

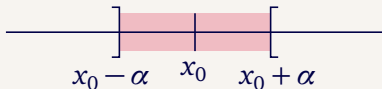
Limites d'une fonction — Continuité ponctuelle



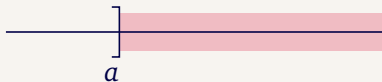
Parties de \mathbb{R} et ordre

Définition 1.1 — Voisinage

Un **voisinage de x_0** est un intervalle ouvert de la forme $]x_0 - \alpha ; x_0 + \alpha[$ avec $\alpha > 0$.



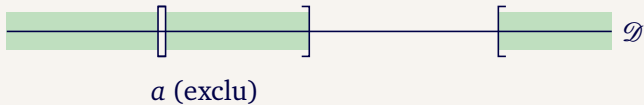
Un **voisinage de $+\infty$** est un intervalle ouvert de la forme $]a ; +\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$.



Limites d'une fonction en un point

Notations du chapitre

Dans tout ce chapitre, \mathcal{D} est un **domaine** de \mathbb{R} , c'est-à-dire un intervalle de \mathbb{R} non vide et non réduit à un point, ou bien une réunion finie de tels intervalles de \mathbb{R} .



Un exemple de domaine de définition

Définition 2.2 — Limite finie en un point

Soit f est une fonction de \mathcal{D} dans \mathbb{R} et x_0 un point ou une borne finie de \mathcal{D} .

La fonction f tend vers ℓ en x_0 si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0,$$

$$\forall x \in \mathcal{D} \cap]x_0 - \alpha ; x_0 + \alpha[, \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Proposition 2.3 — Unicité de la limite

Soit f est une fonction de \mathcal{D} dans \mathbb{R} et x_0 un point ou une borne finie de \mathcal{D} .

Si f tend vers ℓ en x_0 , alors il existe un seul réel ℓ vérifiant cette propriété.

Thm. & Déf. 2.4 — Continuité ponctuelle

Soit f est une fonction de \mathcal{D} dans \mathbb{R} et x_0 un point de \mathcal{D} .

Si f admet une limite en x_0 alors nécessairement cette limite est égale à $f(x_0)$. Dans ce cas, on dit que f est continue en x_0 .

Définition 2.5 — Limites infinies en un point fini

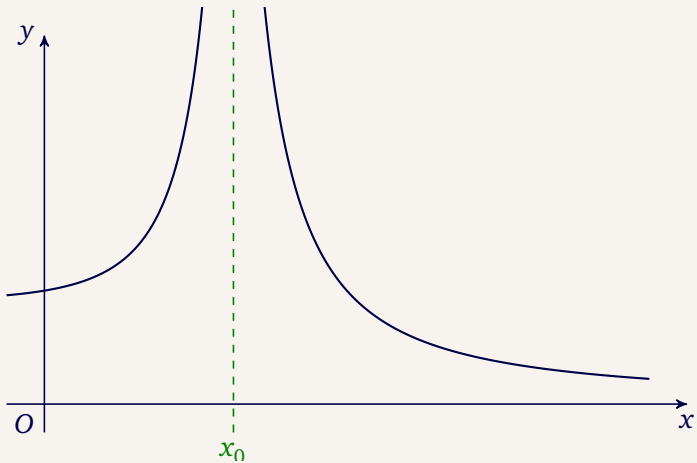
Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point ou une borne finie de \mathcal{D} .

La fonction f tend vers $+\infty$ en x_0 si et seulement si

$$\forall M > 0, \quad \exists \alpha > 0$$

$$\forall x \in \mathcal{D} \cap]x_0 - \alpha ; x_0 + \alpha[, \quad f(x) > M.$$

La fonction f tend vers $-\infty$ en x_0 si et seulement si $-f$ tend vers $+\infty$.



Asymptote verticale $x = x_0$.

