

# Continuité sur un intervalle



## Notations du chapitre

Dans tout ce chapitre, et sauf mention contraire :

- $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  non vide et non réduite à un point ;
- $\mathcal{D}$  est un domaine de  $\mathbb{R}$ .

Fonction continue sur un ensemble

## Définition 1.1 — Fonction continue sur un ensemble

Soit  $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ .

On dit que  $f$  est continue  $\mathcal{D}$  si et seulement si  $f$  est continue en tout point de  $\mathcal{D}$ .

## Théorème 1.2 — Opérations algébriques

Soient  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues sur un domaine  $\mathcal{D}$  et  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ .

Les fonctions  $\lambda f + \mu g$  et  $f \times g$  sont continues sur  $\mathcal{D}$ .

Si, de plus,  $g$  ne s'annule en aucun point de  $\mathcal{D}$   
alors  $\frac{f}{g}$  est continue sur  $\mathcal{D}$ .

## Théorème 1.3 — Composition

Soient  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  deux domaines de  $\mathbb{R}$ ,  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathcal{D}' \rightarrow \mathbb{R}$ .

Si  $f$  est continue sur  $\mathcal{D}$ , si  $f(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}'$  et si  $g$  est continue sur  $\mathcal{D}'$ , alors  $g \circ f$  est continue sur  $\mathcal{D}$ .

## Théorème 1.4 — Composition avec une suite

Soit  $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$  continue, et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels à valeur dans  $\mathcal{D}$ .

Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente de limite  $a \in \mathcal{D}$  alors  $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente de limite  $f(a)$ .

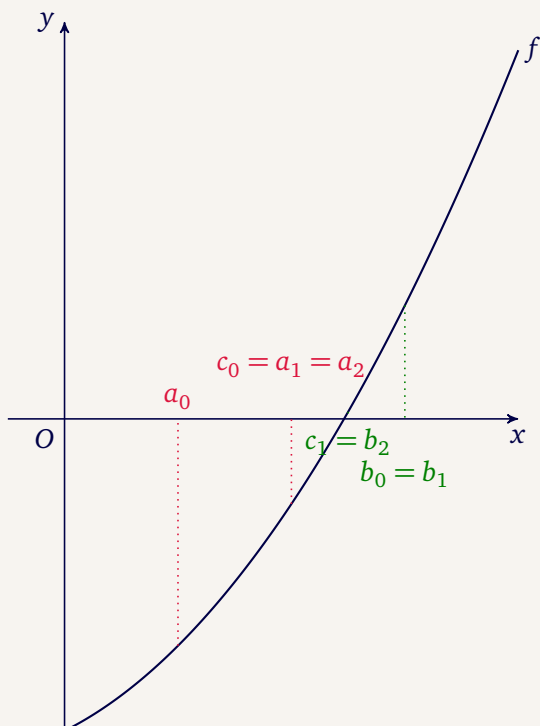
# Théorème des valeurs intermédiaires



## Théorème 2.1 — Théorème des valeurs intermédiaires (I)

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  contenant au moins deux points,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur  $I$ ,  $a$  et  $b$  deux points distincts de  $I$ .

Si  $f(a)f(b) < 0$  alors il existe un point  $c$  entre  $a$  et  $b$  tel que  $f(c) = 0$ .



## Corollaire 2.3 — Théorème des valeurs intermédiaires (II)

Soit  $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur  $I$ , où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  contenant au moins deux points. Soit  $a$  et  $b$  dans  $I$  et  $\gamma$  un réel entre  $f(a)$  et  $f(b)$ .

Il existe un point  $c$  entre  $a$  et  $b$  tel que  $f(c) = \gamma$ .

## Corollaire 2.4 — Théorème des valeurs intermédiaires (III)

Soit  $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur  $I$ , où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  contenant au moins deux points.

