

Fonctions dérivables

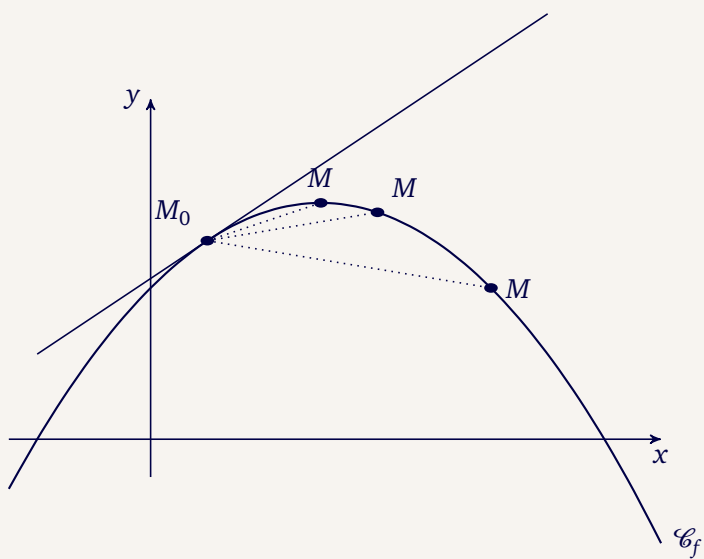


Notations du chapitre

Dans tout ce chapitre I est un intervalle non vide de \mathbb{R} et *non réduit à un point*, x_0 est un point de I et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé donné.

Nombre dérivé en un point



Corde, tangente et dérivabilité

Définition 1.2 — Nombre dérivé d'une fonction en un point

La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si le taux d'accroissement

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

admet une limite finie en x_0 .

Dans ce cas, cette limite se note $f'(x_0)$ et s'appelle le nombre dérivé de f en x_0 .

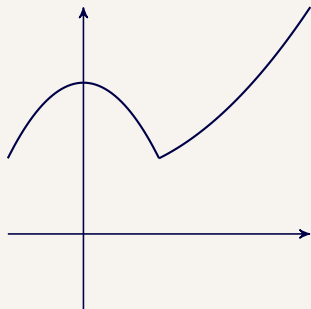
$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

(sous réserve d'existence)

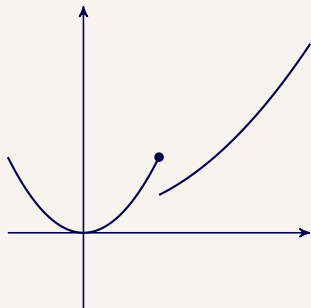
Théorème 1.3 — Tangente en un point de \mathcal{C}_f

La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si \mathcal{C}_f admet une tangente *non verticale* au point $(x_0, f(x_0))$.

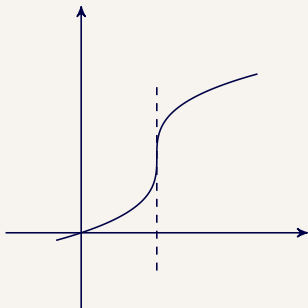
Par ailleurs $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \infty$ si et seulement si \mathcal{C}_f admet une **tangente verticale** en x_0 .



La fonction présente un brusque changement de direction, un « rebond ». Le taux d'accroissement à une limite différente à gauche et à droite.



La fonction présente une déchirure. Le taux d'accroissement a une limite infinie à droite (mais finie à gauche).



La tangente est verticale en un point. Le taux d'accroissement admet des limites infinies à gauche et à droite.

Théorème 1.4 — Dérivable implique continue

Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0 .

Corollaire 1.5

Si une fonction f est dérivable sur un domaine \mathcal{D} alors elle est continue sur \mathcal{D} .

Fonction dérivée

Définition 2.1 — Dérivabilité sur un intervalle – Fonction dérivée

Si f est dérivable en tout point de I on dit que f est **dérivable sur I** .

La fonction f' définie par $f' : \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f'(x) \end{cases}$ est la **fonction dérivée** de f .

