Calcul intégral

février 2017

Dans tout ce chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Primitive d'une fonction

Soit $f \,:\, I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $F \,:\, I \longrightarrow \mathbb{R}$.

On dit que F est une primitive de f sur I si et seulement si F est dérivable sur I et si

$$\forall x \in I, \qquad F'(x) = f(x).$$

Structure de l'ensemble des primitives

Si une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ admet pour primitive F_0, alors l'ensemble des primitives de f est $\{F_0 + \lambda \ \text{ avec } \ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

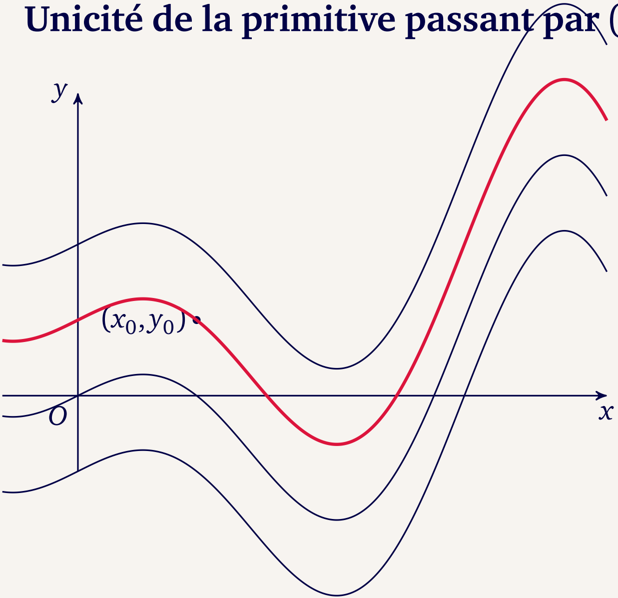
Unicité d'une primitive

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que f admet une primitive.

Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.

> Il existe une unique primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$.

Unicité de la primitive passant par (x_0, y_0).



Existence d'une primitive d'une fonction continue

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

$$\boxed{\text{Alors } f \text{ admet une primitive sur } I.}$$

Intégrale d'une fonction continue

Soit a et b deux points de I, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et F une primitive de f.

La quantité $F(b) - F(a)$ ne dépend pas de la primitive choisie.

On appelle intégrale de f entre a et b le réel $F(b) - F(a)$ noté

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{déf.}}{=} \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Théorème fondamental de l'Analyse

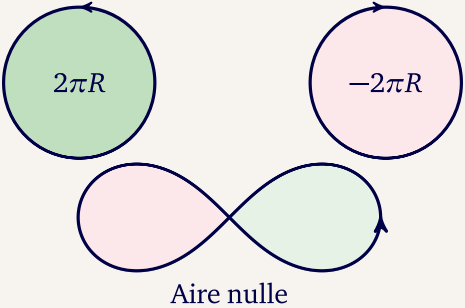
Soit f une fonction continue sur I et $a \in I$.

La fonction

$$F_a \quad : \left| \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \int_a^x f \end{array} \right.$$

est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Aire algébrique



Aire d'un domaine défini à partir d'une fonction.

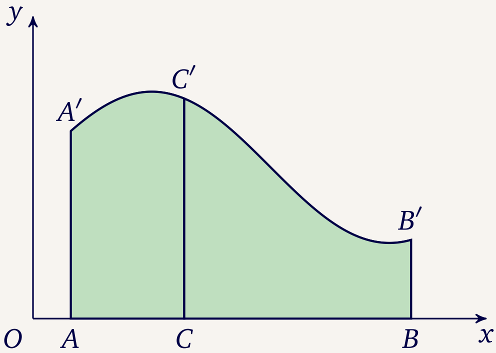
Relation de Chasles

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et a, b et c trois points de I.

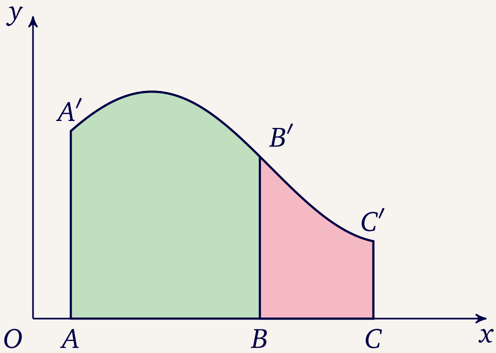
$$\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$$

Et $\quad \displaystyle\int_a^a f = 0 \quad$ et $\quad \displaystyle\int_a^b f = -\int_b^a f$

Cas $a < c < b$



Cas $a < b < c$



Linéarité de l'intégrale

Soit f et g deux fonctions continues définies sur I admettant pour primitives respectivement F et G :

- $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur I, et donc
$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$
- si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors λF est une primitive de λf sur I, et donc
$$\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$$

Positivité de l'intégrale

Soit $f \; : \; I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $(a, b) \in I$.

Si f est positive sur $[\, a \; ; b \,]$ et si $a \leqslant b$ alors $\displaystyle\int_a^b f \geqslant 0$. De plus si $\int_a^b f = 0$ alors f est nulle sur I.

