Continuité sur un intervalle

Notations du chapitre

Dans tout ce chapitre, et sauf mention contraire :

- I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduite à un point ;
- $\mathscr{D}$ est un domaine de $\mathbb{R}$.

Fonction continue sur un ensemble

Définition 1.1 — Fonction continue sur un ensemble

Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$.

> On dit que f est continue $\mathscr{D}$ si et seulement si f est continue en tout point de $\mathscr{D}$.

Théorème 1.2 — Opérations algébriques

Soient f et g sont deux fonctions continues sur un domaine $\mathscr{D}$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Les fonctions $\lambda f + \mu g$ et $f \times g$ sont continues sur $\mathscr{D}$.

Si, de plus, g ne s'annule en aucun point de $\mathscr{D}$ alors $\dfrac{f}{g}$ est continue sur $\mathscr{D}$.

Théorème 1.3 — Composition

Soient $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux domaines de $\mathbb{R}$, $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathscr{D}' \longrightarrow \mathbb{R}$.

Si f est continue sur $\mathscr{D}$, si $f\langle\mathscr{D}\rangle \subset \mathscr{D}'$ et si g est continue sur $\mathscr{D}'$, alors $g \circ f$ est continue sur $\mathscr{D}$.

Théorème 1.4 — Composition avec une suite

Soit $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels à valeur dans $\mathscr{D}$.

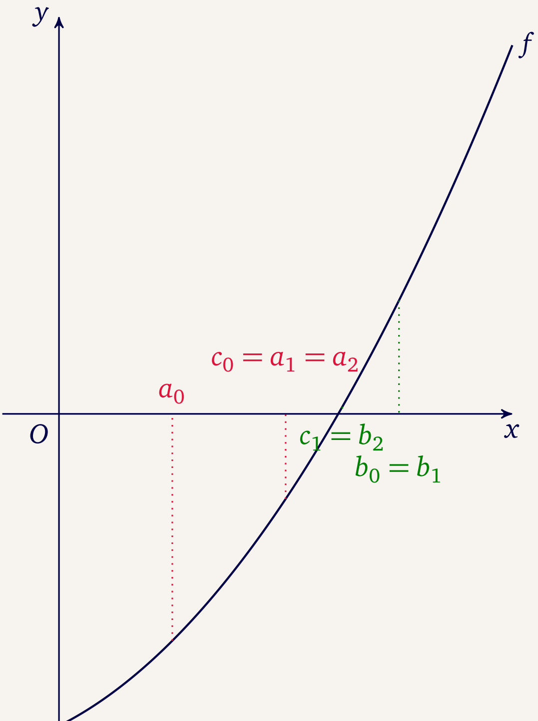
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite $a \in \mathscr{D}$ alors $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite $f(a)$.

Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 2.1 — Théorème des valeurs intermédiaires (I)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I, a et b deux points distincts de I.

> Si $f(a)f(b) < 0$ alors il existe un point c entre a et b tel que $f(c) = 0$.



y
f
$c_0 = a_1 = a_2$
a_0
O
x
$c_1 = b_2$
$b_0 = b_1$

Corollaire 2.2 — Théorème des valeurs intermédiaires (II)

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points. Soit a et b dans I et γ un réel entre $f(a)$ et $f(b)$.

Il existe un point c entre a et b tel que $f(c) = \gamma$.

Corollaire 2.3 — Théorème des valeurs intermédiaires (III)

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points.

Alors $f\langle I \rangle$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Corollaire 2.4

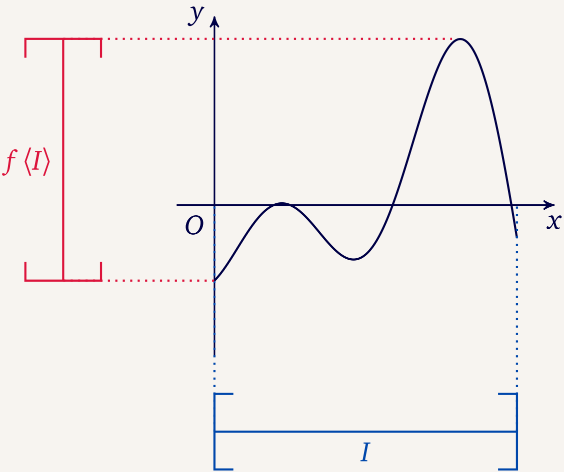
Soit $f\ :\ I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et soit a et b deux élements de I, éventuellement des bornes finies ou infinies. Alors

