

# Nombres complexes



## Définition de $\mathbb{C}$ – Écriture algébrique

## Définition 1.1 — Nombres complexes

On appelle **ensemble des nombres complexes** et on note  $\mathbb{C}$  l'ensemble  $\mathbb{R}^2$  muni des deux opérations suivantes

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall (x',y') \in \mathbb{R}^2,$$

addition  $(x,y) + (x',y') \stackrel{\text{d\'ef.}}{=} (xx',yy')$

multiplication  $(x,y) \times (x',y') \stackrel{\text{d\'ef.}}{=} (xx' - yy', xy' + x'y)$

## Définition 1.2 — Partie réelle, partie imaginaire

Soit  $z$  un nombre complexe. Il existe un unique couple  $(x, y)$  de réels tels que  $z = x + iy$ .

Le réel  $x$  est la **partie réelle** de  $z$  notée  $\operatorname{Re}(z)$ ; le réel  $y$  est sa **partie imaginaire**, notée  $\operatorname{Im}(z)$ .

On identifie le sous-ensemble  $\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im}(z) = 0\}$  avec  $\mathbb{R}$ .

Si  $\operatorname{Re}(z) = 0$ ,  $z$  est un **imaginaire pur**. L'ensemble des imaginaires purs est noté  $i\mathbb{R}$ .

### Propriété 1.3 — Propriété des parties réelles et imaginaires

Soit  $(z, z') \in \mathbb{C}^2$

$$\operatorname{Re}(z+z') = \operatorname{Re}(z)+\operatorname{Re}(z') \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(z+z') = \operatorname{Im}(z)+\operatorname{Im}(z')$$

Si  $\lambda \in \mathbb{R}$  alors

$$\operatorname{Re}(\lambda z) = \lambda \operatorname{Re}(z) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(\lambda z) = \lambda \operatorname{Im}(z)$$

## Théorème 1.4 — Cas d'égalité

Soit  $(x, x', y, y') \in \mathbb{R}^4$  :

$$x + iy = x' + iy' \iff x = x' \quad \text{et} \quad y = y'$$

## Définition 1.5 — Conjugué d'un complexe

Soit  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ , avec  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

On appelle *conjugué* de  $z$  et on note  $\bar{z}$  le complexe  $\bar{z} \stackrel{\text{d\'ef.}}{=} x - iy$ .

## Propriété 1.6 — Conjugaison et opérations

Soit  $(z, z') \in \mathbb{C}^2$

$$\overline{\overline{z}} = z$$

$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$$

$$\overline{zz'} = \overline{z}\overline{z'}$$

$$\overline{z^n} = \overline{z}^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\overline{z}}$$



## Propriété 1.7 — Forme algébrique de l'inverse

Si  $z \in \mathbb{C}^*$ ,  $z = x + iy$  avec  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , alors

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$$

## Propriété 1.8

Soit  $z \in \mathbb{C}$  :

- $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$     et     $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$  ;

## Propriété 1.8

Soit  $z \in \mathbb{C}$  :

- $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$  et  $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$  ;
- $z$  est réel si et seulement si  $z = \bar{z}$  et  $z$  est imaginaire pur si et seulement si  $z = -\bar{z}$ .

# Notation exponentielle

## Définition 2.1 — Module d'un nombre complexe

Soit  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z = x + iy$  avec  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Le nombre  $x^2 + y^2$  est un réel positif. Par définition, on note

$$|z| \stackrel{\text{déf.}}{=} \sqrt{x^2 + y^2}$$

que l'on appelle le **module** du nombre complexe  $z$ .

## Propriété 2.2 — Propriétés du module

Soit  $(z, z') \in \mathbb{C}^2$

$$|zz'| = |z| |z'|$$

$$\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

$$|z| = 0 \iff z = 0$$

$$|z| = |\bar{z}|$$

$$|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$$

$$|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$$

## Théorème 2.3 — Inégalité triangulaire

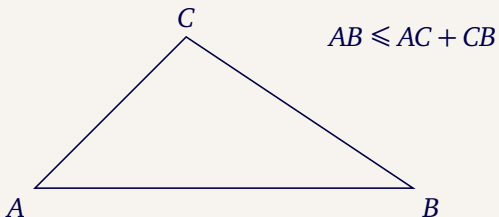
Soit  $(z, z') \in \mathbb{C}^2$

$$|z + z'| \leq |z| + |z'| \quad \text{et} \quad \left| |z| - |z'| \right| \leq |z - z'|$$

## Corollaire 2.4

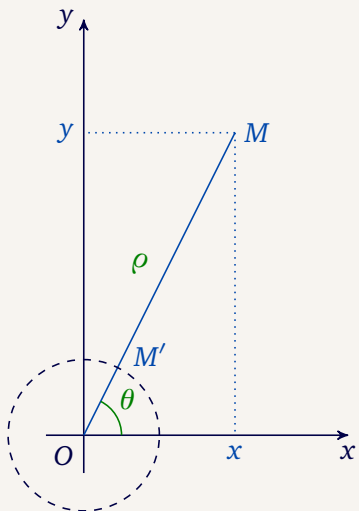
Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$  :  $|c - a| \leq |b - a| + |c - b|$





La ligne droite  $AB$  est un chemin plus court entre  $A$  et  $B$  que la ligne brisée  $ABC$ .

