

Calcul intégral



Notations du chapitre

Dans tout ce chapitre, I est un intervalle de \mathbb{R} non vide et non réduit à un point.

Primitive d'une fonction

Définition 1.1 — Primitive d'une fonction

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

On dit que F est une **primitive** de f sur I si et seulement si F est dérivable sur I et si

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x).$$

Théorème 1.2 — Structure de l'ensemble des primitives

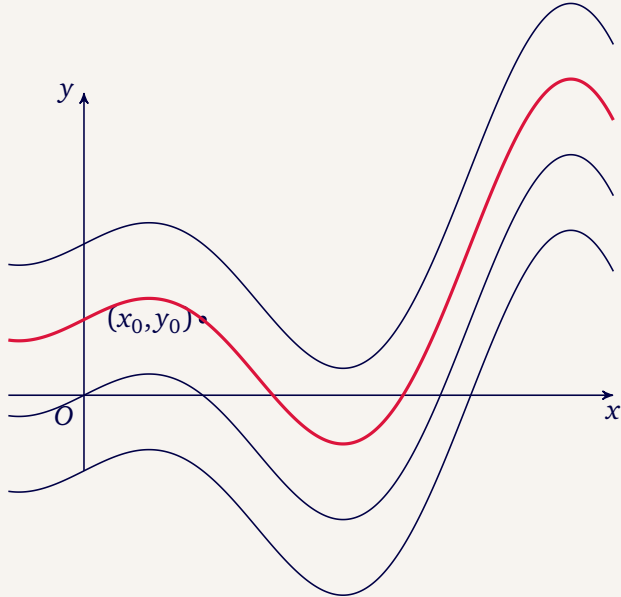
Si une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ admet pour primitive F_0 , alors l'ensemble des primitives de f est $\{F_0 + \lambda \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Théorème 1.3 — Unicité d'une primitive

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que f admet une primitive.

Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.

Il existe une unique primitive F de f telle que
 $F(x_0) = y_0$.



Unicité de la primitive passant par (x_0, y_0) .

Théorème 1.5 — Existence d'une primitive d'une fonction continue

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Alors f admet une primitive sur I .

Intégrale d'une fonction continue

Définition 2.1 — Intégrale d'une fonction continue

Soit a et b deux points de I , $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et F une primitive de f .

La quantité $F(b) - F(a)$ ne dépend pas de la primitive choisie.

On appelle **intégrale de f entre a et b** le réel $F(b) - F(a)$ noté

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x) \, dx \stackrel{\text{déf.}}{=} [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

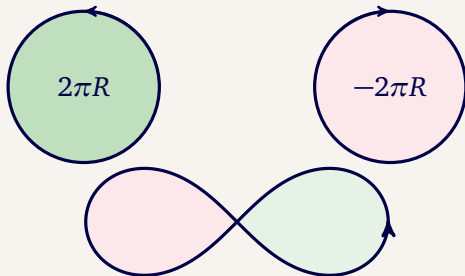
Théorème 2.2 — Théorème fondamental de l'Analyse

Soit f une fonction continue sur I et $a \in I$.

La fonction

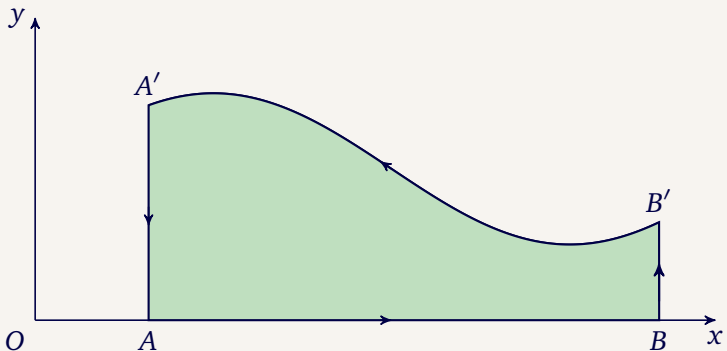
$$F_a : \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \int_a^x f \end{cases}$$

est l'unique primitive de f qui s'annule en a .



Aire nulle

Aire algébrique



Aire d'un domaine défini à partir d'une fonction.

