

VECTEURS ALÉATOIRES

BCPST I, 27/03/2018

Notations du chapitre — Dans tout ce chapitre, (Ω, \mathcal{F}, P) est un espace probabilisé.

I — Couple de variables aléatoires, lois

Définition 1.1 — Couple de variables aléatoires

On appelle *couple de variables aléatoires réelles* la donnée de deux variables aléatoires X et Y sur le même espace probabilisé (Ω, \mathcal{F}, P) .

On parle aussi de *vecteur aléatoire réel*, noté (X, Y) .

Remarque I.1

- Si (X, Y) est un vecteur aléatoire et si $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, alors $g(X, Y)$ est une variable aléatoire;
- comme d’habitude, nous nous limiterons aux espaces probabilisés finis.

Exemple Considérons l’expérience « on lance deux dés à 6 faces honnêtes, de couleurs différentes ».

On peut définir plusieurs couples de variables aléatoires, comme X « la somme des résultats obtenus » et Y , « le plus grand des résultats obtenus ».

On peut définir d’autres couples de variables aléatoires, comme par exemple X_1 le résultat du lancer du premier dé, X_2 le résultat de l’autre dé.

On peut aussi étudier des vecteurs aléatoires tels que (X_1, X_2, Y) (à plus de 2 composantes, donc).

Définition 1.3 — Loi conjointe, lois marginales

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire. On note

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad \text{et} \quad Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}.$$

- On appelle *loi conjointe* de X et de Y la famille de réels

$$\forall i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket, \quad \forall j \in \llbracket 1 ; m \rrbracket, \quad P((X = x_i) \cap (Y = y_j))$$

- On appelle *loi marginale* de X la loi de la variable aléatoire (et de même « loi marginale de Y »).

Propriété 1.4 — Lien entre loi conjointe et loi marginale

D'après la formule des probabilités totales sur le système complet d'évènements $(Y = y_j)_{1 \leq j \leq m}$

$$\forall i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket, \quad P(X = x_i) = \sum_{j=1}^m P(X = x_i \cap Y = y_j)$$

De même pour la loi marginale suivant Y

$$\forall j \in \llbracket 1 ; m \rrbracket, \quad P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^n P(X = x_i \cap Y = y_j)$$

Concrètement, on peut représenter la loi conjointe de (X, Y) dans un tableau à deux entrées. L'ensemble des valeurs considérées est ici $X(\Omega) \times Y(\Omega)$. Comme cela arrive souvent avec des fonctions, cet ensemble est un ensemble d'arrivée possible. Mais ce n'est pas forcément l'ensemble des valeurs prises par le couple.

Exemple A Lancer de deux dés

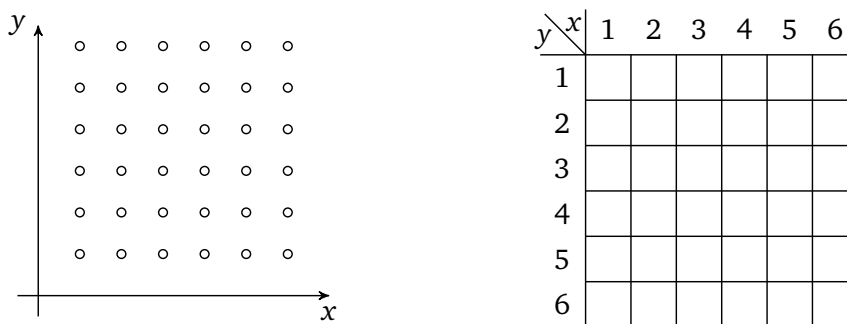
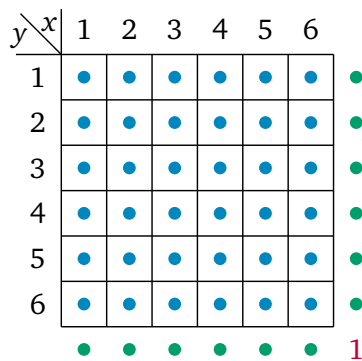


FIGURE I.1 — Deux représentations de $\Omega_{X,Y}$.



Loi conjointe , lois marginales et somme des coefficients.

