g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell'$, avec ℓ et ℓ' deux réels.

$$f(x) + g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell + \ell' \qquad f(x) \times g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell \times \ell'$$

$$\lambda f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \lambda \ell \qquad \frac{1}{f(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} \frac{1}{\ell} \quad \text{si } \ell \neq 0$$

Corollaire 3.2 — Opérations algébriques et continuité ponctuelle

Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, x_0 un point de $\mathscr{D}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si f et g sont continues en x_0 alors λf, $f + g$ et $f \times g$ sont continues en x_0.

Si, de plus, $f(x_0) \neq 0$ alors $1/f$ est continue en x_0.

Théorème 3.3 — Composée

Soit $f : \mathscr{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathscr{D}_g \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions numériques et x_0 un point ou une borne éventuellement infinie de $\mathscr{D}_f$,

On suppose que f admet une limite (finie ou infinie) ℓ en x_0, ℓ est un point ou une borne éventuellement infinie de $\mathscr{D}_g$ et que g admet une limite ℓ' en ℓ.

Dans ce cas $g \circ f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell'$.

Corollaire 3.4 — Continuité d'une composée

Soit $f : \mathscr{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathscr{D}_g \longrightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point de $\mathscr{D}_f$.

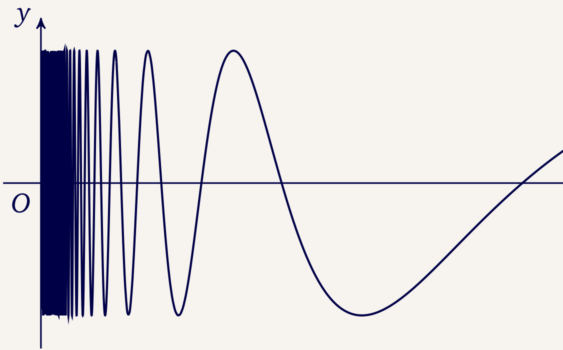
On suppose que f est continue en x_0, que $f(x_0) \in \mathscr{D}_g$ et que g est continue en $f(x_0)$. Alors $g \circ f$ est continue en x_0.

Limite et suite

Théorème 4.1 — Limite de fonction et de suite

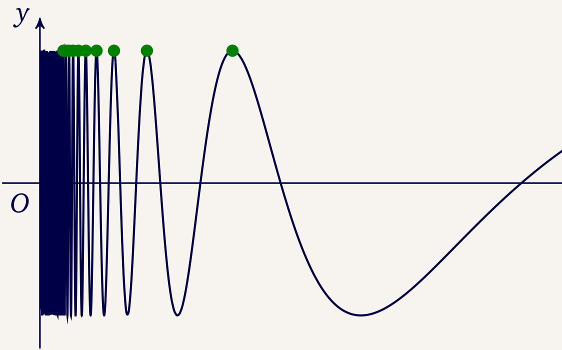
Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point de $\mathscr{D}$ ou une borne de $\mathscr{D}$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{D}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_0$.

Si f tend vers ℓ en x_0 alors $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.



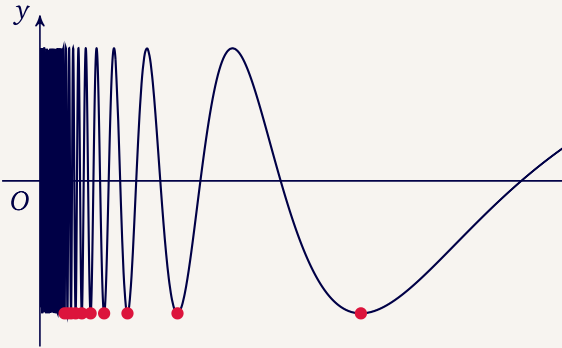
Une fonction sans limite en 0

$$u_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$$



Une fonction sans limite en 0

$$v_n = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$$

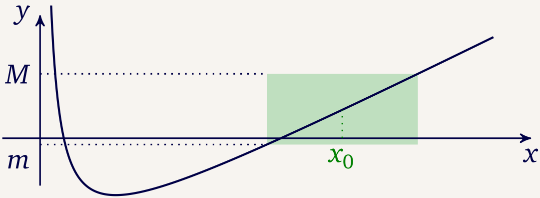


Une fonction sans limite en 0

Limites et ordre

Proposition 5.1

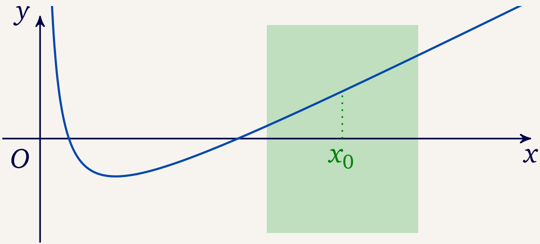
Si f admet une limite finie en x_0 alors f est bornée *sur un voisinage de* x_0.