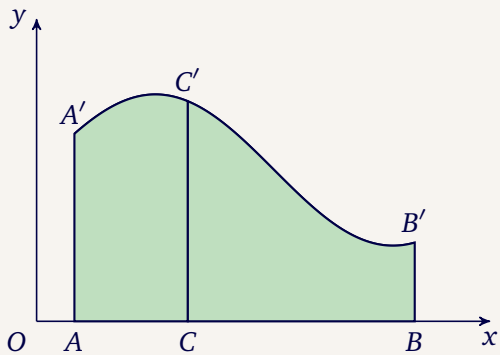
Propriétés de l'intégrale

Propriété 3.1 — Relation de Chasles

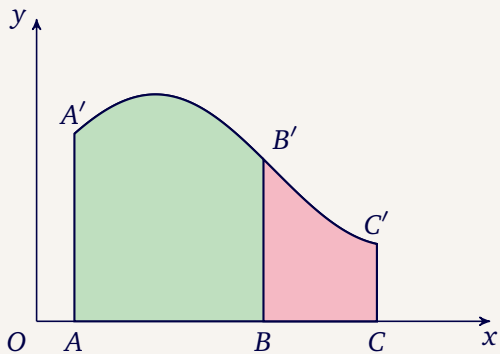
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et a, b et c trois points de I .

$$\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$$

Et $\int_a^a f = 0$ et $\int_a^b f = -\int_b^a f$



Cas $a < c < b$



Cas $a < b < c$

Propriété 3.4 — Linéarité de l'intégrale

Soit f et g deux fonctions continues définies sur I admettant pour primitives respectivement F et G :

- $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I , et donc

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

- si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors λF est une primitive de λf sur I , et donc

$$\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$$

Propriété 3.4 — Linéarité de l'intégrale

Soit f et g deux fonctions continues définies sur I admettant pour primitives respectivement F et G :

- $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I , et donc

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

- si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors λF est une primitive de λf sur I , et donc

$$\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$$

Propriété 3.5 — Positivité de l'intégrale

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $(a, b) \in I$.

Si f est positive sur $[a ; b]$ et si $a \leq b$ alors $\int_a^b f \geq 0$. De plus si $\int_a^b f = 0$ alors f est nulle sur I .

Corollaire 3.6 — « Croissance » de l'intégrale

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues.

$$\text{Si } f \leq g \text{ et si } a \leq b \text{ alors } \int_a^b f \leq \int_a^b g$$

Proposition 3.7

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

Méthodes de calcul d'intégrales

Propriété 4.1 — Utilisation du formulaire

Soit u une fonction de classe C^1 sur I , qui ne s'annule pas sur cette intervalle. On a alors :

- u^{n+1} est une primitive de $-(n+1)u'u^n$ sur I (avec $n \neq -1$);
- $1/u$ est une primitive de $-u'/u^2$ sur I ;
- $\ln |u|$ est une primitive de u'/u sur I .

Propriété 4.1 — Utilisation du formulaire

Soit u une fonction de classe C^1 sur I , qui ne s'annule pas sur cette intervalle. On a alors :

- u^{n+1} est une primitive de $-(n+1)u'u^n$ sur I (avec $n \neq -1$);
- $1/u$ est une primitive de $-u'/u^2$ sur I ;
- $\ln |u|$ est une primitive de u'/u sur I .

Propriété 4.1 — Utilisation du formulaire

Soit u une fonction de classe C^1 sur I , qui ne s'annule pas sur cette intervalle. On a alors :

- u^{n+1} est une primitive de $-(n+1)u'u^n$ sur I (avec $n \neq -1$);
- $1/u$ est une primitive de $-u'/u^2$ sur I ;
- $\ln|u|$ est une primitive de u'/u sur I .