Définition 2.2 — Fonction de classe C^n sur I

Une fonction f est **de classe C^n sur I** si et seulement si f est dérivable n fois sur I et que la dérivée n -ième de f est continue sur I . L'ensemble des fonctions de classe C^n sur I se note $C^n(I)$.

La fonction f est **de classe C^∞ sur I** si et seulement si f est dérivable n fois, pour tout entier naturel n . L'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur I se note $C^\infty(I)$.

Propriété 2.3 — Opérations algébriques (I)

Soit f et g deux fonctions dérivables sur I , et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. La fonction λf est dérivable sur I , de fonction dérivée $\lambda f'$;
2. la fonction $f + g$ est dérivable sur I , de fonction dérivée $f' + g'$;
3. la fonction $f \times g$ est dérivable sur I , de fonction dérivée $f \times g' + f' \times g$.

Propriété 2.4 — Opérations algébriques (II)

Soit f et g deux fonctions n fois dérivable sur I , et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. La fonction λf est n fois dérivable sur I et $(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$;
2. la fonction $f + g$ est n fois dérivable sur I et $(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$;
3. la fonction $f \times g$ est n fois dérivable.

De même si f et g sont de classe C^∞ alors $f + g$, λf et $f \times g$ sont de classe C^∞ .

Propriété 2.5 — Dérivée de la composée

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) \in J$. Si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \times g'(f(x_0))$$

Propriété 2.6 — Dérivée d'un quotient

Soient f et g deux fonctions dérivables sur I .

Si la fonction f/g est définie sur I , alors f/g est dérivable sur I ,
de fonction dérivée

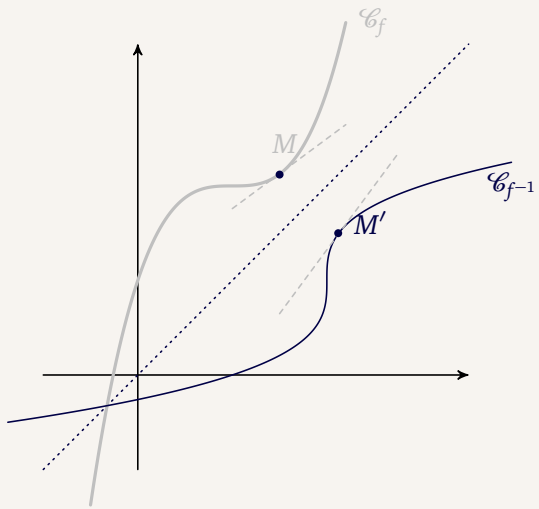
$$\frac{f'g - g'f}{g^2}.$$

Théorème 2.7 — Dérivée de la bijection réciproque

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, dérivable et strictement monotone (dans ce cas f est bijective). Soit $y_0 = f(x_0) \in f(I)$.