1. Si f est croissante :
   - $f\left\langle]a\,;b[\right\rangle = \left] \lim\limits_{a+} f\ ;\ \lim\limits_{b-} f \right[$
   - $f\left\langle [a\,;b[\right\rangle = \left[f(a)\ ;\ \lim\limits_{b-} f \right[$
   - $f\left\langle]a\,;b] \right\rangle = \left] \lim\limits_{a+} f\ ; f(b) \right]$
   - $f\left\langle [a\,;b] \right\rangle = [f(a)\,; f(b)]$
2. Si f est décroissante :
   - $f\left\langle]a\,;b[\right\rangle = \left] \lim\limits_{b-} f\ ;\ \lim\limits_{a+} f \right[$
   - $f\left\langle [a\,;b[\right\rangle = \left[f(b)\ ;\ \lim\limits_{a+} f \right[$
   - $f\left\langle]a\,;b] \right\rangle = \left] \lim\limits_{b-} f\ ; f(a) \right]$
   - $f\left\langle [a\,;b] \right\rangle = [f(b)\,; f(a)]$

Théorème 2.5 — Théorème des bornes atteintes

Soit I est un *segment* de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{Alors } f\langle I\rangle \text{ est aussi un segment de } \mathbb{R}.}$$



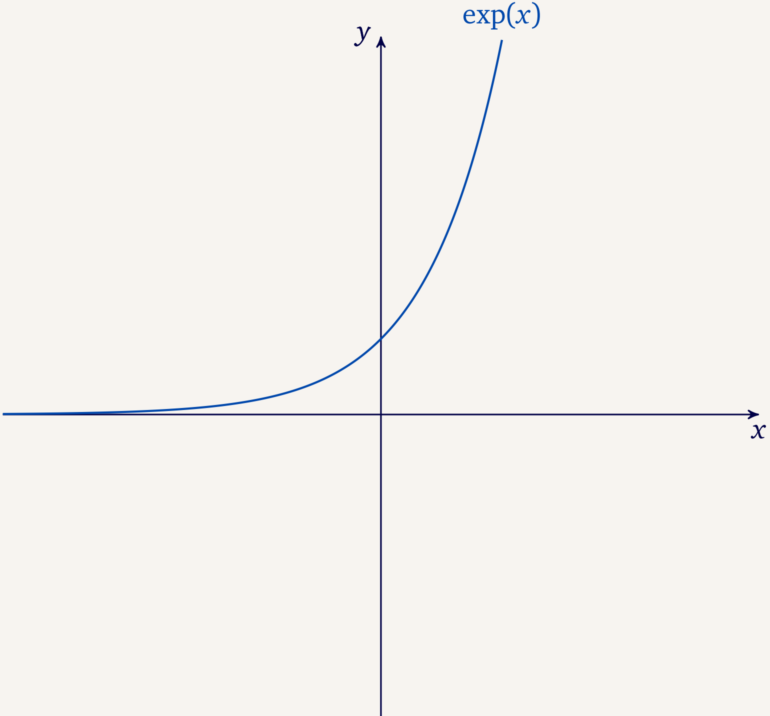
y
x
O
f ⟨I⟩
I

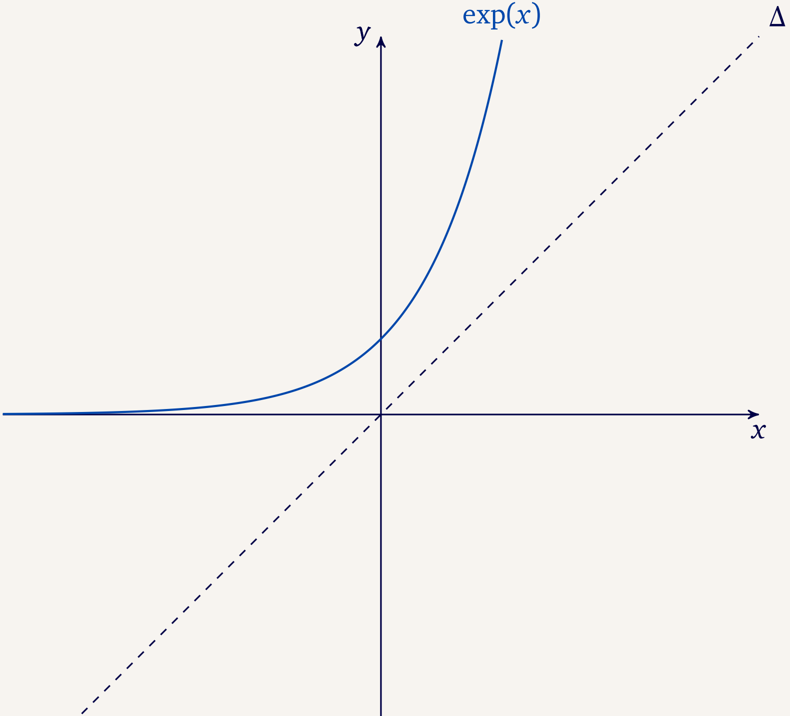
Théorème de la bijection continue

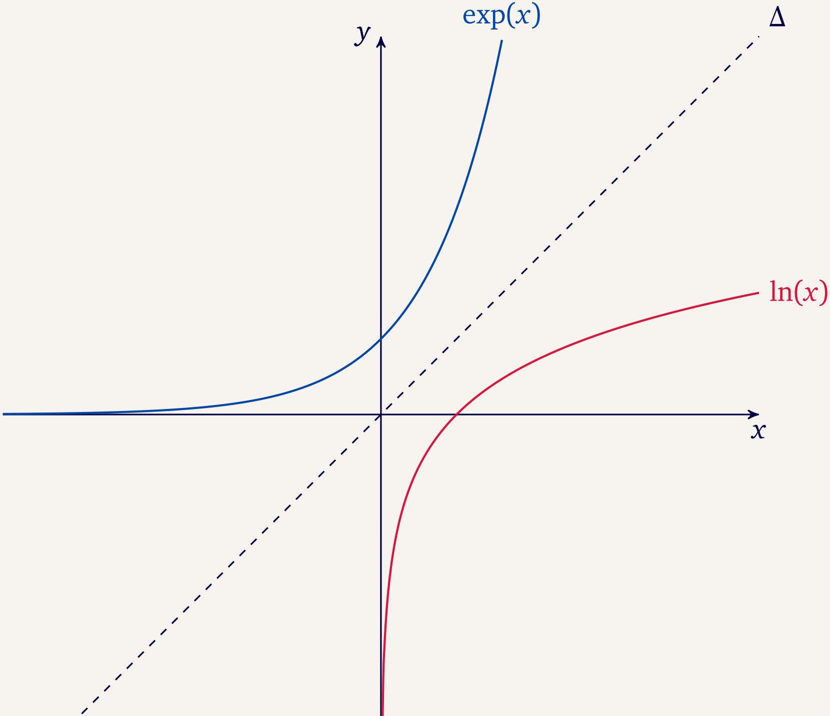
Théorème 3.1 — Théorème de la bijection continue

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application strictement monotone.