Alors  $f(I)$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

## Corollaire 2.5

Soit  $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$  continue et soit  $a$  et  $b$  deux éléments de  $I$ , éventuellement des bornes finies ou infinies. Alors

1. Si  $f$  est croissante :

$$- f \langle ]a ; b[ \rangle = \left] \lim_{a+} f ; \lim_{b-} f \right[$$

$$- f \langle [a ; b[ \rangle = \left[ f(a) ; \lim_{b-} f \right[$$

$$- f \langle ]a ; b] \rangle = \left] \lim_{a+} f ; f(b) \right]$$

$$- f \langle [a ; b] \rangle = \left[ f(a) ; f(b) \right]$$

2. Si  $f$  est décroissante :

$$- f \langle ]a ; b[ \rangle = \left] \lim_{b-} f ; \lim_{a+} f \right[$$

$$- f \langle [a ; b[ \rangle = \left[ f(b) ; \lim_{a+} f \right[$$

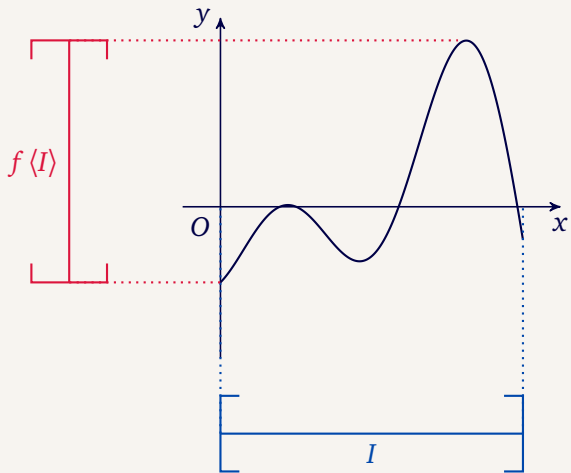
$$- f \langle ]a ; b] \rangle = \left] \lim_{b-} f ; f(a) \right]$$

$$- f \langle [a ; b] \rangle = \left[ f(b) ; f(a) \right]$$

## Théorème 2.6 — Théorème des bornes atteintes

Soit  $I$  est un *segment* de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ .

Alors  $f(I)$  est aussi un segment de  $\mathbb{R}$ .



