

# Vecteurs aléatoires

BCPST I — 24 octobre 2017

**Notations du chapitre** — Dans tout ce chapitre,  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  est un espace probabilisé.

## I — Couple de variables aléatoires, lois

### Définition 1.1 — Couple de variables aléatoires

On appelle *couple de variables aléatoires réelles* la donnée de deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

On parle aussi de *vecteur aléatoire réel*, noté  $(X, Y)$ .

### Remarque I.1

- Si  $(X, Y)$  est un vecteur aléatoire et si  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , alors  $g(X, Y)$  est une variable aléatoire ;
- comme d’habitude, nous nous limiterons aux espaces probabilisés finis.

**Exemple** Considérons l’expérience « on lance deux dés à 6 faces honnêtes, de couleurs différentes ».

On peut définir plusieurs couples de variables aléatoires, comme  $X$  « la somme des résultats obtenus » et  $Y$ , « le plus grand des résultats obtenus ».

On peut définir d’autres couples de variables aléatoires, comme par exemple  $X_1$  le résultat du lancer du premier dé,  $X_2$  le résultat de l’autre dé.

On peut aussi étudier des vecteurs aléatoires tels que  $(X_1, X_2, Y)$  (à plus de 2 composantes, donc).

### Définition 1.3 — Loi conjointe, lois marginales

Soit  $(X, Y)$  un vecteur aléatoire. On note

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad \text{et} \quad Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}.$$

- On appelle *loi conjointe* de  $X$  et de  $Y$  la famille de réels

$$\forall i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket, \quad \forall j \in \llbracket 1 ; m \rrbracket, \quad P((X = x_i) \cap (Y = y_j))$$

- On appelle *loi marginale* de  $X$  la loi de la variable aléatoire (et de même « loi marginale de  $Y$  »).

**Propriété 1.4 — Lien entre loi conjointe et loi marginale**

D'après la formule des probabilités totales sur le système complet d'évènements  $(Y = y_j)_{1 \leq j \leq m}$

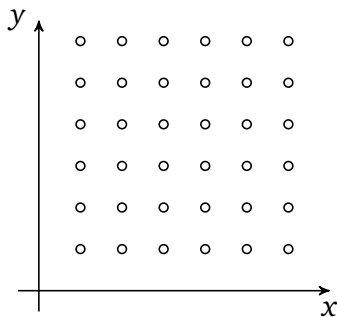
$$\forall i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket, \quad P(X = x_i) = \sum_{j=1}^m P(X = x_i \cap Y = y_j)$$

De même pour la loi marginale suivant  $Y$

$$\forall j \in \llbracket 1 ; m \rrbracket, \quad P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^n P(X = x_i \cap Y = y_j)$$

Concrètement, on peut représenter la loi conjointe de  $(X, Y)$  dans un tableau à deux entrées. L'ensemble des valeurs considérées est ici  $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ . Comme cela arrive souvent avec des fonctions, cet ensemble est un ensemble d'arrivée possible. Mais ce n'est pas forcément l'ensemble des valeurs prises par le couple.

**Exemple A** Lancer de deux dés



$y \backslash x$	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

FIGURE I.1 — Deux représentations de  $\Omega_{X,Y}$ .

$y \backslash x$	1	2	3	4	5	6	
1	•	•	•	•	•	•	•
2	•	•	•	•	•	•	•
3	•	•	•	•	•	•	•
4	•	•	•	•	•	•	•
5	•	•	•	•	•	•	•
6	•	•	•	•	•	•	•
	•	•	•	•	•	•	1

Loi conjointe, lois marginales et somme des coefficients.

FIGURE I.2 — Lois

**Propriété 1.5 — Somme des coefficients**

Avec les notations précédentes

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = \sum_{i=1}^n P(X = x_i) = \sum_{j=1}^m P(Y = y_j) = 1$$

## II — Loi conditionnelle, indépendance de deux variables aléatoires

**Définition 2.1 — Lois conditionnées**

Soit  $(X, Y)$  un vecteur aléatoire et  $x \in X(\Omega)$  tel que  $P(X = x) \neq 0$ . On appelle *loi de Y conditionnée par l'évènement  $(X = x)$*  la famille de réels

$$\forall j \in \llbracket 1 ; m \rrbracket, \quad P_{(X=x)}(Y = y_j) = \frac{P((X = x) \cap (Y = y_j))}{P(X = x)}$$

De même, on définit la *loi de X conditionnée par l'évènement  $(Y = y)$*  tel que  $P(Y = y) \neq 0$ .

| **Exemple B** Reprendre l'exemple des dés.