« Croissance » de l'intégrale

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues.

$$\boxed{\text{Si} \quad f \leqslant g \text{ et si } a \leqslant b \quad \text{alors} \quad \int_a^b f \leqslant \int_a^b g}$$

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

$$\boxed{\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|}$$

Utilisation du formulaire

Soit u une fonction de classe C^1 sur I, qui ne s'annule pas sur cette intervalle. On a alors :

- u^{n+1} est une primitive de $-(n+1)u'u^n$ sur I (avec $n \neq -1$) ;
- $1/u$ est une primitive de $-u'/u^2$ sur I ;
- $\ln|u|$ est une primitive de u'/u sur I.

Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions de classe C^1 sur un segment $[a\,;b]$

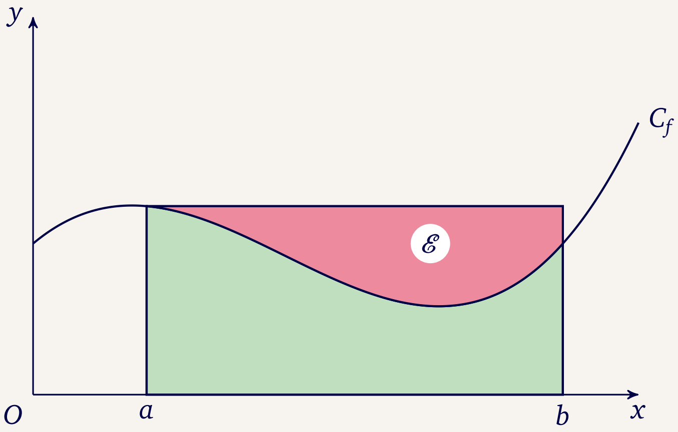
$$\boxed{\int_a^b uv' = \left[uv\right]_a^b - \int_a^b u'v}$$

Formule de Taylor–Lagrange à l'ordre 2

Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$, de classe C^2. Pour tout réels distincts a et b dans I, il existe un réel c strictement compris entre a et b tel que :

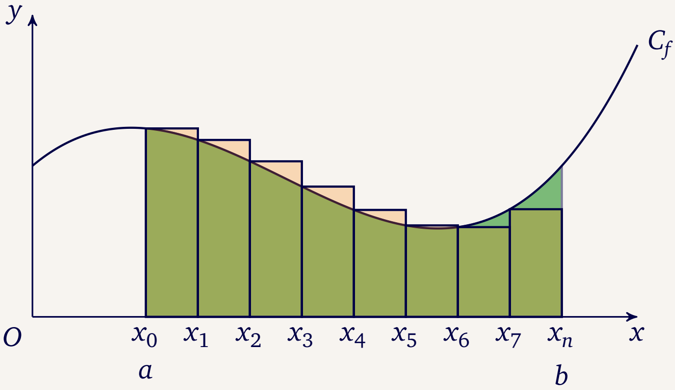
$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(c)}{2}(b-a)^2$$

Méthode des rectangles : un rectangle.



Méthode des rectangles à gauche :

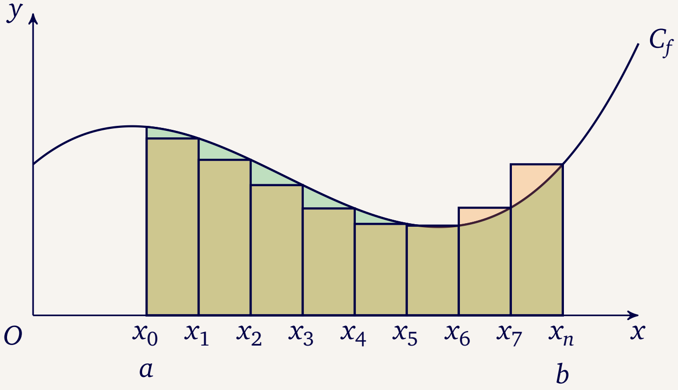
$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$



$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

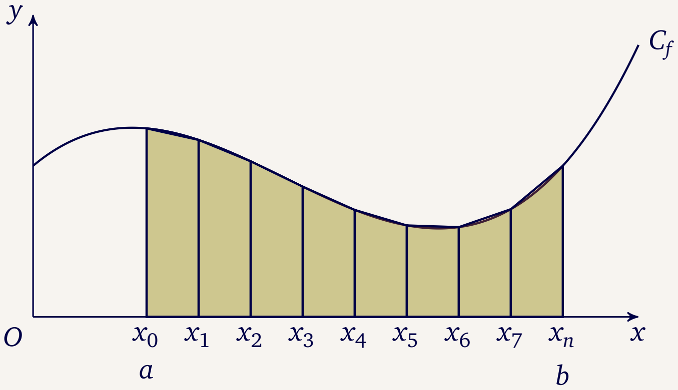
Méthode des rectangles à droite :

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$



Méthode des trapèzes

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)+f\left(\frac{k+1}{n}\right)\right]$$



Valeur moyenne d'une fonction

Soit $f : [\,a\,;b\,] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, avec $a < b$. Par définition la valeur moyenne de f est le réel

$$\text{valeur moyenne de } f \overset{\text{déf.}}{=} \frac{1}{b-a}\int_a^b f$$

Somme de Riemann à gauche

Soit $f : [0\,;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

Somme de Riemann à droite

Soit $f : [0\,;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$