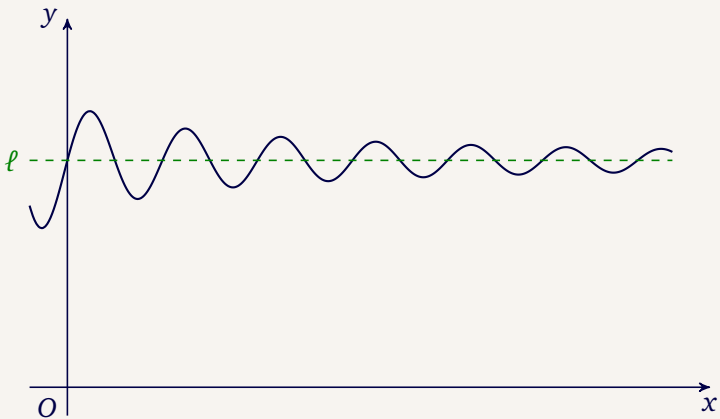
Définition 2.6 — Limite finie en $+\infty$

On suppose que \mathcal{D} contient un voisinage de $+\infty$. Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$.

La fonction f tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A > 0,$$

$$x \in \mathcal{D} \cap]A; +\infty[\implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$



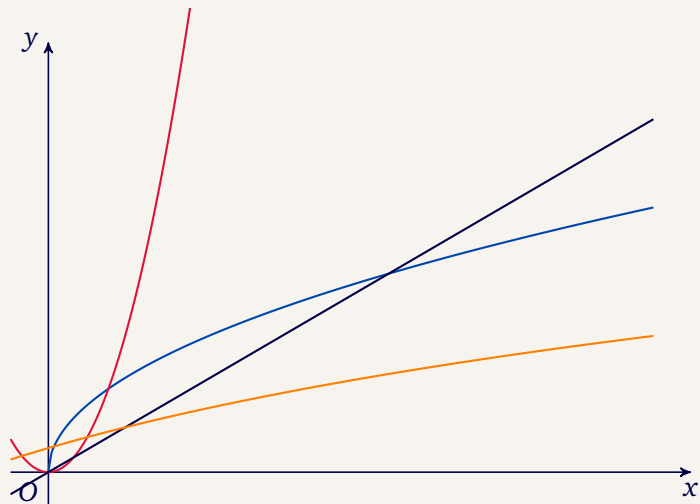
Asymptote horizontale $y = l$

Définition 2.7 — Limite infinie en $+\infty$

On suppose que \mathcal{D} contient un voisinage de $+\infty$. Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$.

La fonction f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ si et seulement si

$$\forall M > 0, \quad \exists A > 0 \quad x \in \mathcal{D} \cap]A; +\infty[\implies f(x) > M.$$



Différents comportements possibles en $+\infty$

Définition 2.8 — Limites par valeurs supérieures, inférieures

Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point ou une borne finie ou infinie de \mathcal{D} .

La fonction f tend vers ℓ par valeurs supérieures en x_0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ et si $f(x) \geq \ell$ sur un voisinage de x_0 .

On note $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell^+$ ou bien $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell^+$.

La fonction f tend vers ℓ par valeurs inférieures quand x tend vers x_0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ et si $f(x) \leq \ell$ sur un voisinage de x_0 .

On note $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell^-$ ou bien $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell^-$.

Définition 2.9 — Limite à gauche en x_0

Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point de \mathcal{D} ou une borne supérieure finie de \mathcal{D} .

La fonction f admet une limite à gauche en x_0 si et seulement si la restriction de f à $\mathcal{D} \cap]-\infty ; x_0[$ admet une limite en x_0 .

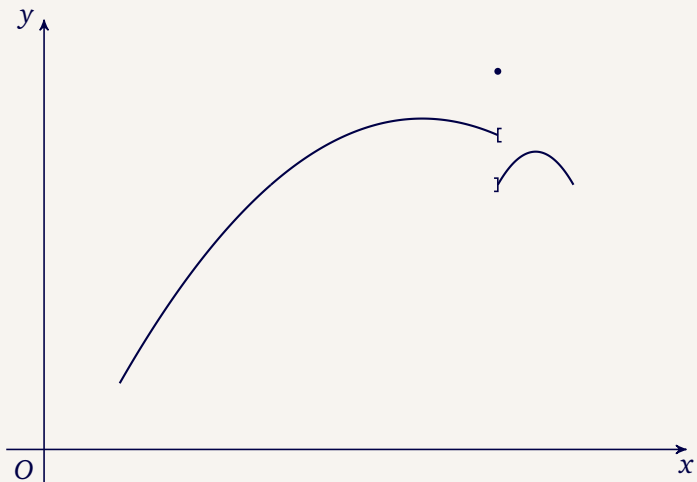
Cette limite est notée $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ ou $f(x) \xrightarrow[\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}]{} \ell$.