FIGURE I.2 — Lois

Propriété 1.5 — Somme des coefficients

Avec les notations précédentes

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = \sum_{i=1}^n P(X = x_i) = \sum_{j=1}^m P(Y = y_j) = 1$$

II — Loi conditionnelle, indépendance de deux variables aléatoires

Définition 2.1 — Loïs conditionnées

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire et $x \in X(\Omega)$ tel que $P(X = x) \neq 0$. On appelle *loi de Y conditionnée par l'évènement $(X = x)$* la famille de réels

$$\forall j \in \llbracket 1 ; m \rrbracket, \quad P_{(X=x)}(Y = y_j) = \frac{P((X = x) \cap (Y = y_j))}{P(X = x)}$$

De même, on définit la *loi de X conditionnée par l'évènement $(Y = y)$* tel que $P(Y = y) \neq 0$.

Exemple B Reprendre l'exemple des dés.

Définition 2.2 — Couple de variables aléatoires indépendantes

On dit que deux variables aléatoires X et Y sont *indépendantes* si et seulement si

$$\forall x \in X(\Omega), \quad \forall y \in Y(\Omega), \quad P(X = x \cap Y = y) = P(X = x) \times P(Y = y)$$

Comme toujours avec l'indépendance, c'est une propriété de calcul, ou un hypothèse du modèle.

Propriété 2.3 — Si deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes alors les lois de X conditionnées aux évènements $(Y = y)$ sont identiques à la loi de X (et de même pour Y).

Propriété 2.4 — Fonctions de deux variables aléatoires indépendantes

Soit X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et f et g deux fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Alors les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

III — Fonction de deux variables aléatoires

III.1 — Loi

Propriété 3.1 — Soit (X, Y) un vecteur aléatoire, g une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et $Z = g(X, Y)$. On note

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad \text{et} \quad Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$$

Le support de Z est alors

$$Z(\Omega) = \{g(x_i, y_j) ; i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket, j \in \llbracket 1 ; m \rrbracket\}.$$

et la loi de Z est donnée par la formule

$$\forall z \in Z(\Omega), \quad P(Z = z) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega) \\ g(x, y) = z}} P(X = x \cap Y = y)$$

Si X et Y sont indépendantes, on a plus simplement

$$\forall z \in Z(\Omega), \quad P(Z = z) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega) \\ g(x, y) = z}} P(X = x) P(Y = y)$$

Application — Sommes de deux variables aléatoires

Dans un cas particulier utile, la formule donnant la loi de Z se simplifie : supposons que

$$X(\Omega) = \llbracket 0 ; n \rrbracket \quad \text{et} \quad Y(\Omega) = \llbracket 0 ; m \rrbracket$$

alors la loi de $Z = X + Y$ est

$$Z(\Omega) = \llbracket 0 ; n + m \rrbracket, \quad \forall k \in \llbracket 0 ; n + m \rrbracket,$$

$$P(Z = k) = \sum_{i=0}^{n+m} P(X = i \cap Y = k - i)$$

Exemple

- Somme de deux variables indépendantes suivant une loi uniforme. (en exercice)
- Somme de deux variables indépendantes suivant une loi binomiale de paramètres n et p et m et p .

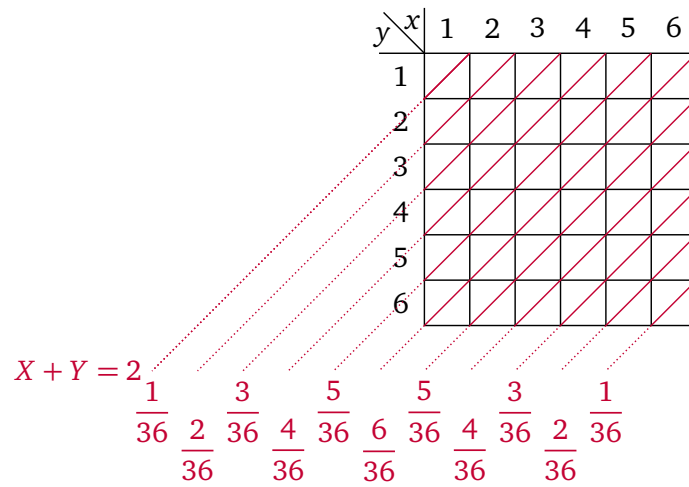


FIGURE I.3 — Loi de la somme de deux lois uniformes

III.2 — Espérance – Formule de transfert

Il est plus simple d’obtenir directement l’espérance de Z grâce à la

Théorème 3.4 — Formule de transfert
 Soit (X, Y) un vecteur aléatoire, g une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} et $Z = g(X, Y)$.

$$E(Z) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m g(x_i, y_j) P(X = x_i \cap Y = y_j)$$

Exemple Calculer directement l’espérance de $\sup(X_1, X_2)$.