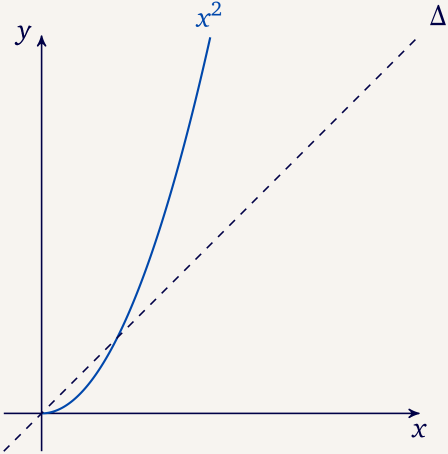
- La fonction f réalise une bijection de I sur $f\langle I\rangle$.
- La bijection réciproque f^{-1}, définie sur $f\langle I\rangle$, est strictement monotone, et de même monotonie que f
- Si, de plus, f est continue, alors f^{-1} est continue sur l'intervalle $f\langle I\rangle$.


exp(x)
y
x

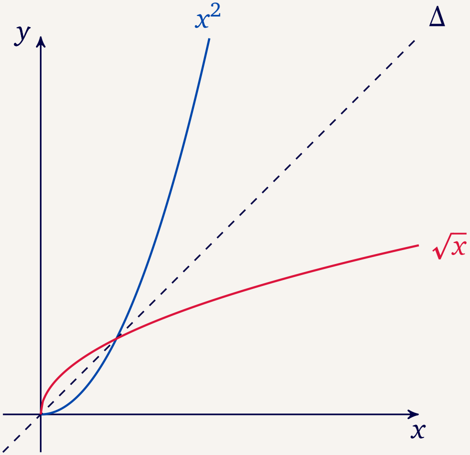

exp(x)
Δ
y
x



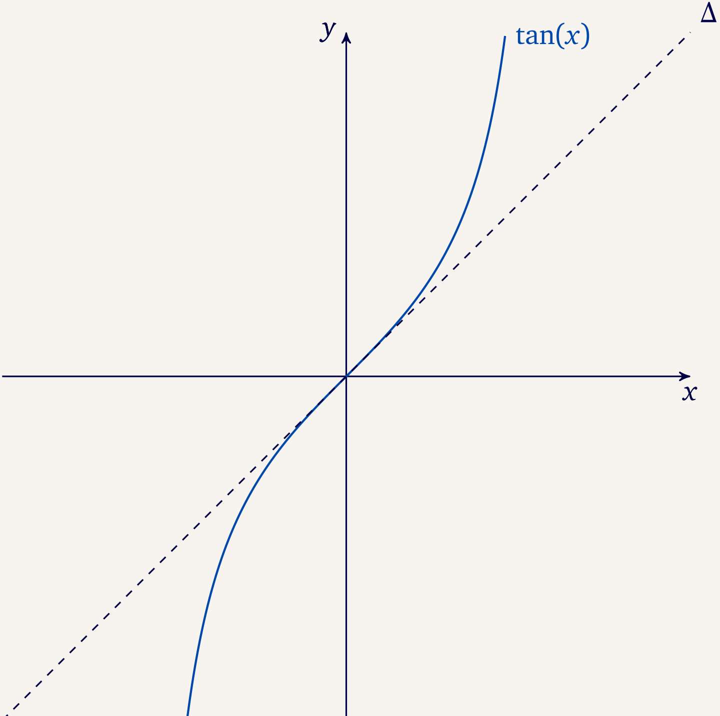
$\exp(x)$
Δ
y
$\ln(x)$
x

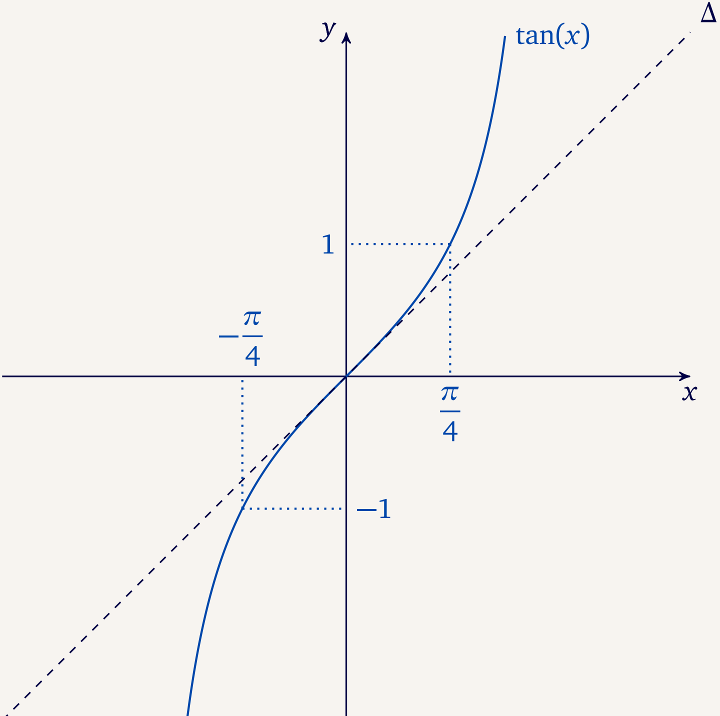


Graphes de $x \mapsto x^2$ et de $x \mapsto \sqrt{x}$.