Définition 2.10 — Limite à droite en x_0

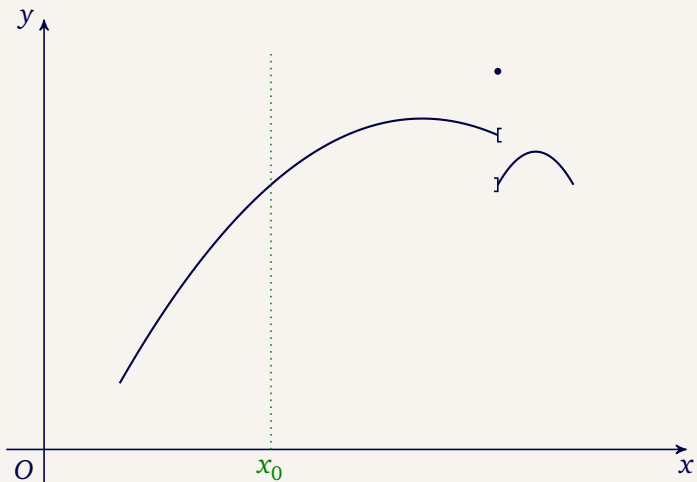
Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point de \mathcal{D} ou une borne inférieure finie de \mathcal{D} .

La fonction f admet une limite à droite en x_0 si et seulement si la restriction de f à $\mathcal{D} \cap]x_0 ; +\infty [$ admet une limite en x_0 .

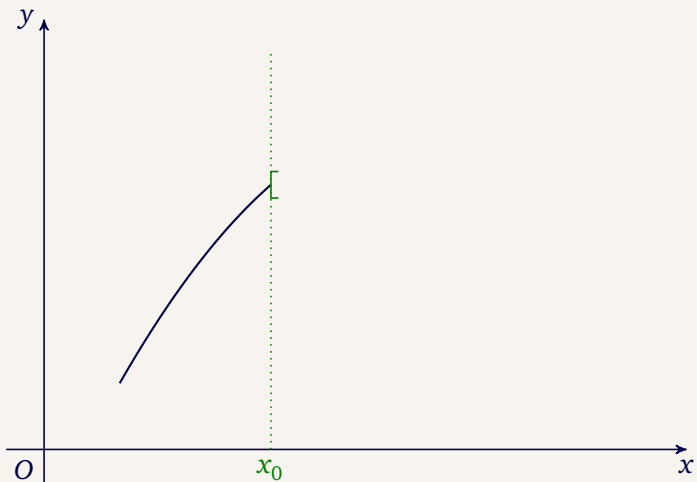
Cette limite est notée $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ ou $f(x) \xrightarrow[\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}]{} \ell$.