Théorème 3.6 — Linéarité de l’espérance
 Soit (X, Y) un vecteur aléatoire et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y) \tag{I.1}$$

DÉM. La première par la formule de transfert. La seconde est une conséquence de la première. □

Proposition 3.7 — Soit (X, Y) un vecteur aléatoire.
 Si X et Y sont indépendantes, alors $E(XY) = E(X) \times E(Y)$.

DÉM. Par la formule de transfert. □

IV — Covariance, coefficient de corrélation linéaire

IV.1 — Covariance

Définition 4.1 — Covariance de deux variables aléatoires

Soit X et Y deux variables aléatoires.

On appelle *covariance* de X et Y le réel

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, Y) &= E\left[(X - E(X)) \times (Y - E(Y))\right] \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) \end{aligned}$$

Théorème 4.2 — Covariance de deux variables aléatoires indépendantes

Si X et Y sont deux variables indépendantes, alors leur covariance est nulle.

DÉM. Découle immédiatement de la proposition 3.7. □

Attention ! La réciproque est fautive !

Par exemple, soit X de loi ci-dessous et $Y = X^2$

X	-1	0	1
$P(X = x)$	$1/4$	$1/2$	$1/4$

On trouve $E(X) = 0$ et $E(XY) = E(X^3) = 0$ donc $\text{cov}(X, Y) = 0$.

Mais $P(X = 0 \cap Y = 1) = 0 \neq P(X = 0)P(Y = 1)$, donc ces variables ne sont pas indépendantes.

Propriété 4.3 — Propriétés de la covariance

Soit X, Y, X_1 et X_2 des variables aléatoires et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

- $\text{cov}(X, X) = V(X)$
- $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X)$
- $\text{cov}(aX, bY) = ab \text{cov}(Y, X)$
- $\text{cov}(X_1 + X_2, Y) = \text{cov}(X_1, Y) + \text{cov}(X_2, Y)$

Propriété 4.4 — Propriétés de la Variance

Soit X et Y deux variables aléatoires et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

- $V(aX + bY) = a^2V(X) + b^2V(Y) + 2ab \operatorname{cov}(X, Y)$
- $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 \operatorname{cov}(X, Y)$
- $V(X - Y) = V(X) + V(Y) - 2 \operatorname{cov}(X, Y)$
- $\operatorname{cov}(X, Y) = \frac{1}{4} (V(X + Y) - V(X - Y))$

DÉM. Par des calculs à partir des définitions. □

V — Généralisation au cas de n variables aléatoires

Définition 5.1 — Vecteur aléatoire — n variables

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, \dots, X_n n variables aléatoires.

On appelle **vecteur aléatoire** le n -uplet de variables aléatoires (X_1, X_2, \dots, X_n) .

V.1 — Espérance, variance, covariance

Par généralisation des résultats précédents, nous pouvons en déduire :

Théorème 5.2 — Linéarité de l'espérance — n variables

Soit (X_1, X_2, \dots, X_n) un vecteur aléatoire, et $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$:

$$E(a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n) = a_1E(X_1) + a_2E(X_2) + \dots + a_nE(X_n)$$

V.2 — Indépendance

Définition 5.3 — Indépendance mutuelle de plusieurs variables aléatoires

On dit que les n variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n sont **mutuellement indépendantes** si et seulement si

$$\begin{aligned} \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega), \\ P(X_1 = x_1 \cap X_2 = x_2 \cap \dots \cap X_n = x_n) \\ = P(X_1 = x_1) \times P(X_2 = x_2) \times \dots \times P(X_n = x_n) \end{aligned}$$

Propriété 5.4 — Si X_1, X_2, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes, alors toute sous-famille de X_1, X_2, \dots, X_n l'est aussi.

L'indépendance mutuelle entraîne donc l'indépendance deux à deux, mais la réciproque est fautive.

Propriété 5.5 —

Soit X_1, X_2, \dots, X_n n variables aléatoires mutuellement indépendantes, soit $p \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$ et $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^{n-p} \rightarrow \mathbb{R}$.

Les variables aléatoires $f(X_1, X_2, \dots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

Propriété 5.6 —

Soit X_1, X_2, \dots, X_n n variables aléatoires mutuellement indépendantes, soit u_1, u_2, \dots, u_n des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Les variables aléatoires $u_1(X_1), u_2(X_2), \dots, u_n(X_n)$ sont mutuellement indépendantes.

Théorème 5.7 — Variance de la somme de variables aléatoires mutuellement indépendantes

Si les n variables X_1, X_2, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes, alors

$$V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n)$$

Application 1 Loi de la somme de n variables de Bernoulli indépendante et de même loi $\mathcal{B}(1, p)$.