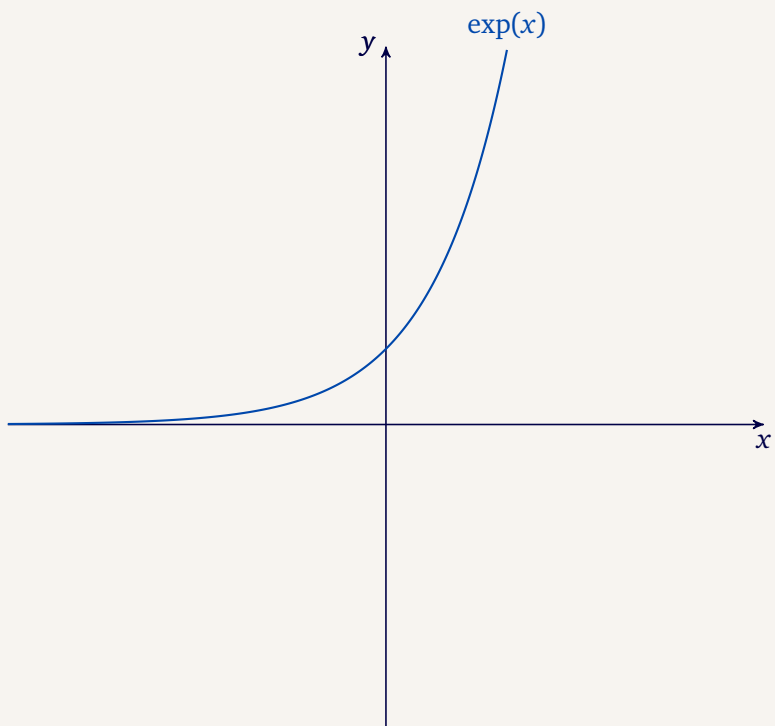
# Théorème de la bijection continue

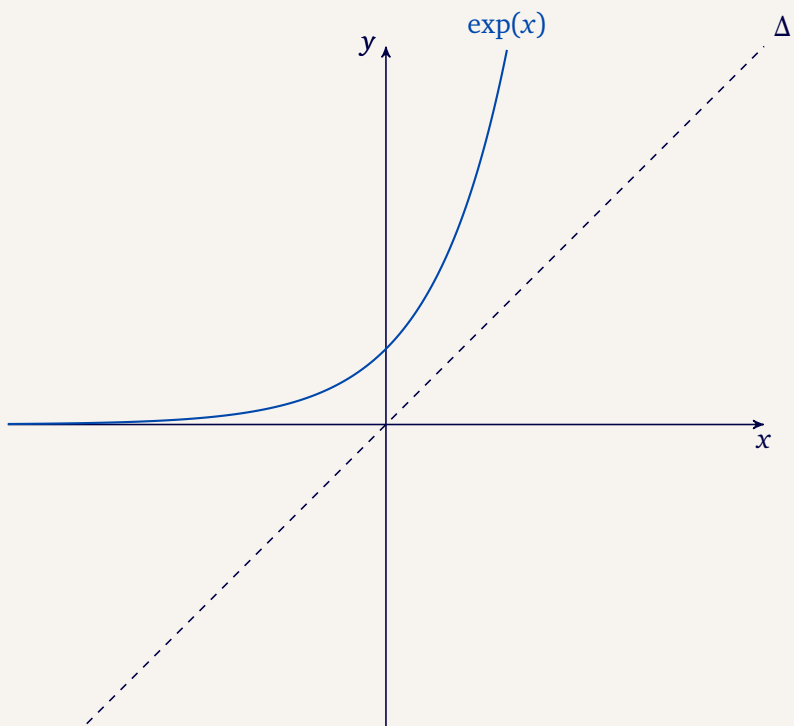


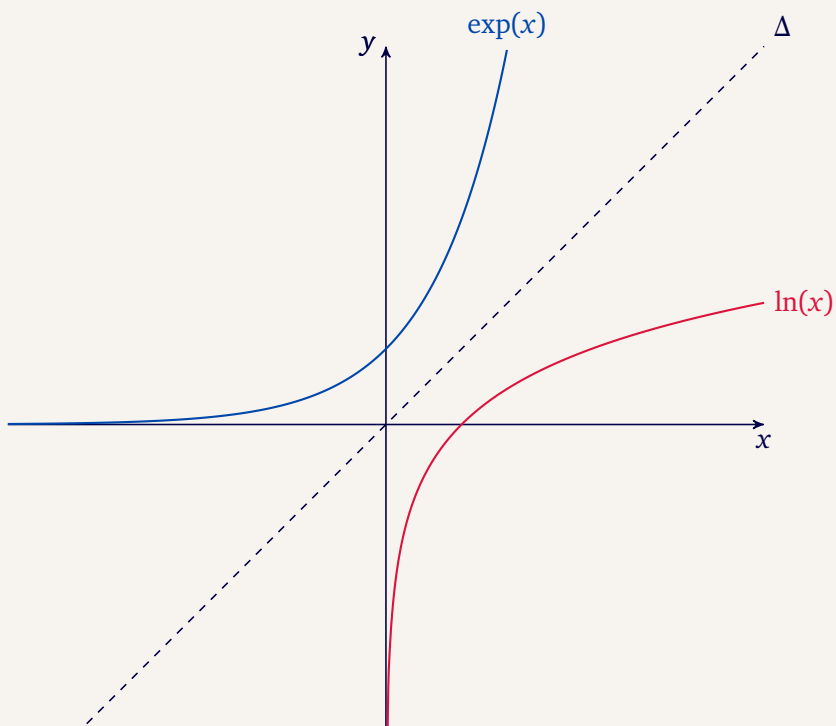
### **Théorème 3.1 — Théorème de la bijection continue**

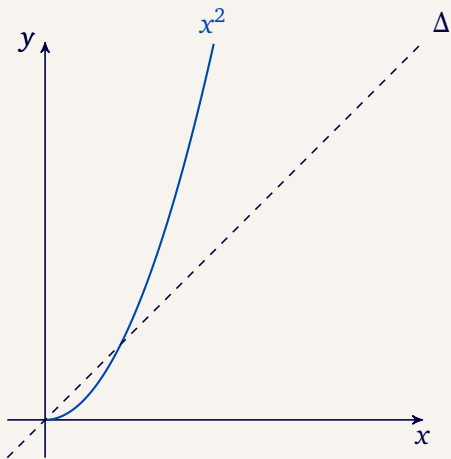
Soit  $I$  un intervalle non vide de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$  une application strictement monotone.