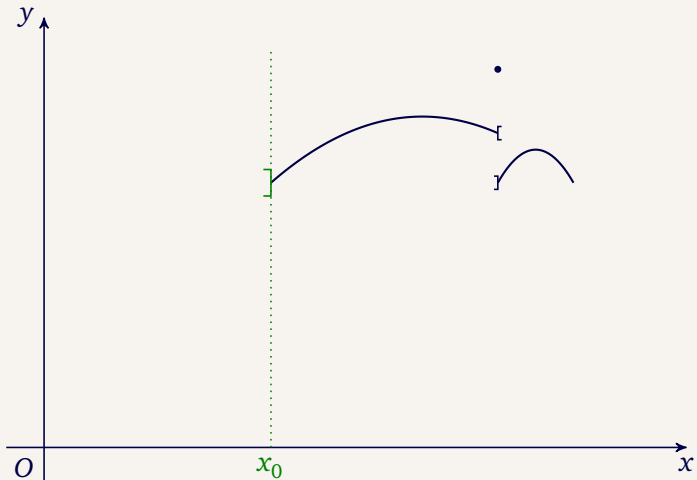
Limites à gauche et à droite



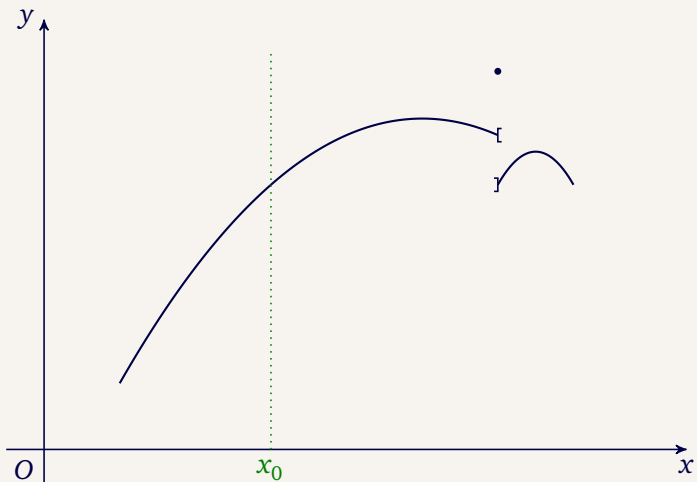
Limites à gauche et à droite



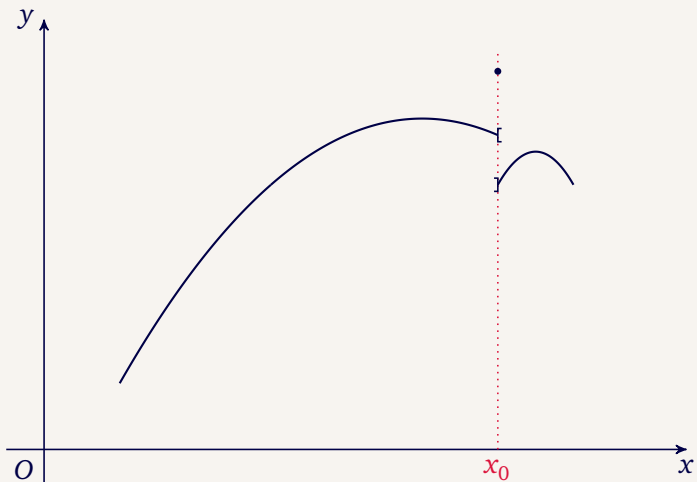
Limites à gauche et à droite



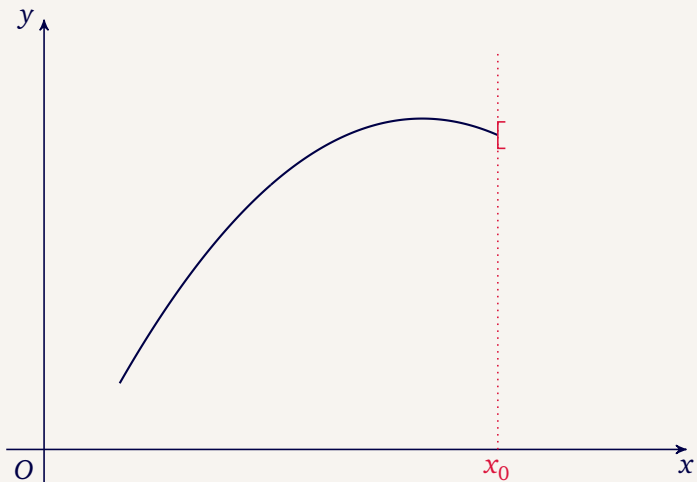
Limites à gauche et à droite



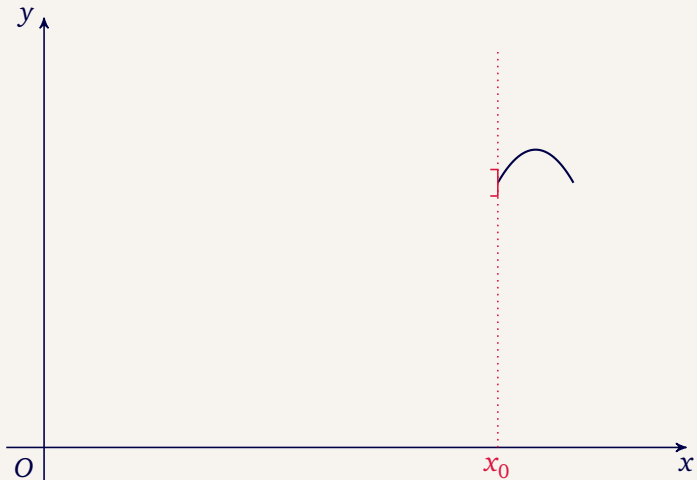
Limites à gauche et à droite



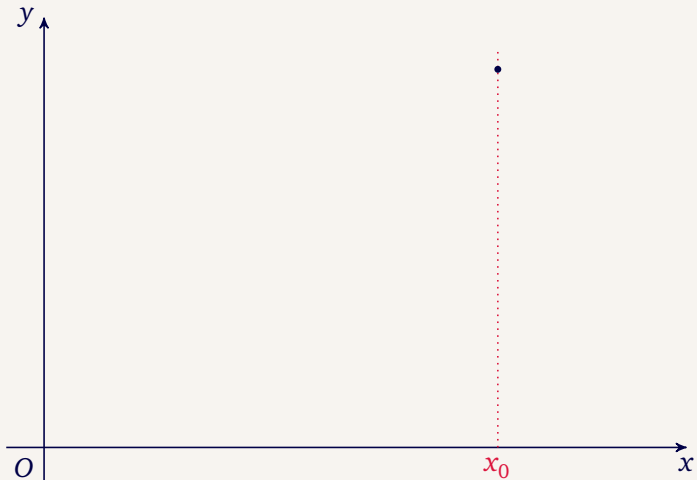
Limites à gauche et à droite



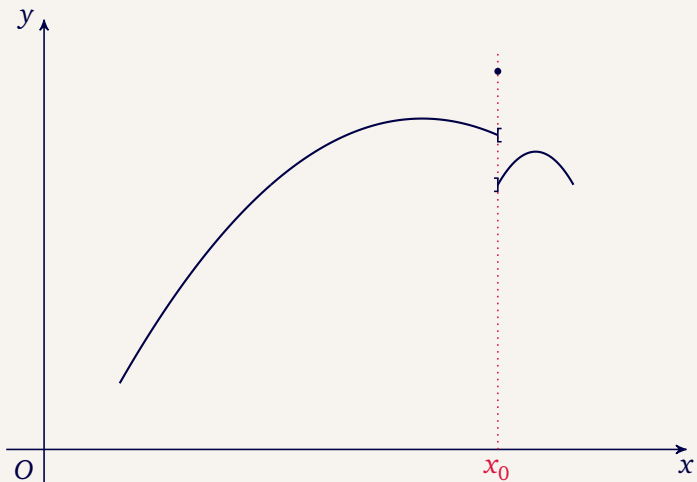
Limites à gauche et à droite



Limites à gauche et à droite



Limites à gauche et à droite



Limites à gauche et à droite

Définition 2.11 — Continuité à gauche, à droite

Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point de \mathcal{D} .

La fonction f est **continue à gauche en x_0** si elle admet une limite à gauche en x_0 et que $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f = f(x_0)$.

Elle est **continue à droite en x_0** si elle admet une limite à droite en x_0 et que $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f = f(x_0)$.

Proposition 2.12 — Lien entre limite, limites à gauche et à droite

Soit x_0 un point ou une borne de \mathcal{D} et $f : \mathcal{D} \setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$.

La fonction f admet une limite en x_0 si et seulement si elle admet une limite à gauche et à droite en x_0 et que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) \quad \text{auquel cas} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x)$$

Proposition 2.13 — Lien entre continuité, limites à gauche et à droite

Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point à l'intérieur de \mathcal{D} .