**Définition 2.2 — Couple de variables aléatoires indépendantes**

On dit que deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont *indépendantes* si et seulement si

$$\forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega), \quad P(X = x \cap Y = y) = P(X = x) \times P(Y = y)$$

Comme toujours avec l'indépendance, c'est une propriété de calcul, ou une hypothèse du modèle.

**Propriété 2.3** — Si deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont indépendantes alors les lois de  $X$  conditionnées aux événements  $(Y = y)$  sont identiques à la loi de  $X$  (et de même pour  $Y$ ).

**Propriété 2.4** — Fonctions de deux variables aléatoires indépendantes

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes et  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

Alors les variables aléatoires  $f(X)$  et  $g(Y)$  sont indépendantes.

## III — Fonction de deux variables aléatoires

### III.1 — Loi

**Propriété 3.1** — Soit  $(X, Y)$  un vecteur aléatoire,  $g$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et  $Z = g(X, Y)$ . On note

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad \text{et} \quad Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$$

Le support de  $Z$  est alors

$$Z(\Omega) = \{g(x_i, y_j) ; i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket, j \in \llbracket 1 ; m \rrbracket\}.$$

et la loi de  $Z$  est donnée par la formule

$$\forall z \in Z(\Omega), \quad P(Z = z) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega) \\ g(x,y)=z}} P(X = x \cap Y = y)$$

Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, on a plus simplement

$$\forall z \in Z(\Omega), \quad P(Z = z) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega) \\ g(x,y)=z}} P(X = x) P(Y = y)$$

**Application — Sommes de deux variables aléatoires**

Dans un cas particulier utile, la formule donnant la loi de  $Z$  se simplifie : supposons que

$$X(\Omega) = \llbracket 0 ; n \rrbracket \quad \text{et} \quad Y(\Omega) = \llbracket 0 ; m \rrbracket$$

alors la loi de  $Z = X + Y$  est

$$Z(\Omega) = \llbracket 0 ; n + m \rrbracket, \quad \forall k \in \llbracket 0 ; n + m \rrbracket,$$

$$P(Z = k) = \sum_{i=0}^{n+m} P(X = i \cap Y = k - i)$$

**Exemple**

- Somme de deux variables indépendantes suivant une loi uniforme. (en exercice)
- Somme de deux variables indépendantes suivant une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$  et  $m$  et  $p$ .

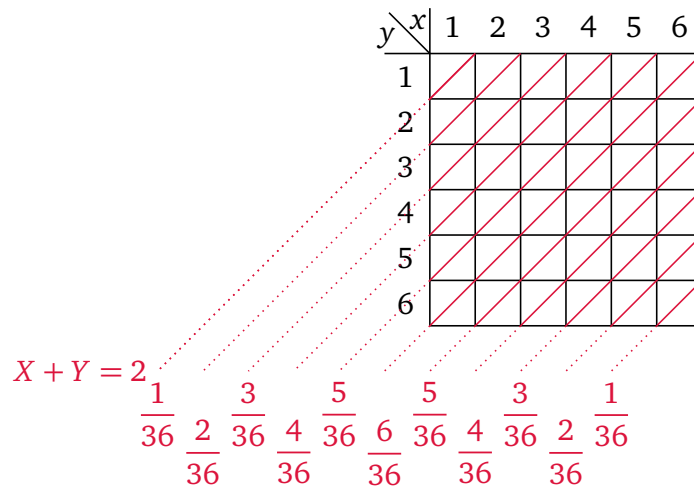


FIGURE I.3 — Loi de la somme de deux lois uniformes

### III.2 — Espérance – Formule de transfert

Il est plus simple d'obtenir directement l'espérance de  $Z$  grâce à la

#### Théorème 3.4 — Formule de transfert

Soit  $(X, Y)$  un vecteur aléatoire,  $g$  une fonction de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  et  $Z = g(X, Y)$ .

$$E(Z) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m g(x_i, y_j) P(X = x_i \cap Y = y_j)$$

**Exemple** Calculer directement l'espérance de  $\sup(X_1, X_2)$ .

#### Théorème 3.6 — Linéarité de l'espérance

Soit  $(X, Y)$  un vecteur aléatoire et  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y) \quad (\text{I.1})$$

**Dém.** La première par la formule de transfert. La seconde est une conséquence de la première.  $\square$

**Proposition 3.7** — Soit  $(X, Y)$  un vecteur aléatoire.

Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors  $E(XY) = E(X) \times E(Y)$ .