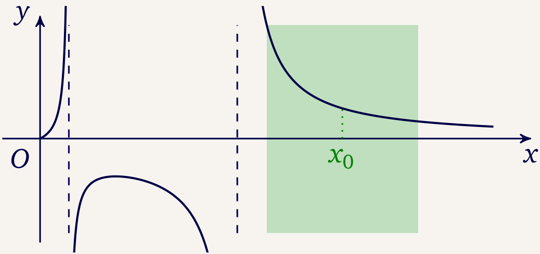
y
M
m
x_0
x

Proposition 5.3

Si f admet une limite strictement positive en x_0 alors f est strictement positive *sur un voisinage de* x_0.



$1/f$ est définie sur un voisinage de x_0



$1/f$ est définie sur un voisinage de x_0

Corollaire 5.5

Si f admet une limite strictement négative en x_0 alors f est négative *sur un voisinage de* x_0.

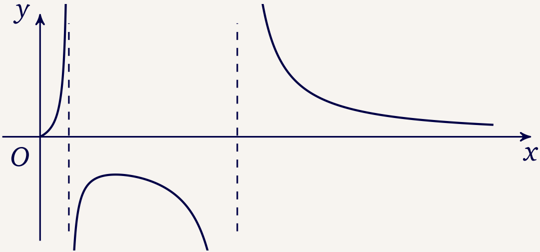
Corollaire 5.6

Si f admet une limite finie non nulle en x_0 alors f est non nulle *sur un voisinage de* x_0.

Proposition 5.7

Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point ou une borne finie ou infinie de $\mathscr{D}$. On suppose que f admet une limite en x_0.

$$\forall x \in \mathscr{D}, \qquad f(x) > a \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x_0} f \geqslant a$$


y
O
x

Corollaire 5.9

Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, soit x_0 un point ou une borne finie ou infinie de $\mathscr{D}$.

Si f et g admettent toutes deux une limite en x_0, et si

$$\forall x \in \mathscr{D}, \qquad f(x) < g(x)$$

alors

$$\lim_{x_0} f < \lim_{x_0} g$$

Théorème 5.10 — Théorème d'encadrement

Soit f, u et v trois fonctions définies sur $\mathscr{D}$ et x_0 un point ou une borne finie ou infinie de $\mathscr{D}$.

Si	$\forall x \in \mathscr{D} \setminus \{x_0\}, \qquad u(x) < f(x) < v(x)$
si	u et v admettent une limite en x_0
et si	$\lim\limits_{x_0} u = \lim\limits_{x_0} v$
alors	f admet une limite en x_0
et	$\lim\limits_{x_0} f = \lim\limits_{x_0} u = \lim\limits_{x_0} v$

Théorème 5.11 — Théorème de minoration/majoration

Soit x_0 un point de $\mathscr{D}$, ou une borne finie ou infinie de $\mathscr{D}$. Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathscr{D}$ telles que

$$\forall x \in \mathscr{D} \setminus \{x_0\}, \qquad f(x) < g(x)$$

$$\boxed{\begin{array}{llll} \text{Si} & \lim\limits_{x_0} f = +\infty & \text{alors} & \lim\limits_{x_0} g = +\infty. \\ \text{Si} & \lim\limits_{x_0} g = -\infty & \text{alors} & \lim\limits_{x_0} f = -\infty. \end{array}}$$

Théorème 5.12

Soit f est une fonction monotone sur un intervalle $]a\,;b[$, avec éventuellement a et b infinis.

Alors f admet une limite (finie ou infinie) en a et en b.

Corollaire 5.13

Si f est une fonction monotone sur un intervalle I alors f admet une limite finie à gauche et à droite en tout point de I.