La fonction f est continue en x_0 si et seulement si elle admet une limite à gauche et à droite en x_0 et que

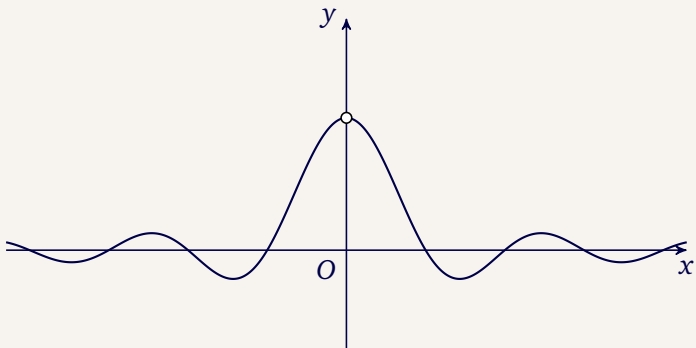
$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$$

Thm. & Déf. 2.14 — Prolongement par continuité

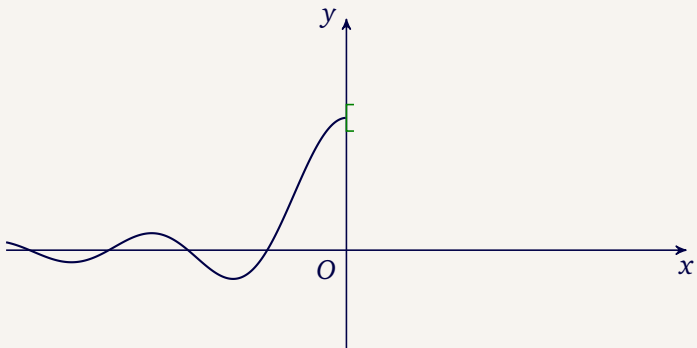
Soit x_0 un point de \mathcal{D} et $f : \mathcal{D} \setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Si f admet une limite en x_0 , alors il existe un unique prolongement \tilde{f} de f à $\mathcal{D} \cup \{x_0\}$ tel que \tilde{f} soit continue en x_0 .

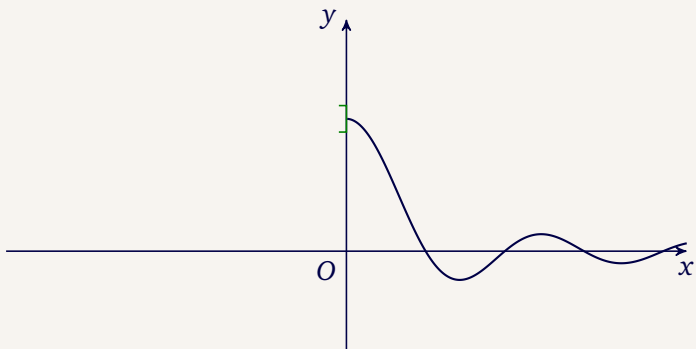
On parle du **prolongement par continuité** de f en x_0 .



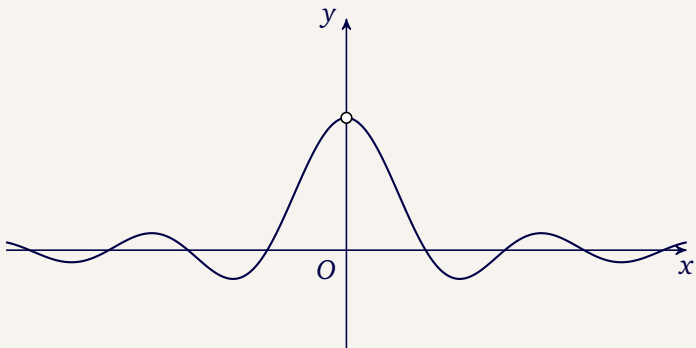
Prolongement par continuité



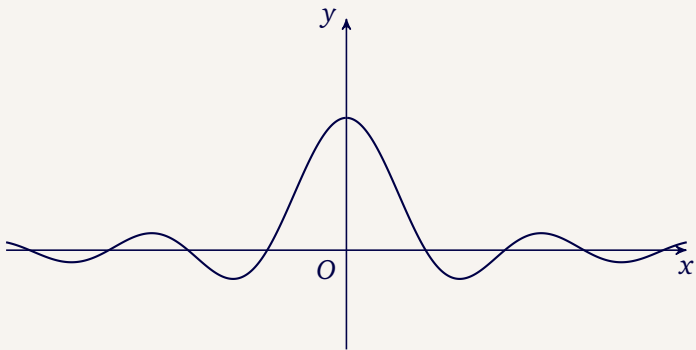
Prolongement par continuité



Prolongement par continuité



Prolongement par continuité



Prolongement par continuité

Opérations sur les limites

Théorème 3.1 — Opérations algébriques – Limites finies

Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, x_0 un point ou une borne éventuellement infinie de \mathcal{D} et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On suppose que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell$ et que $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell'$, avec ℓ et ℓ' deux réels.