- La fonction  $f$  réalise une bijection de  $I$  sur  $f(I)$ .
- La bijection réciproque  $f^{-1}$ , définie sur  $f(I)$ , est strictement monotone, et de même monotonie que  $f$
- Si, de plus,  $f$  est continue, alors  $f^{-1}$  est continue sur l'intervalle  $f(I)$ .

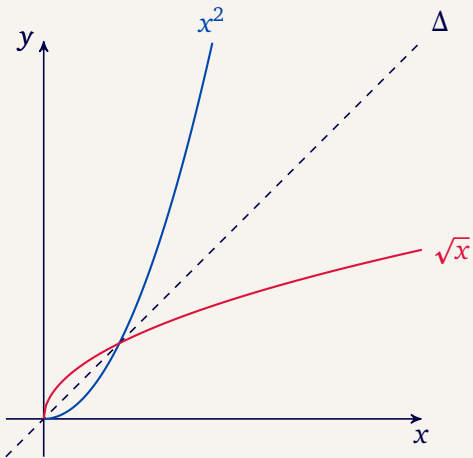




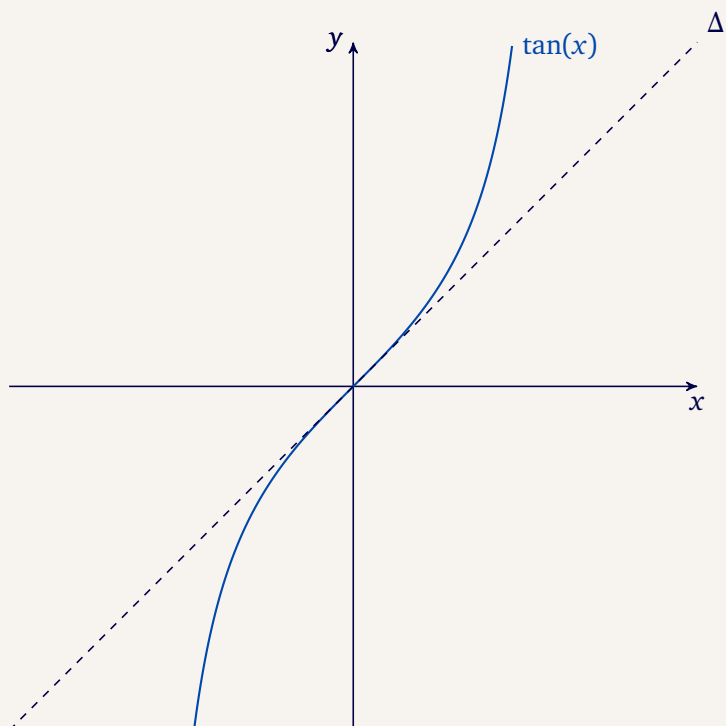


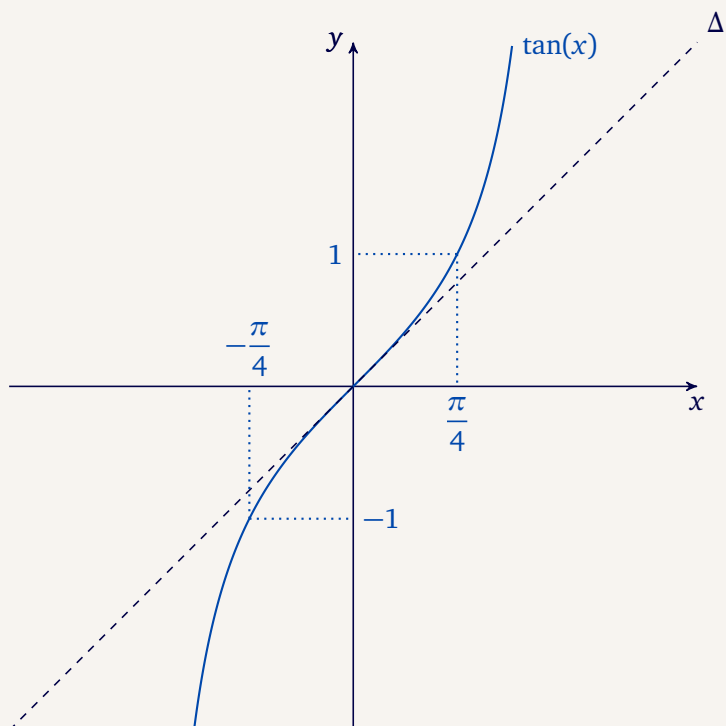


*Graphes de  $x \mapsto x^2$  et de  $x \mapsto \sqrt{x}$ .*

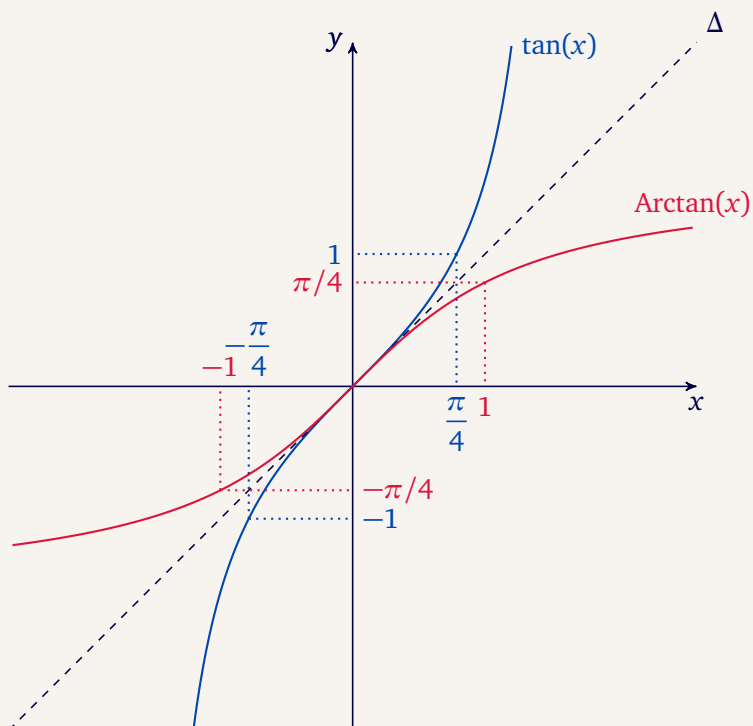


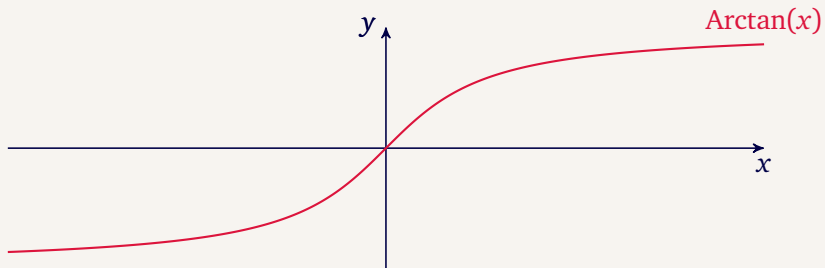
*Graphes de  $x \mapsto x^2$  et de  $x \mapsto \sqrt{x}$ .*











*Graphe de Arctan*

### Corollaire 3.6 — « Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires »

Soit  $I$  un intervalle non vide de  $\mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et strictement monotone sur  $I$ ,  $a$  et  $b$  deux points de  $I$ .

Si  $f(a)f(b) < 0$  alors il existe un unique point  $c$  entre  $a$  et  $b$  tel que  $f(c) = 0$ .