*Interprétation de l'inégalité triangulaire*



*Coordonnées polaire vs. cartésiennes.*

## Thm. & Déf. 2.5 — Coordonnées polaires

Soit  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ , avec  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Il existe un couple  $(\rho, \theta)$  de réels tels que

$$\rho \in \mathbb{R}_+, \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad x = \rho \cos \theta \quad \text{et} \quad y = \rho \sin \theta$$

## Thm. & Déf. 2.5 — Coordonnées polaires

- Le réel  $\rho$  est unique :  $\rho^2 = x^2 + y^2$ . On retrouve le module de  $z$ .
- Si  $z = 0$  alors  $\theta$  est quelconque dans  $\mathbb{R}$ .
- Si  $z \neq 0$  alors  $\theta$  est défini à  $2\pi$  près. Chaque valeur possible de  $\theta$  est un **argument** de  $z$ . L'unique réel  $\theta_0 \in ]-\pi ; \pi ]$  vérifiant la relation précédente s'appelle **l'argument principal** de  $z$ .

## Définition 2.6 — Notation exponentielle

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On note

$$e^{i\alpha} \stackrel{\text{d\u00e9f.}}{=} \cos \alpha + i \sin \alpha$$

## Propriété 2.7 — Relation fondamentale

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} e^{i\beta}$$

et donc

$$e^{-i\alpha} = \frac{1}{e^{i\alpha}} \quad e^{i(\alpha-\beta)} = \frac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}}$$
$$(e^{i\alpha})^n = e^{in\alpha} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

## Théorème 2.8 — Notation exponentielle

Soit  $z \in \mathbb{C}^*$ . Il existe un couple  $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$  tel que

$$z = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$$

## Propriété 2.9 — Cas d'égalité

Soit  $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ , de notations exponentielles  $z = \rho e^{i\alpha}$  et  $z' = \rho' e^{i\beta}$

$$z = z' \iff \rho = \rho' \quad \text{et} \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \alpha = \beta + 2k\pi$$



## Définition 2.10 — Argument d'un nombre complexe

Soit  $z \in \mathbb{C}^*$ ,  $r \in \mathbb{R}_+^*$  et  $\theta \in \mathbb{R}$  tels que  $z = re^{i\theta}$ .

Tout nombre réel  $\theta$  vérifiant la relation précédente est **un argument** de  $z$ .

## Propriété 2.11

Soit  $z \in \mathbb{C}$ ,  $\theta$  et  $\theta'$  deux arguments de  $z$ . Alors

$$\exists k \in \mathbb{Z}, \quad \theta' = \theta + 2k\pi$$

## Propriété 2.12 — Propriété de l'argument

Soit  $(z, z') \in (\mathbb{C}^*)^2$ .

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \quad [2\pi]$
- $\arg(az) = \arg(z) \quad [2\pi] \quad \text{si } a \in \mathbb{R}_+^*$
- $\arg(az) = \pi + \arg(z) \quad [2\pi] \quad \text{si } a \in \mathbb{R}_-^*$
- $\arg(z^n) = n \arg(z) \quad [2\pi]$
- $\arg(1/z) = -\arg(z) \quad [2\pi]$
- $\arg(z/z') = \arg(z) - \arg(z') \quad [2\pi]$
- $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) \quad [2\pi]$

## Définition 2.13 — Exponentielle d'un nombre complexe

Soit  $z \in \mathbb{C}$ . On note  $z = x + iy$  avec  $(x, y) \in \mathbb{R}$ .

On définit l'exponentielle de  $z$  par

$$\exp(z) \stackrel{\text{déf.}}{=} \exp(x) e^{iy} = e^x (\cos(y) + i \sin(y))$$

## Propriété 2.14

Soit  $z$  et  $z'$  deux complexes. On a

$$\exp(z + z') = \exp(z) \exp(z')$$

## Proposition 2.15 — Formules d'Euler

Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ ,

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

## Proposition 2.16 — Formules de Moivre

Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . On a

$$e^{in\theta} = (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

ou de manière équivalente

$$\cos(n\theta) = \operatorname{Re} \left[ (\cos \theta + i \sin \theta)^n \right]$$

$$\sin(n\theta) = \operatorname{Im} \left[ (\cos \theta + i \sin \theta)^n \right]$$