Si $f'(x_0) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en y_0 et

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$



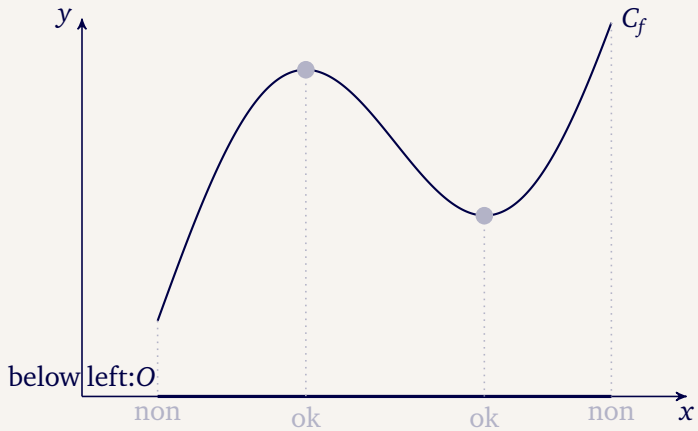
Théorème de Rolle & conséquences

Définition 3.1 — Extrema locaux

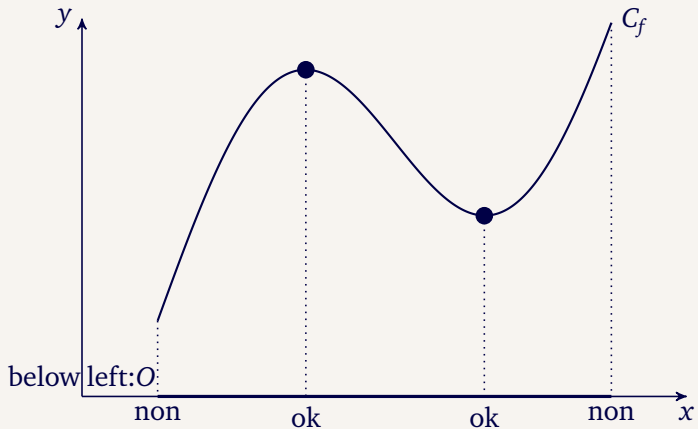
On dit que f admet un **maximum local** (resp. un **minimum local**) en x_0 si et seulement si il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in]x_0 - \alpha ; x_0 + \alpha[\cap I, \quad f(x) \leq f(x_0)$$

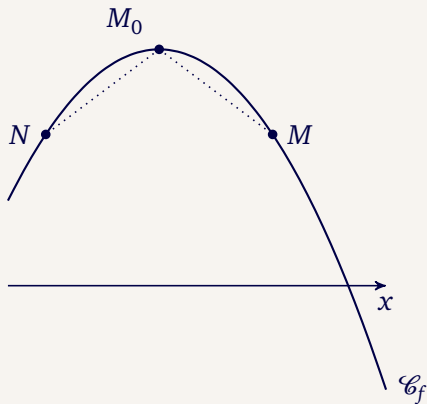
(resp. $f(x) \geq f(x_0)$)



Extrema locaux



Extrema locaux



Démonstration du théorème de Rolle

Théorème 3.4

Soit f une fonction de I dans \mathbb{R} et x_0 un point intérieur de I (c'est-à-dire *pas une borne* de I). Si f admet un extremum local en x_0 et si f est dérivable en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.

Théorème 3.5 — Théorème de Rolle

Soit I un intervalle non vide et non réduit à un point, f une fonction dérivable de I dans \mathbb{R} et $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$.

Si $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a ; b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème 3.6 — Formule des accroissements finis

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$.

Soit f une fonction continue sur $[a ; b]$ et dérivable sur $]a ; b[$.

Il existe $c \in]a ; b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Corollaire 3.7

Soit $f : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. La fonction f' est nulle sur un intervalle I si et seulement si f est constante sur I .

Corollaire 3.8

Si f' est positive (resp. négative) sur I alors f est croissante (resp. décroissante) sur I .

Corollaire 3.9

Si f' est positive (resp. négative) et ne s'annule sur aucun intervalle inclus dans I alors f est strictement croissante sur I (resp. strictement décroissante).

Théorème 3.10 — Inégalité des accroissements finis

- I

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Soit f une fonction continue sur $[a ; b]$ et dérivable sur $]a ; b[$. Si il existe deux réels m et M tels que

$$\forall x \in]a ; b[, \quad m \leq f'(x) \leq M$$

alors $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$

Théorème 3.11 — Inégalité des accroissements finis

– II

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$.

Soit f une fonction continue sur $[a ; b]$ et dérivable sur $]a ; b[$.

Si il existe un réel M tel que

$$\forall x \in]a ; b[, \quad |f'(x)| \leq M |f(b) - f(a)| \leq M |b - a|$$

Résumé : plan d'étude d'une fonction

Théorème 4.1 — Formule de Taylor–Lagrange

Soit f une fonction de I dans \mathbb{R} , de classe C^{n+1} . Pour tout réels distincts a et b dans I , il existe un réel c strictement compris entre a et b tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

Théorème 4.2 — Formule de Taylor–Young

Soit f une fonction de I dans \mathbb{R} , de classe C^{n+1} . Pour tout a et x dans I , il existe une fonction ε telle que

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} \varepsilon(x)$$

avec $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$.

Courbes paramétrées

Généralisation aux fonctions à valeurs complexes