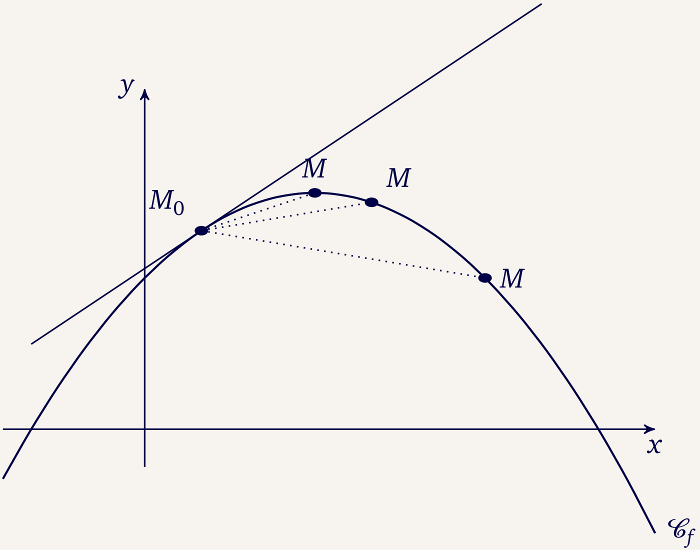
Fonctions dérivables

Notations du chapitre

Dans tout ce chapitre I est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et *non réduit à un point*, x_0 est un point de I et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé donné.

Nombre dérivé en un point



Corde, tangente et dérivabilité

Définition 1.1 — Nombre dérivé d'une fonction en un point

La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si le taux d'accroissement

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

admet une limite finie en x_0.

Dans ce cas, cette limite se note $f'(x_0)$ et s'appelle le nombre dérivé de f en x_0.

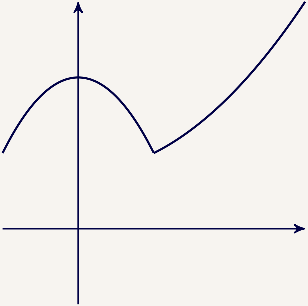
$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

(sous réserve d'existence)

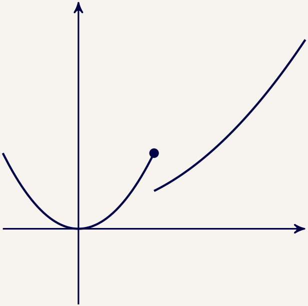
Théorème 1.2 — Tangente en un point de $\mathscr{C}_f$

La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si $\mathscr{C}_f$ admet une tangente *non verticale* au point $(x_0, f(x_0))$.

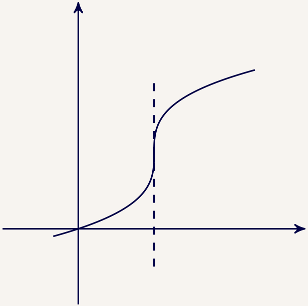
Par ailleurs $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow[x \to x_0]{} \infty$ si et seulement si $\mathscr{C}_f$ admet une tangente verticale en x_0.



La fonction présente un brusque changement de direction, un « rebond ». Le taux d’accroissement à une limite différente à gauche et à droite.



La fonction présente une déchirure. Le taux d'accroissement a une limite infinie à droite (mais finie à gauche).



La tangente est verticale en un point. Le taux d'accroissement admet des limites infinies à gauche et à droite.

Théorème 1.3 — Dérivable implique continue

Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.

Corollaire 1.4

Si une fonction f est dérivable sur un domaine $\mathscr{D}$ alors elle est continue sur $\mathscr{D}$.

Fonction dérivée

Définition 2.1 — Dérivabilité sur un intervalle – Fonction dérivée

Si f est dérivable en tout point de I on dit que f est dérivable sur I.

La fonction f' définie par $f' : \left| \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f'(x) \end{array} \right.$ est la fonction dérivée de f.

Définition 2.2 — Fonction de classe C^n sur I

Une fonction f est de classe C^n sur I si et seulement si f est dérivable n fois sur I et que la dérivée n–ième de f est continue sur I. L'ensemble des fonctions de classe C^n sur I se note $C^n(I)$.