$$f(x) + g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell + \ell'$$

$$f(x) \times g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell \times \ell'$$

$$\lambda f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \lambda \ell$$

$$\frac{1}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\ell} \quad \text{si } \ell \neq 0$$

Corollaire 3.2 — Opérations algébriques et continuité ponctuelle

Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, x_0 un point de \mathcal{D} et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si f et g sont continues en x_0 alors λf , $f + g$ et $f \times g$ sont continues en x_0 .

Si, de plus, $f(x_0) \neq 0$ alors $1/f$ est continue en x_0 .



Théorème 3.3 — Composée

Soit $f : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D}_g \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions numériques et x_0 un point ou une borne éventuellement infinie de \mathcal{D}_f ,

On suppose que f admet une limite (finie ou infinie) ℓ en x_0 , ℓ est un point ou une borne éventuellement infinie de \mathcal{D}_g et que g admet une limite ℓ' en ℓ .

Dans ce cas $g \circ f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell'$.

Corollaire 3.4 — Continuité d'une composée

Soit $f : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D}_g \longrightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point de \mathcal{D}_f .

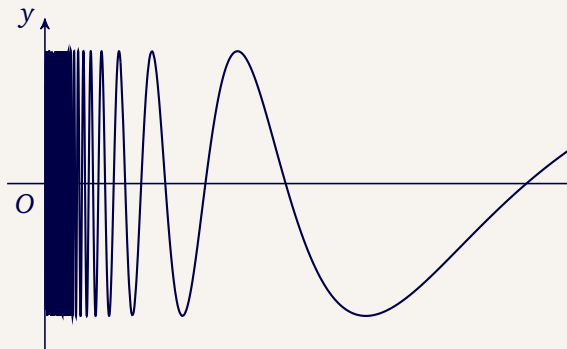
On suppose que f est continue en x_0 , que $f(x_0) \in \mathcal{D}_g$ et que g est continue en $f(x_0)$. Alors $g \circ f$ est continue en x_0 .

Limite et suite

Théorème 4.1 — Limite de fonction et de suite

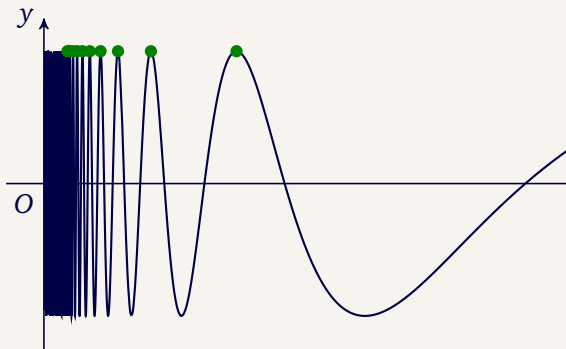
Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point de \mathcal{D} ou une borne de \mathcal{D} . Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x_0$.

Si f tend vers ℓ en x_0 alors $f(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$.