Théorème 4.2 — Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions de classe C^1 sur un segment $[a ; b]$

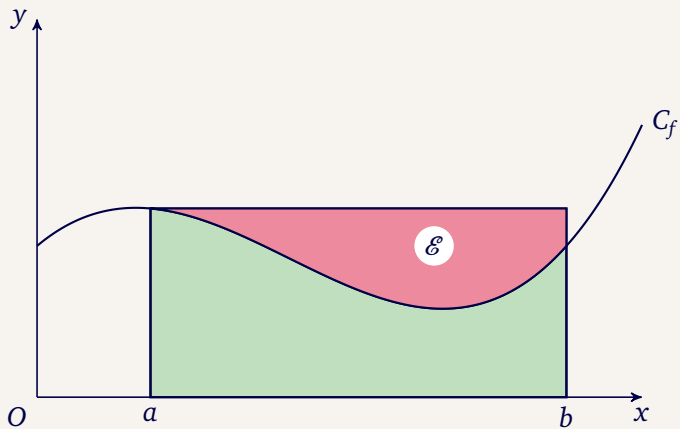
$$\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$$

Calcul approché d'intégrale

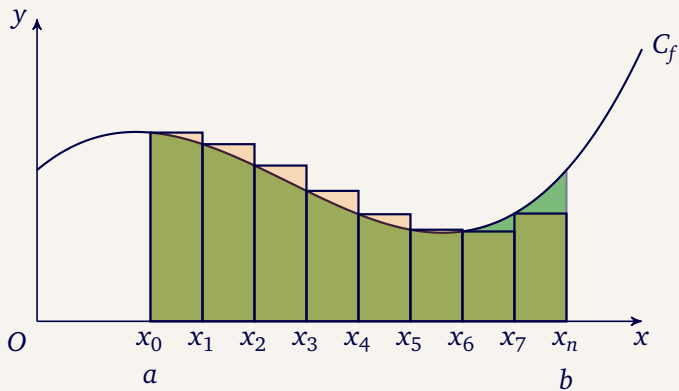
Théorème 5.1 — Formule de Taylor–Lagrange à l'ordre 2

Soit f une fonction de I dans \mathbb{R} , de classe C^2 . Pour tout réels distincts a et b dans I , il existe un réel c strictement compris entre a et b tel que :

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + \frac{f''(c)}{2}(b - a)^2$$



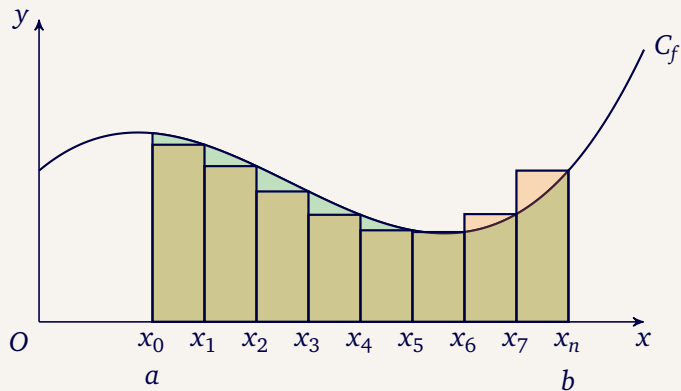
Méthode des rectangles : un rectangle.



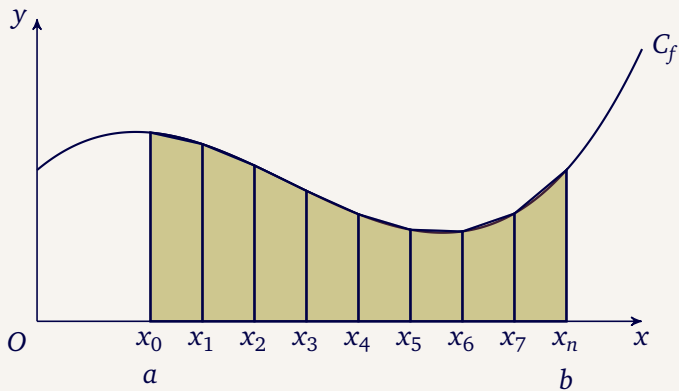
Méthode des rectangles à gauche :
$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Proposition 5.4

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_a^b f(t) dt$$



Méthode des rectangles à droite :
$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$



$$\text{Méthode des trapèzes } S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) + f\left(\frac{k+1}{n}\right) \right]$$

Définition 5.7 — Valeur moyenne d'une fonction

Soit $f : [a ; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, avec $a < b$. Par définition la valeur moyenne de f est le réel

$$\text{valeur moyenne de } f \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{1}{b-a} \int_a^b f$$

Théorème 5.8 — Somme de Riemann à gauche

Soit $f : [0 ; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt$$

Théorème 5.9 — Somme de Riemann à droite

Soit $f : [0 ; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt$$