Nombres complexes

février 2017

Nombres complexes

On appelle ensemble des nombres complexes et on note $\mathbb{C}$ l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des deux opérations suivantes

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall (x',y') \in \mathbb{R}^2,$$

addition $\qquad (x,y)+(x',y') \overset{\text{déf.}}{=} (xx',yy')$

$$(x,y)\times(x',y') \overset{\text{déf.}}{=} (xx'-yy',xy'+x'y)$$

multiplication

Partie réelle, partie imaginaire

Soit z un nombre complexe. Il existe un unique couple (x,y) de réels tels que $z = x + \mathrm{i}y$.

Le réel x est la partie réelle de z notée $\mathrm{Re}(z)$ et y est sa partie imaginaire, notée $\mathrm{Im}(z)$.

Si $\mathrm{Re}(z) = 0$, on dit que z est un imaginaire pur et si $\mathrm{Im}(z) = 0$ on dit que z est un réel.

On identifie le sous-ensemble $\{(x,0) \ \text{ avec } \ x \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^2$ avec $\mathbb{R}$. L'ensemble des imaginaires purs est noté $\mathrm{i}\mathbb{R}$.

Propriété des parties réelles et imaginaires

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$

$\mathrm{Re}(z+z') = \mathrm{Re}(z)+\mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z+z') = \mathrm{Im}(z)+\mathrm{Im}(z')$

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

$$\mathrm{Re}(\lambda z) = \lambda\,\mathrm{Re}(z) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(\lambda z) = \lambda\,\mathrm{Im}(z)$$

Cas d'égalité

Soit $(x, x', y, y') \in \mathbb{R}^4$:

$$\boxed{x + \mathrm{i}y = x' + \mathrm{i}y' \iff x = x' \quad \text{et} \quad y = y'}$$

Conjugué d'un complexe

Soit $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

On appelle conjugué de z et on note $\overline{z}$ le complexe $\overline{z} \overset{\text{déf.}}{=} x - iy$.

Conjugaison et opérations

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$

$$\overline{\overline{z}} = z \qquad \overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$$

$$\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'} \qquad \overline{z^n} = \overline{z}^n \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$$

Forme algébrique de l'inverse

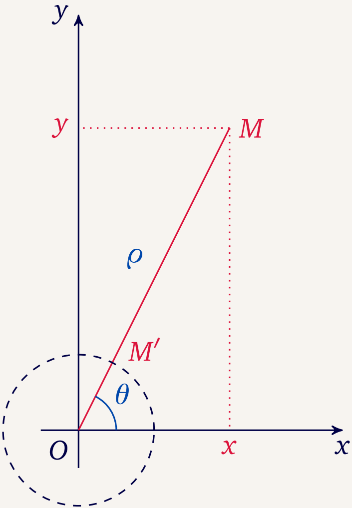
Si $z \in \mathbb{C}^*$, $z = x + \mathrm{i}y$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$\boxed{\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x}{x^2+y^2} - \mathrm{i}\frac{y}{x^2+y^2}}$$

Soit $z \in \mathbb{C}$:

- $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ et $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$;
- z est réel si et seulement si $z = \overline{z}$ et z est imaginaire pur si et seulement si $z = -\overline{z}$.

Coordonnées polaire vs. cartésiennes.



Coordonnées polaires

Soit $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Il existe un couple (ρ, θ) de réels tels que

$$\rho \in \mathbb{R}_+, \quad \theta \in \mathbb{R}, \qquad x = \rho\cos\theta \qquad \text{et} \qquad y = \rho\sin\theta$$

- Le réel ρ est unique : $\rho^2 = x^2 + y^2$. C'est le module de z.
- Si $z = 0$ alors θ est quelconque dans $\mathbb{R}$.
- Si $z \neq 0$ alors θ est défini à 2π près. Chaque valeur possible de θ est un argument de z. L'unique réel $\theta_0 \in \left]-\pi\,;\,\pi\right]$ vérifiant la relation précédente s'appelle l'argument principal de z. L'ensemble des arguments de z est

$$\{\theta_0 + 2k\pi, \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

Notation exponentielle

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Il existe un couple $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ tel que

$$\boxed{z = \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \overset{\text{déf.}}{=} \rho(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)}$$

D'après ce qui précède, on a la relation fondamentale

$$\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}}$$

et donc $$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}} \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha-\beta)} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}}$$

$$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\alpha} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

Cas d'égalité

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, de notations exponentielles $z = \rho e^{i\alpha}$ et $z' = \rho' e^{i\beta}$

$$\boxed{z = z' \quad \Longleftrightarrow \quad \rho = \rho' \quad \text{et} \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ \alpha = \beta + 2k\pi}$$

Propriétés du module

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$:

$$\boxed{\begin{array}{cc} \left|zz'\right| = |z|\left|z'\right| & \left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|} \\ |z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0 & |z| = |\bar{z}| \\ |\mathrm{Re}\,(z)| \leqslant |z| & |\mathrm{Im}\,(z)| \leqslant |z| \end{array}}$$

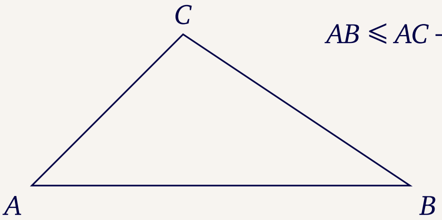
Inégalité triangulaire

Si z et z' sont deux complexes, alors

$$\boxed{\left|z+z'\right| \leqslant |z|+\left|z'\right| \qquad \text{et} \qquad \left||z|-\left|z'\right|\right| \leqslant \left|z-z'\right|}$$

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$: $\qquad |c-a| \leqslant |b-a| + |c-b|$

Interprétation de l'inégalité triangulaire



$$AB \leqslant AC + CB$$

La ligne droite AB est un chemin plus court entre A et B que la ligne brisée ABC.

Soit $(z, z') \in (\mathbb{C}^*)^2$.

On note parfois $\arg(z)$ un argument de z. Dans ce cas

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \quad [2\pi]$
- $\arg(az) = \arg(z) \quad [2\pi] \quad \text{si } a \in \mathbb{R}_+^*$
- $\arg(az) = \pi + \arg(z) \quad [2\pi] \quad \text{si } a \in \mathbb{R}_-^*$
- $\arg(z^n) = n \arg(z) \quad [2\pi]$
- $\arg(1/z) = -\arg(z) \quad [2\pi]$
- $\arg(z/z') = \arg(z) - \arg(z') \quad [2\pi]$
- $\arg(\overline{z}) = -\arg(z) \quad [2\pi]$

Exponentielle complexe

Soit $z \in \mathbb{C}$. On note $z = x + \mathrm{i}y$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}$.

On définit l'exponentielle de z par

$$\boxed{\exp(z) \overset{\text{déf.}}{=} \exp(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^{x}\,(\cos(y) + \mathrm{i}\sin(y))}$$

Soit z et z' deux complexes. On a

$$\boxed{\exp(z+z') = \exp(z)\ \exp(z')}$$

Formules d'Euler

Soit $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$$

Formules de Moivre

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a

$$\boxed{\mathrm{e}^{in\theta} = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)}$$

ou de manière équivalente

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(n\theta) &= \mathrm{Re}\Big[\,(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n\,\Big] \\ \sin(n\theta) &= \mathrm{Im}\Big[\,(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n\,\Big] \end{aligned}}$$