Vecteurs aléatoires

BCPST I — 27 février 2017

Notations du chapitre —

Dans tout ce chapitre, $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ est un espace probabilisé.

I — Couple de variables aléatoires, lois

Définition 1.1 — Couple de variables aléatoires

On appelle couple de variables aléatoires réelles la donnée de deux variables aléatoires X et Y sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, P)$.

On parle aussi de vecteur aléatoire réel, noté (X, Y).

Remarque I.0

- Si (X, Y) est un vecteur aléatoire et si $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, alors $g(X, Y)$ est une variable aléatoire ;
- comme d'habitude, nous nous limiterons aux espaces probabilisés finis.

Exemple Considérons l'expérience « on lance deux dés à 6 faces honnêtes, de couleurs différentes ».

On peut définir plusieurs couples de variables aléatoires, comme X « la somme des résultats obtenus » et Y, « le plus grand des résultats obtenus ».

On peut définir d'autres couples de variables aléatoires, comme par exemple X_1 le résultat du lancer du premier dé, X_2 le résultat de l'autre dé.

On peut aussi étudier des vecteurs aléatoires tels que (X_1, X_2, Y) (à plus de 2 composantes, donc).

Définition 1.2 — Loi conjointe, lois marginales

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire. On note

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \qquad \text{et} \qquad Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}.$$

- *On appelle loi conjointe de X et de Y la famille de réels*

$$\forall i \in [\![1\,;n]\!],\ \ \forall j \in [\![1\,;m]\!], \qquad p_{ij} = P\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big)$$

- *On appelle loi marginale de X la loi de la variable aléatoire (et de même « loi marginale de Y »).*

Propriété 1.3 — Lien entre loi conjointe et loi marginale

D'après la formule des probabilités totales sur le système complet d'évènements $(Y = y_j)_{1 \leqslant j \leqslant m}$

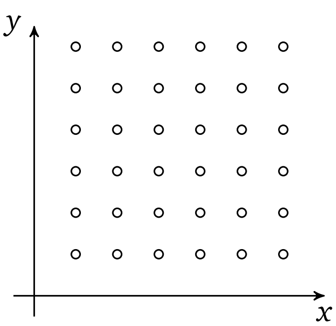
$$\boxed{\forall i \in [\![1\,;n]\!], \qquad q_i = P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} P(X = x_i \cap Y = y_j)}$$

De même pour la loi marginale suivant Y

$$\boxed{\forall j \in [\![1\,;m]\!], \qquad r_j = P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i \cap Y = y_j)}$$

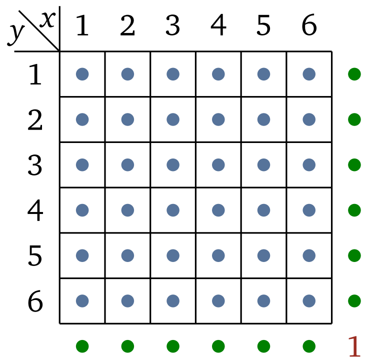
Concrètement, on peut représenter la loi conjointe de (X, Y) dans un tableau à deux entrées. L'ensemble des valeurs considérées est ici $X(\Omega) \times Y(\Omega)$. Comme cela arrive souvent avec des fonctions, cet ensemble est un ensemble d'arrivée possible. Mais ce n'est pas forcément l'ensemble des valeurs prises par le couple.

Exemple Lancer de deux dés



$y \backslash x$	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

FIGURE I.1 — *Deux représentations de* $\Omega_{X,Y}$.



Loi conjointe , lois marginales et somme des coefficients.

FIGURE I.2 — *Lois*

Propriété 1.4 — Somme des coefficients

Avec les notations précédentes

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = \sum_{i=1}^{n} q_i = \sum_{j=1}^{m} r_j = 1$$

II — Loi conditionnelle, indépendance de deux variables aléatoires

Définition 2.1 — Lois conditionnées

Soit (X,Y) *un vecteur aléatoire et* $x \in X(\Omega)$ *tel que* $P(X=x) \neq 0$.

On appelle loi de Y *conditionnée par l'évènement* $(X=x)$ *la famille de réels*

$$\forall j \in [\![1\,;m]\!], \qquad P_{(X=x)}(Y=y_j) = \frac{P(Y=y_j \cap X=x)}{P(X=x)}$$

De même, on définit la loi de X *conditionnée par l'évènement* $(Y=y)$ *tel que* $P(Y=y) \neq 0$.