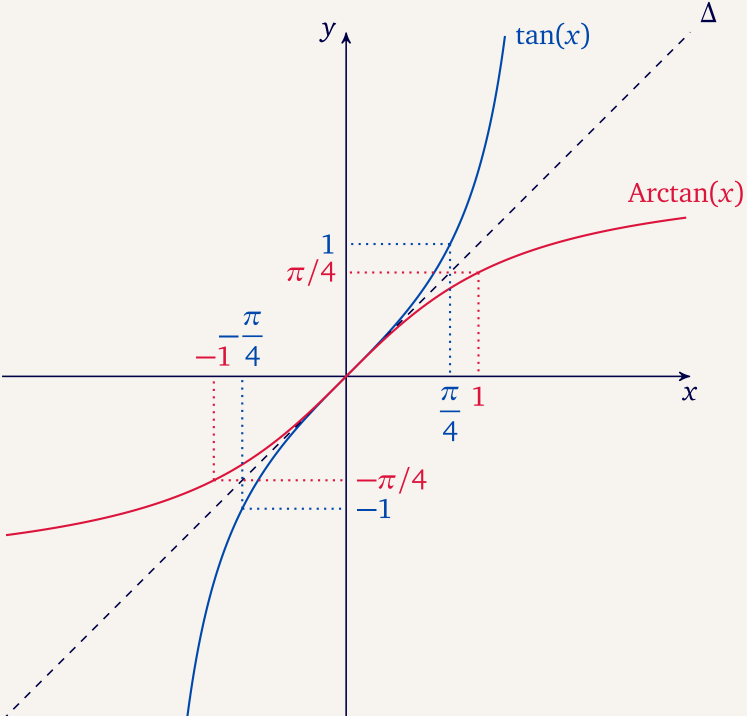


Graphes de $x \mapsto x^2$ *et de* $x \mapsto \sqrt{x}$.

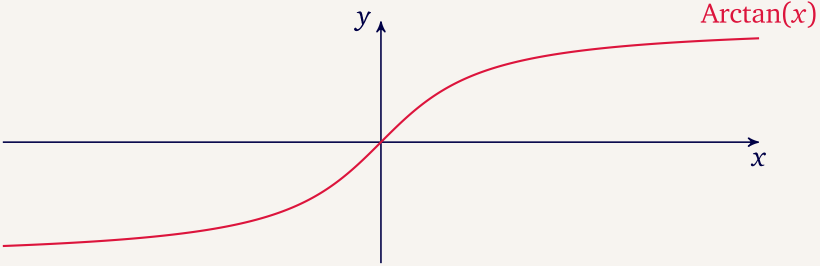

y
tan(x)
Δ
x



y
$\tan(x)$
Δ
1
$-\frac{\pi}{4}$
x
$\frac{\pi}{4}$
-1



y
Δ
$\tan(x)$
$\mathrm{Arctan}(x)$
1
$\pi/4$
$-\frac{\pi}{4}$
-1
$\frac{\pi}{4}$
1
x
$-\pi/4$
-1



Graphe de Arctan

Corollaire 3.2 — « Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires »

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur I, a et b deux points de I.

> Si $f(a)\,f(b) < 0$ alors il existe un unique point c entre a et b tel que $f(c) = 0$.