La fonction f est de classe C^∞ sur I si et seulement si f est dérivable n fois, pour tout entier naturel n. L'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur I se note $C^\infty(I)$.

Propriété 2.3 — Opérations algébriques (I)

Soit f et g deux fonctions dérivables sur I, et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. La fonction λf est dérivable sur I, de fonction dérivée $\lambda f'$;
2. la fonction $f + g$ est dérivable sur I, de fonction dérivée $f' + g'$;
3. la fonction $f \times g$ est dérivable sur I, de fonction dérivée $f \times g' + f' \times g$.

Propriété 2.4 — Opérations algébriques (II)

Soit f et g deux fonctions n fois dérivable sur I, et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. La fonction λf est n fois dérivable sur I et $(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$;
2. la fonction $f + g$ est n fois dérivable sur I et $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$;
3. la fonction $f \times g$ est n fois dérivable.

De même si f et g sont de classe C^∞ alors $f+g$, λf et $f \times g$ sont de classe C^∞.

Propriété 2.5 — Dérivée de la composée

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) \in J$. Si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et

$$\boxed{(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \times g'(f(x_0))}$$

Propriété 2.6 — Dérivée d'un quotient

Soient f et g deux fonctions dérivables sur I.

Si la fonction f/g est définie sur I, alors f/g est dérivable sur I, de fonction dérivée

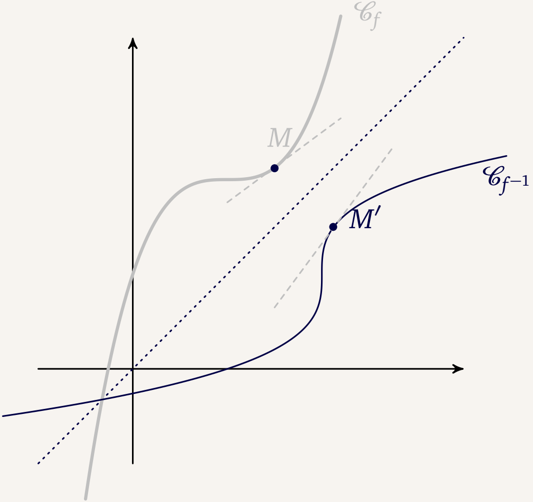
$$\boxed{\frac{f'g-g'f}{g^2}.}$$

Théorème 2.7 — Dérivée de la bijection réciproque

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, dérivable et strictement monotone (dans ce cas f est bijective). Soit $y_0 = f(x_0) \in f\langle I \rangle$.

Si $f'(x_0) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en y_0 et

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}}$$


$\mathscr{C}_f$
M
$\mathscr{C}_{f^{-1}}$
M'