Exemple Reprendre l'exemple des dés.

Définition 2.2 — Couple de variables aléatoires indépendantes
On dit que deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si

$$\forall x \in X(\Omega), \quad \forall y \in Y(\Omega), \quad P(X = x \cap Y = y) = P(X = x) \times P(Y = y)$$

Comme toujours avec l'indépendance, c'est une propriété de calcul, ou un hypothèse du modèle.

Propriété 2.3 — *Si deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes alors les lois de X conditionnées aux évènements $(Y = y)$ sont identiques à la loi de X (et de même pour Y).*

Propriété 2.4 — Fonctions de deux variables aléatoires indépendantes
Soit X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Alors les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

III — Fonction de deux variables aléatoires

III.1 — Loi

Propriété 3.1 — *Soit (X, Y) un vecteur aléatoire, g une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $Z = g(X, Y)$. On note*

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \qquad \text{et} \qquad Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$$

Le support de Z est alors

$$Z(\Omega) = \left\{g(x_i, y_j) \;\; ; \;\; i \in [\![1 ; n]\!], j \in [\![1 ; m]\!]\right\}.$$

et la loi de Z est donnée par la formule

$$\forall z \in Z(\Omega), \qquad P(Z=z) = \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ y\in Y(\Omega)\\ g(x,y)=z}} P(X=x \cap Y=y)$$

Si X et Y sont indépendantes, on a plus simplement

$$\forall z \in Z(\Omega), \quad P(Z=z) = \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ y\in Y(\Omega)\\ g(x,y)=z}} P(X=x)\,P(Y=y)$$

Application — Sommes de deux variables aléatoires

Dans un cas particulier utile, la formule donnant la loi de Z se simplifie : supposons que

$$X(\Omega) = [\![0 ; n]\!] \qquad \text{et} \qquad Y(\Omega) = [\![0 ; m]\!]$$

alors la loi de $Z = X + Y$ est

$$Z(\Omega) = [\![0 ; n+m]\!], \qquad \forall k \in [\![0 ; n+m]\!],$$

$$\boxed{P(Z=k) = \sum_{k=0}^{n+m} P(X=i \cap Y=k-i)}$$

Exemple

- Somme de deux variables indépendantes suivant une loi uniforme. (en exercice)
- Somme de deux variables indépendantes suivant une loi binomiale de paramètres n et p et m et p.

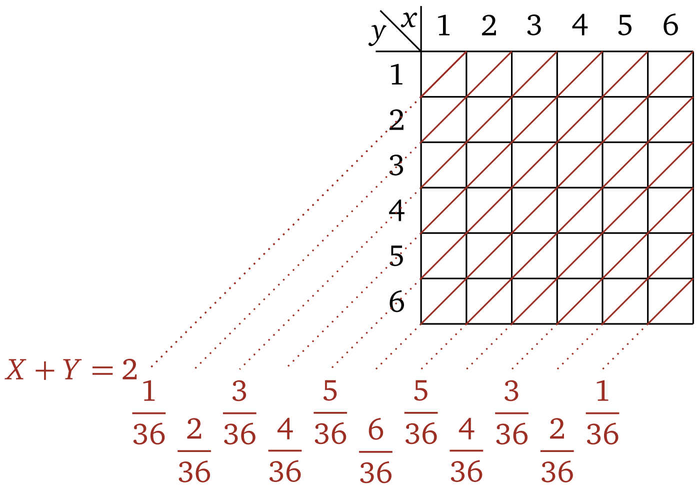


FIGURE I.3 — *Loi de la somme de deux v.a.r.*

III.2 — Espérance

Il est plus simple d'obtenir directement l'espérance de Z grâce à la

Théorème 3.2 — Formule de transfert

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire, g une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et $Z = g(X, Y)$.

$$E(Z) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} g(x_i, y_j)\, P(X = x_i \cap Y = y_j)$$

Exemple Calculer directement l'espérance de $\sup(X_1, X_2)$.

Théorème 3.3 — Linéarité de l'espérance

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
- $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$

Dém. La première par la formule de transfert. La seconde est une conséquence de la première. □

Proposition 3.4 — *Soit (X, Y) un vecteur aléatoire.*

Si X et Y sont indépendantes, alors $E(XY) = E(X) \times E(Y)$.