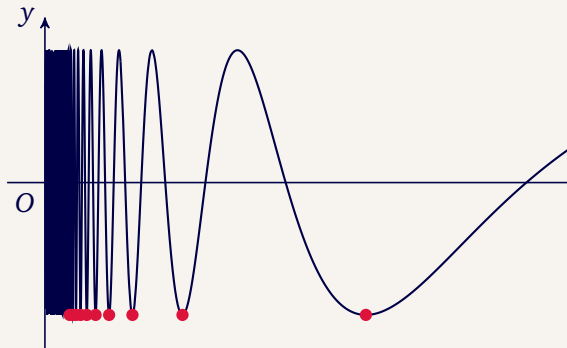
Une fonction sans limite en 0

$$u_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$$



Une fonction sans limite en 0

$$v_n = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$$

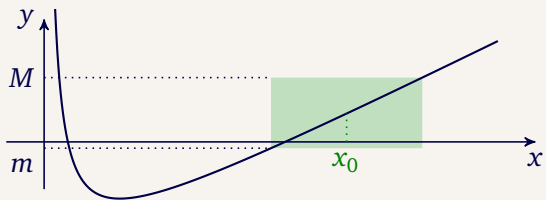


Une fonction sans limite en 0

Limites et ordre

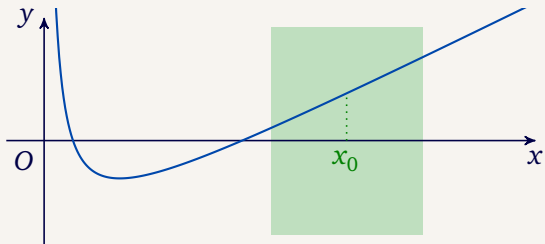
Proposition 5.1

Si f admet une limite finie en x_0 alors f est bornée *sur un voisinage de x_0* .

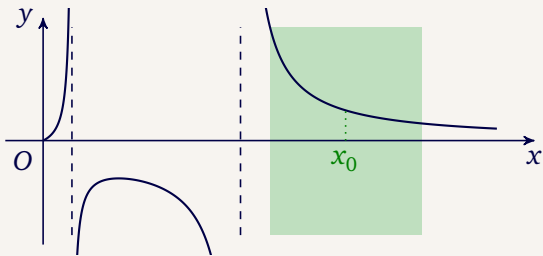


Proposition 5.2

Si f admet une limite strictement positive en x_0 alors f est strictement positive *sur un voisinage de x_0* .



$1/f$ est définie sur un voisinage de x_0



$1/f$ est définie sur un voisinage de x_0

Corollaire 5.3

Si f admet une limite strictement négative en x_0 alors f est négative sur un voisinage de x_0 .

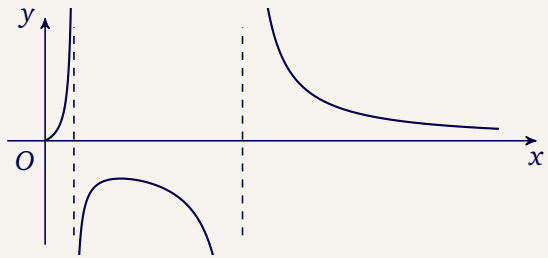
Corollaire 5.4

Si f admet une limite finie non nulle en x_0 alors f est non nulle sur un voisinage de x_0 .

Proposition 5.5

Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point ou une borne finie ou infinie de \mathcal{D} . On suppose que f admet une limite en x_0 .

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad f(x) > a \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x_0} f \geq a$$



Corollaire 5.6

Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, soit x_0 un point ou une borne finie ou infinie de \mathcal{D} .

Si f et g admettent toutes deux une limite en x_0 , et si

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad f(x) < g(x)$$

alors

$$\lim_{x_0} f < \lim_{x_0} g$$

Théorème 5.7 — Théorème d'encadrement

Soit f , u et v trois fonctions définies sur \mathcal{D} et x_0 un point ou une borne finie ou infinie de \mathcal{D} .

Si $\forall x \in \mathcal{D} \setminus \{x_0\}, \quad u(x) < f(x) < v(x)$

si u et v admettent une limite en x_0

et si $\lim_{x_0} u = \lim_{x_0} v$

alors f admet une limite en x_0

et $\lim_{x_0} f = \lim_{x_0} u = \lim_{x_0} v$

Théorème 5.8 — Théorème de minoration/majoration

Soit x_0 un point de \mathcal{D} , ou une borne finie ou infinie de \mathcal{D} . Soit f et g deux fonctions définies sur \mathcal{D} telles que

$$\forall x \in \mathcal{D} \setminus \{x_0\}, \quad f(x) < g(x)$$

Si $\lim_{x_0} f = +\infty$ alors $\lim_{x_0} g = +\infty$.
Si $\lim_{x_0} g = -\infty$ alors $\lim_{x_0} f = -\infty$.

Théorème 5.9

Soit f est une fonction monotone sur un intervalle $]a ; b[$, avec éventuellement a et b infinis.

Alors f admet une limite (finie ou infinie) en a et en b .

Corollaire 5.10

Si f est une fonction monotone sur un intervalle I alors f admet une limite finie à gauche et à droite en tout point de I .