

# Calcul intégral



## Notations du chapitre

Dans tout ce chapitre,  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  non vide et non réduit à un point.

Primitive d'une fonction

## Définition 1.1 — Primitive d'une fonction

Soit  $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$  et  $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ .

On dit que  $F$  est une **primitive** de  $f$  sur  $I$  si et seulement si  $F$  est dérivable sur  $I$  et si

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x).$$

## **Théorème 1.2 — Structure de l'ensemble des primitives**

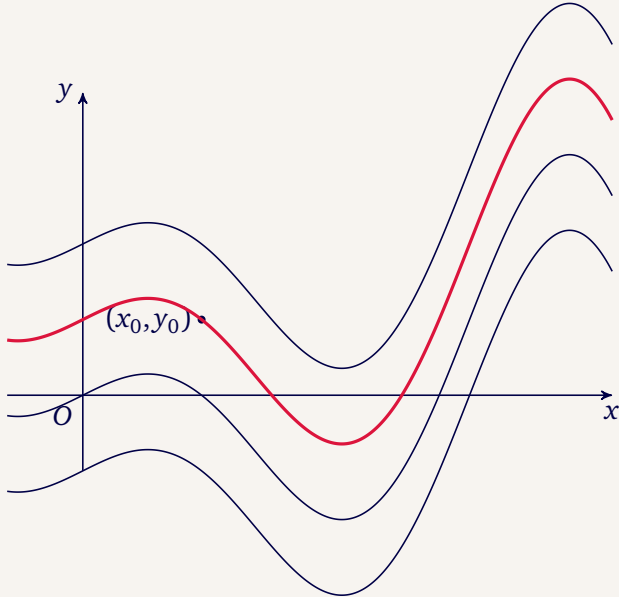
Si une fonction  $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$  admet pour primitive  $F_0$ , alors l'ensemble des primitives de  $f$  est  $\{F_0 + \lambda \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}\}$ .

### Théorème 1.3 — Unicité d'une primitive

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que  $f$  admet une primitive.

Soit  $x_0 \in I$  et  $y_0 \in \mathbb{R}$ .

Il existe une unique primitive  $F$  de  $f$  telle que  
 $F(x_0) = y_0$ .



*Unicité de la primitive passant par  $(x_0, y_0)$ .*

## **Théorème 1.4 — Existence d'une primitive d'une fonction continue**

Soit  $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.

Alors  $f$  admet une primitive sur  $I$ .



# Intégrale d'une fonction continue

## Définition 2.1 — Intégrale d'une fonction continue

Soit  $a$  et  $b$  deux points de  $I$ ,  $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et  $F$  une primitive de  $f$ .

La quantité  $F(b) - F(a)$  ne dépend pas de la primitive choisie.

On appelle **intégrale de  $f$  entre  $a$  et  $b$**  le réel  $F(b) - F(a)$  noté

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x) \, dx \stackrel{\text{déf.}}{=} [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

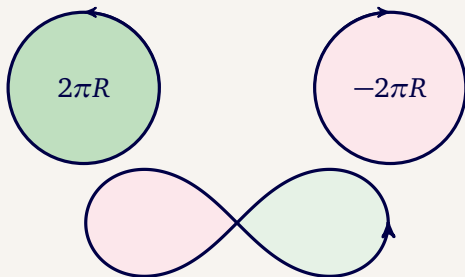
## Théorème 2.2 — Théorème fondamental de l'Analyse

Soit  $f$  une fonction continue sur  $I$  et  $a \in I$ .

La fonction

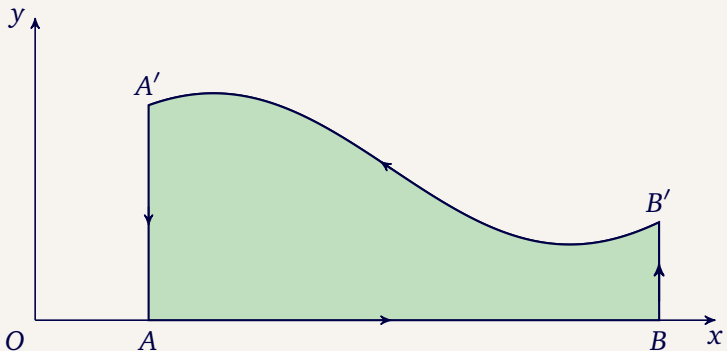
$$F_a : \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \int_a^x f \end{cases}$$

est l'unique primitive de  $f$  qui s'annule en  $a$ .