Dém. Par la formule de transfert. □

IV — Covariance, coefficient de corrélation linéaire

IV.1 — Covariance

Définition 4.1 — Covariance de deux variables aléatoires

Soit X et Y deux variables aléatoires.

On appelle covariance de X et Y le réel

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X,Y) &= E\Big[\big(X-E(X)\big)\times\big(Y-E(Y)\big)\Big]\\ &= E(XY)-E(X)\,E(Y)\end{aligned}$$

Théorème 4.2 — Covariance de deux variables aléatoires indépendantes

Si X et Y sont deux variables indépendantes, alors leur covariance est nulle.

Dém. Découle immédiatement de la proposition 3.4. □

Attention ! La réciproque est fausse !

Par exemple, soit X de loi ci-dessous et $Y=X^2$

X	-1	0	1
$P(X=x)$	$1/4$	$1/2$	$1/4$

On trouve $E(X)=0$ et $E(XY)=E(X^3)=0$ donc $\operatorname{cov}(X,Y)=0$.

Mais $P(X=0\cap Y=1)=0\neq P(X=0)\,P(Y=1)$, donc ces variables ne sont pas indépendantes.

Propriété 4.3 — Propriétés de la covariance

Soit X, Y, X_1 et X_2 des variables aléatoires et $(a,b)\in\mathbb{R}^2$

- *Si* $\operatorname{cov}(X,X)=V(X)$
- $\operatorname{cov}(X,Y)=\operatorname{cov}(Y,X)$
- $\operatorname{cov}(aX,bY)=ab\operatorname{cov}(Y,X)$
- $\operatorname{cov}(X_1+X_2,Y)=\operatorname{cov}(X_1,Y)+\operatorname{cov}(X_2,Y)$

Propriété 4.4 — Propriétés de la covariance

Soit X et Y deux variables aléatoires et $(a,b)\in\mathbb{R}^2$

- $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\operatorname{cov}(X,Y)$
- $V(X-Y) = V(X) + V(Y) - 2\operatorname{cov}(X,Y)$
- $\operatorname{cov}(X,Y) = \dfrac{1}{4}(V(X+Y) - V(X-Y))$
- $V(aX+bY) = a^2V(X) + b^2V(Y) + 2ab\operatorname{cov}(X,Y)$

Dém. Par des calculs à partir des définitions. □

V — Généralisation au cas de *n* variables aléatoires

Définition 5.1 — Vecteur aléatoire

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n variables aléatoires.

On appelle vecteur aléatoire le n–uplet de variables aléatoires $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

V.1 — Espérance, variance, covariance

Par généralisation des résultats précédents, nous pouvons en déduire :

Théorème 5.2 — Linéarité de l'espérance

Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un vecteur aléatoire, et $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$:

$$E(a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n) = a_1E(X_1) + a_2E(X_2) + \cdots + a_nE(X_n)$$

V.2 — Indépendance

Définition 5.3 — Indépendance mutuelle de plusieurs variables aléatoires

On dit que les n variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes si et seulement si

$$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega),$$
$$P(X_1 = x_1 \cap X_2 = x_2 \cap \cdots \cap X_n = x_n)$$
$$= P(X_1 = x_1) \times P(X_2 = x_2) \times \cdots \times P(X_n = x_n)$$

Propriété 5.4 — *Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors toute sous-famille de $X_1, X_2, \ldots, X_n$ l'est aussi.*

L'indépendance mutuelle entraîne donc l'indépendance deux à deux, mais la réciproque est fausse.

Propriété 5.5 —

Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n variables aléatoires mutuellement indépendantes, soit p in $[\![1\ ;\ n]\!]$ et $f\ :\ \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$, $g\ :\ \mathbb{R}^{n-p} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Les variables aléatoires $f(X_1, X_2, \cdots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \cdots X_n)$ sont indépendantes.

Propriété 5.6 —

Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n variables aléatoires mutuellement indépendantes, soit u_1, u_2, ..., u_n des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Les variables aléatoires $u_1(X_1)$, $u_2(X_2)$, ... $u_n(X_n)$ sont mutuellement indépendantes.

Théorème 5.7 — Variance de la somme de variables aléatoires mutuellement indépendantes

Si les n variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors

$$V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)$$

Application I.0 Loi de la somme de n variables de Bernoulli indépendante et de même loi $\mathscr{B}(1, p)$.