**Dém.** Par la formule de transfert.  $\square$

## IV — Covariance, coefficient de corrélation linéaire

### IV.1 — Covariance

#### Définition 4.1 — Covariance de deux variables aléatoires

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires.

On appelle *covariance* de  $X$  et  $Y$  le réel

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, Y) &= E\left[(X - E(X)) \times (Y - E(Y))\right] \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) \end{aligned}$$

**Théorème 4.2 — Covariance de deux variables aléatoires indépendantes**

Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables indépendantes, alors leur covariance est nulle.

**Dém.** Découle immédiatement de la proposition ??.

□

**Attention !** La réciproque est fausse !

Par exemple, soit  $X$  de loi ci-dessous et  $Y = X^2$

$X$	$-1$	$0$	$1$
$P(X = x)$	$1/4$	$1/2$	$1/4$

On trouve  $E(X) = 0$  et  $E(XY) = E(X^3) = 0$  donc  $\text{cov}(X, Y) = 0$ .

Mais  $P(X = 0 \cap Y = 1) = 0 \neq P(X = 0)P(Y = 1)$ , donc ces variables ne sont pas indépendantes.

**Propriété 4.3 — Propriétés de la covariance**

Soit  $X, Y, X_1$  et  $X_2$  des variables aléatoires et  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

- $\text{cov}(X, X) = V(X)$
- $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X)$
- $\text{cov}(aX, bY) = ab \text{cov}(Y, X)$
- $\text{cov}(X_1 + X_2, Y) = \text{cov}(X_1, Y) + \text{cov}(X_2, Y)$

**Propriété 4.4 — Propriétés de la Variance**

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires et  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

- $V(aX + bY) = a^2V(X) + b^2V(Y) + 2ab \text{cov}(X, Y)$
- $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 \text{cov}(X, Y)$
- $V(X - Y) = V(X) + V(Y) - 2 \text{cov}(X, Y)$
- $\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{4}(V(X + Y) - V(X - Y))$

**Dém.** Par des calculs à partir des définitions.

□

## V — Généralisation au cas de $n$ variables aléatoires

### Définition 5.1 — Vecteur aléatoire — $n$ variables

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $X_1, X_2, \dots, X_n$   $n$  variables aléatoires.

On appelle *vecteur aléatoire* le  $n$ -uplet de variables aléatoires  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ .

### V.1 — Espérance, variance, covariance

Par généralisation des résultats précédents, nous pouvons en déduire :

#### Théorème 5.2 — Linéarité de l'espérance — $n$ variables

Soit  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  un vecteur aléatoire, et  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$  :

$$E(a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n) = a_1E(X_1) + a_2E(X_2) + \dots + a_nE(X_n)$$

### V.2 — Indépendance

#### Définition 5.3 — Indépendance mutuelle de plusieurs variables aléatoires

On dit que les  $n$  variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont *mutuellement indépendantes* si et seulement si

$$\begin{aligned} \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega), \\ P(X_1 = x_1 \cap X_2 = x_2 \cap \dots \cap X_n = x_n) \\ = P(X_1 = x_1) \times P(X_2 = x_2) \times \dots \times P(X_n = x_n) \end{aligned}$$

**Propriété 5.4** — Si  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont mutuellement indépendantes, alors toute sous-famille de  $X_1, X_2, \dots, X_n$  l'est aussi.

L'indépendance mutuelle entraîne donc l'indépendance deux à deux, mais la réciproque est fautive.

**Propriété 5.5** —



Soit  $X_1, X_2, \dots, X_n$   $n$  variables aléatoires mutuellement indépendantes, soit  $p \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$  et  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : \mathbb{R}^{n-p} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Les variables aléatoires  $f(X_1, X_2, \dots, X_p)$  et  $g(X_{p+1}, \dots, X_n)$  sont indépendantes.

**Propriété 5.6 —**

Soit  $X_1, X_2, \dots, X_n$   $n$  variables aléatoires mutuellement indépendantes, soit  $u_1, u_2, \dots, u_n$  des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

Les variables aléatoires  $u_1(X_1), u_2(X_2), \dots, u_n(X_n)$  sont mutuellement indépendantes.

**Théorème 5.7 — Variance de la somme de variables aléatoires mutuellement indépendantes**

Si les  $n$  variables  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont mutuellement indépendantes, alors

$$V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n)$$

**Application 1** Loi de la somme de  $n$  variables de Bernoulli indépendante et de même loi  $\mathcal{B}(1, p)$ .