Aire nulle

*Aire algébrique*



*Aire d'un domaine défini à partir d'une fonction.*

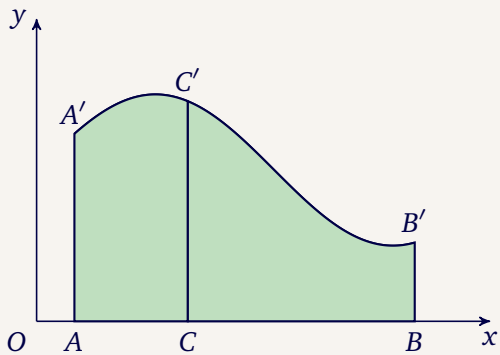
# Propriétés de l'intégrale

### Propriété 3.1 — Relation de Chasles

Soit  $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et  $a, b$  et  $c$  trois points de  $I$ .

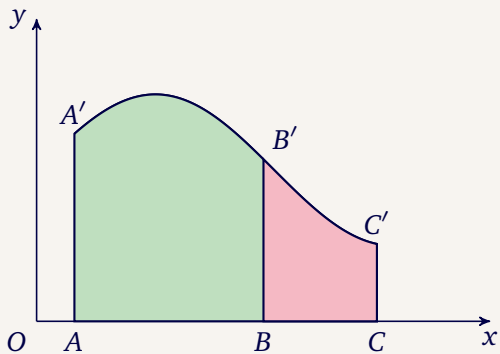
$$\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$$

Et  $\int_a^a f = 0$     et     $\int_a^b f = -\int_b^a f$



*Cas  $a < c < b$*





*Cas  $a < b < c$*

### Propriété 3.2 — Linéarité de l'intégrale

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions continues définies sur  $I$  admettant pour primitives respectivement  $F$  et  $G$  :

- $F + G$  est une primitive de  $f + g$  sur  $I$ , et donc

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

### Propriété 3.2 — Linéarité de l'intégrale

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions continues définies sur  $I$  admettant pour primitives respectivement  $F$  et  $G$  :

- $F + G$  est une primitive de  $f + g$  sur  $I$ , et donc

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

- si  $\lambda \in \mathbb{R}$  alors  $\lambda F$  est une primitive de  $\lambda f$  sur  $I$ , et donc

$$\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$$

### Propriété 3.3 — Positivité de l'intégrale

Soit  $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et  $(a, b) \in I$ .

Si  $f$  est positive sur  $[a ; b]$  et si  $a \leq b$  alors  $\int_a^b f \geq 0$ . De plus si  $\int_a^b f = 0$  alors  $f$  est nulle sur  $I$ .

### Corollaire 3.4 — « Croissance » de l'intégrale

Soit  $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$  et  $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues.

$$\text{Si } f \leq g \text{ et si } a \leq b \text{ alors } \int_a^b f \leq \int_a^b g$$

## Proposition 3.5

Soit  $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

# Méthodes de calcul d'intégrales

## Propriété 4.1 — Utilisation du formulaire

Soit  $u$  une fonction de classe  $C^1$  sur  $I$ , qui ne s'annule pas sur cette intervalle. On a alors :

- $u^{n+1}$  est une primitive de  $-(n+1)u'u^n$  sur  $I$  (avec  $n \neq -1$ );



## Propriété 4.1 — Utilisation du formulaire

Soit  $u$  une fonction de classe  $C^1$  sur  $I$ , qui ne s'annule pas sur cette intervalle. On a alors :

- $u^{n+1}$  est une primitive de  $-(n+1)u'u^n$  sur  $I$  (avec  $n \neq -1$ );
- $1/u$  est une primitive de  $-u'/u^2$  sur  $I$ ;

## Propriété 4.1 — Utilisation du formulaire

Soit  $u$  une fonction de classe  $C^1$  sur  $I$ , qui ne s'annule pas sur cette intervalle. On a alors :

- $u^{n+1}$  est une primitive de  $-(n+1)u'u^n$  sur  $I$  (avec  $n \neq -1$ );
- $1/u$  est une primitive de  $-u'/u^2$  sur  $I$ ;
- $\ln|u|$  est une primitive de  $u'/u$  sur  $I$ .