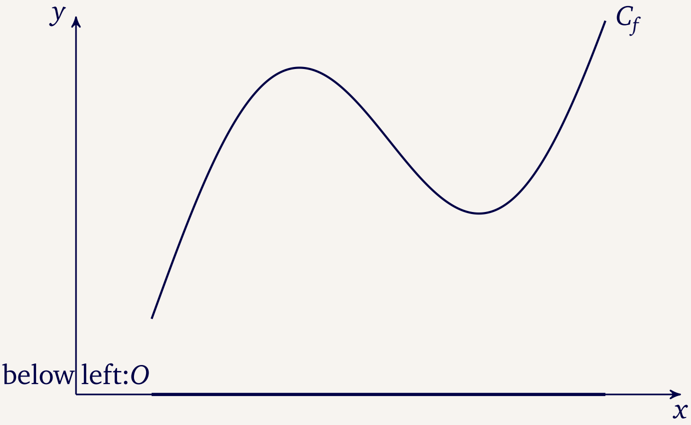
Théorème de Rolle & conséquences

Définition 3.1 — Extrema locaux

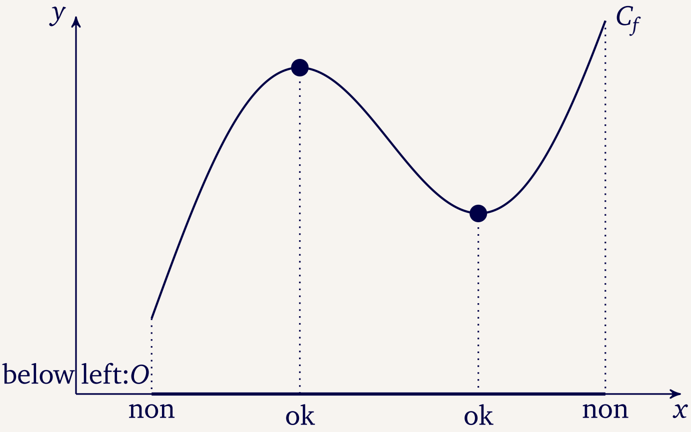
On dit que f admet un maximum local (resp. un minimum local) en x_0 si et seulement si il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in \left]x_0 - \alpha\,;\, x_0 + \alpha\right[\cap I, \qquad f(x) \leqslant f(x_0)$$

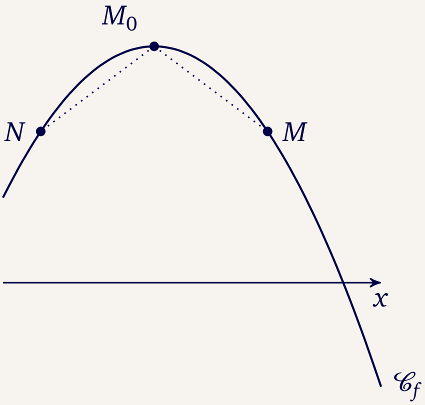
$$\text{(resp. } f(x) \geqslant f(x_0)\text{)}$$



Extrema locaux



Extrema locaux



Démonstration du théorème de Rolle

Théorème 3.2

Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$ et x_0 un point intérieur de I (c'est-à-dire *pas une borne* de I). Si f admet un extremum local en x_0 et si f est dérivable en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.

Théorème 3.3 — Théorème de Rolle

Soit I un intervalle non vide et non réduit à un point, f une fonction dérivable de I dans $\mathbb{R}$ et $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$.

Si $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in \,]a\,;b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème 3.4 — Formule des accroissements finis

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$.

Soit f une fonction continue sur $[\,a\,;\,b\,]$ et dérivable sur $]\,a\,;\,b\,[$.
Il existe $c \in \,]a\,;\,b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Corollaire 3.5

Soit $f : \mathscr{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. La fonction f' est nulle sur un intervalle I si et seulement si f est constante sur I.

Corollaire 3.6

Si f' est positive (resp. négative) sur I alors f est croissante (resp. décroissante) sur I.

Corollaire 3.7

Si f' est positive (resp. négative) et ne s'annule sur aucun intervalle inclus dans I alors f est strictement croissante sur I (resp. strictement décroissante).

Théorème 3.8 — Inégalité des accroissements finis - I

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Soit f une fonction continue sur $[\,a\,;\,b\,]$ et dérivable sur $]\,a\,;\,b\,[$. Si il existe deux réels m et M tels que

$$\forall x \in \,]\,a\,;\,b\,[\,, \qquad m \leqslant f'(x) \leqslant M$$

alors
$$m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$$

Théorème 3.9 — Inégalité des accroissements finis – II

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$.

Soit f une fonction continue sur $[\,a\,;\,b\,]$ et dérivable sur $]\,a\,;\,b\,[$.
Si il existe un réel M tel que

$$\forall x \in\,]\,a\,;\,b\,[\,, \qquad \left|f'(x)\right| \leqslant M$$

alors

$$|f(b)-f(a)| \leqslant M\,|b-a|$$

Résumé : plan d’étude d’une fonction

Théorème 4.1 — Formule de Taylor–Lagrange

Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$, de classe C^{n+1}. Pour tout réels distincts a et b dans I, il existe un réel c strictement compris entre a et b tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

Théorème 4.2 — Formule de Taylor–Young

Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$, de classe C^{n+1}. Pour tout a et x dans I, il existe une fonction ε telle que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} \varepsilon(x)$$

avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$.

Courbes paramétrées

Généralisation aux fonctions à valeurs complexes