## Théorème 4.2 — Intégration par parties

Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions de classe  $C^1$  sur un segment  $[a ; b]$

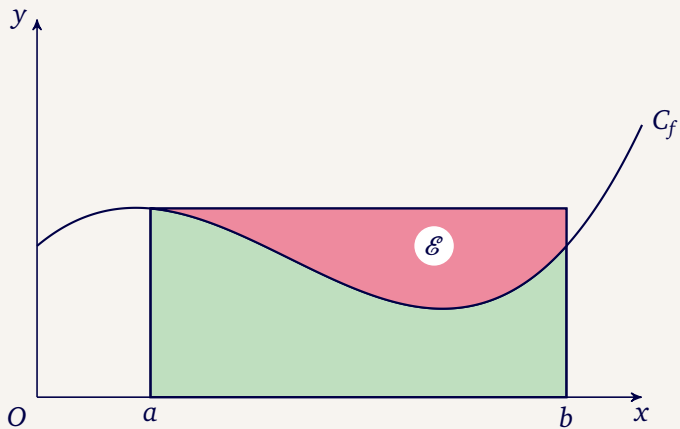
$$\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$$

# Calcul approché d'intégrale

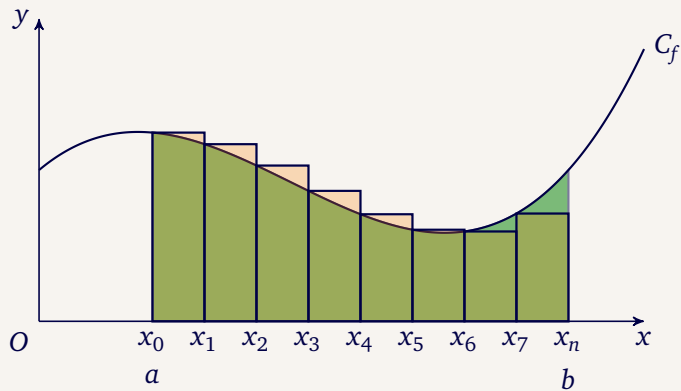
## **Théorème 5.1 — Formule de Taylor–Lagrange à l'ordre 2**

Soit  $f$  une fonction de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ , de classe  $C^2$ . Pour tout réels distincts  $a$  et  $b$  dans  $I$ , il existe un réel  $c$  strictement compris entre  $a$  et  $b$  tel que :

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + \frac{f''(c)}{2}(b - a)^2$$



*Méthode des rectangles : un rectangle.*

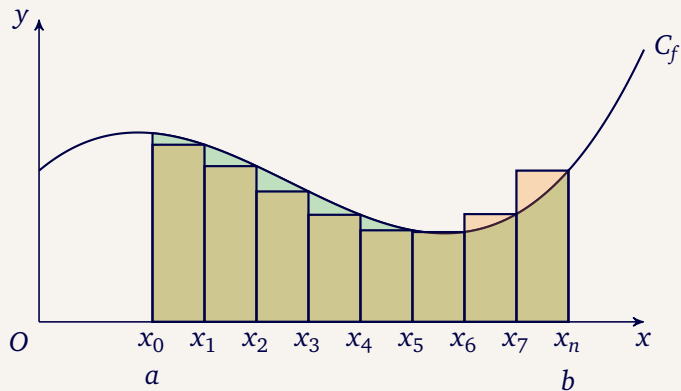


Méthode des rectangles à gauche : 
$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

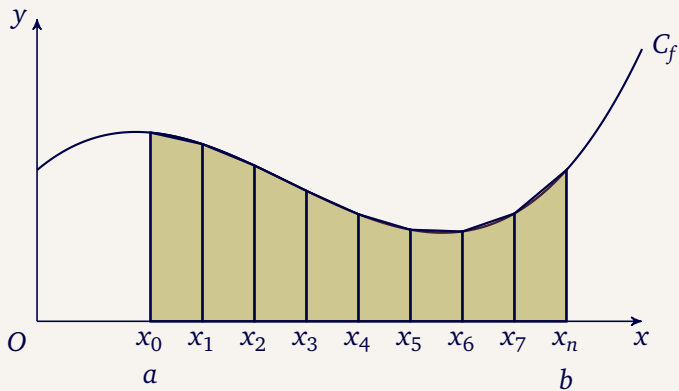
## Proposition 5.2

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_a^b f(t) dt$$





Méthode des rectangles à droite : 
$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$



Méthode des trapèzes  $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} \left[ f\left(\frac{k}{n}\right) + f\left(\frac{k+1}{n}\right) \right]$

### Définition 5.3 — Valeur moyenne d'une fonction

Soit  $f : [a ; b] \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, avec  $a < b$ . Par définition la valeur moyenne de  $f$  est le réel

$$\text{valeur moyenne de } f \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{1}{b-a} \int_a^b f$$

## Théorème 5.4 — Somme de Riemann à gauche

Soit  $f : [0 ; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt$$

## Théorème 5.5 — Somme de Riemann à droite

Soit  $f : [0 ; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt$$