# Vecteurs aléatoires

Bcpst 1, 26/12/2017

Notations du chapitre — *Dans tout ce chapitre, $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ est un espace probabilisé.*

## I — Couple de variables aléatoires, lois

**Définition 1.1 — Couple de variables aléatoires**
*On appelle **couple de variables aléatoires réelles** la donnée de deux variables aléatoires $X$ et $Y$ sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, P)$.*
*On parle aussi de **vecteur aléatoire réel**, noté $(X, Y)$.*

Remarque I.1
- Si $(X, Y)$ est un vecteur aléatoire et si $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, alors $g(X, Y)$ est une variable aléatoire ;
- comme d'habitude, nous nous limiterons aux espaces probabilisés finis.

Exemple Considérons l'expérience « on lance deux dés à 6 faces honnêtes, de couleurs différentes ».
On peut définir plusieurs couples de variables aléatoires, comme $X$ « la somme des résultats obtenus » et $Y$, « le plus grand des résultats obtenus ».
On peut définir d'autres couples de variables aléatoires, comme par exemple $X_1$ le résultat du lancer du premier dé, $X_2$ le résultat de l'autre dé.
On peut aussi étudier des vecteurs aléatoires tels que $(X_1, X_2, Y)$ (à plus de 2 composantes, donc).

**Définition 1.3 — Loi conjointe, lois marginales**
*Soit $(X, Y)$ un vecteur aléatoire. On note*

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \qquad \textit{et} \qquad Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}.$$

- *On appelle **loi conjointe** de $X$ et de $Y$ la famille de réels*

$$\forall i \in [\![ 1\,; n ]\!], \ \forall j \in [\![ 1\,; m ]\!], \qquad P\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big)$$

- *On appelle* **loi marginale** *de $X$ la loi de la variable aléatoire (et de même « loi marginale de $Y$ »).*

PROPRIÉTÉ I.4 — LIEN ENTRE LOI CONJOINTE ET LOI MARGINALE

*D'après la formule des probabilités totales sur le système complet d'évènements $(Y = y_j)_{1\leqslant j\leqslant m}$*

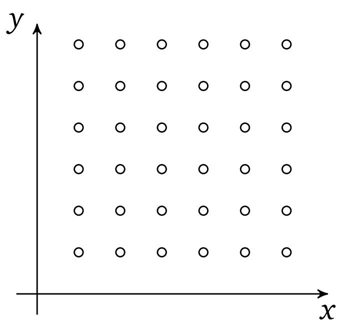
$$\forall i \in [\![ 1 ; n ]\!], \qquad P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} P(X = x_i \cap Y = y_j)$$

*De même pour la loi marginale suivant $Y$*

$$\forall j \in [\![ 1 ; m ]\!], \qquad P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i \cap Y = y_j)$$

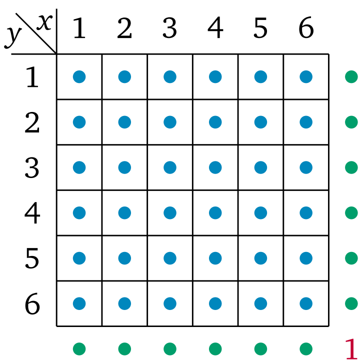
Concrètement, on peut représenter la loi conjointe de $(X, Y)$ dans un tableau à deux entrées. L'ensemble des valeurs considérées est ici $X(\Omega) \times Y(\Omega)$. Comme cela arrive souvent avec des fonctions, cet ensemble est un ensemble d'arrivée possible. Mais ce n'est pas forcément l'ensemble des valeurs prises par le couple.

EXEMPLE A Lancer de deux dés




| $y \backslash x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | |
| 2 | | | | | | |
| 3 | | | | | | |
| 4 | | | | | | |
| 5 | | | | | | |
| 6 | | | | | | |

FIGURE I.1 — *Deux représentations de $\Omega_{X,Y}$.*



Loi conjointe , lois marginales et somme des coefficients.

FIGURE I.2 — *Lois*

PROPRIÉTÉ I.5 — SOMME DES COEFFICIENTS
*Avec les notations précédentes*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} P(Y = y_j) = 1$$

## II — LOI CONDITIONNELLE, INDÉPENDANCE DE DEUX VARIABLES ALÉATOIRES

DÉFINITION 2.1 — LOIS CONDITIONNÉES
*Soit $(X, Y)$ un vecteur aléatoire et $x \in X(\Omega)$ tel que $P(X = x) \neq 0$. On appelle* ***loi de $Y$ conditionnée par l'évènement $(X = x)$*** *s la famille de réels*

$$\forall j \in [\![ 1 ; m ]\!], \quad P_{(X=x)}(Y = y_j) = \frac{P\big((X = x) \cap (Y = y_j)\big)}{P(X = x)}$$

*De même, on définit la* ***loi de $X$ conditionnée par l'évènement $(Y = y)$*** *tel que $P(Y = y) \neq 0$.*

EXEMPLE B Reprendre l'exemple des dés.

DÉFINITION 2.2 — COUPLE DE VARIABLES ALÉATOIRES INDÉPENDANTES
*On dit que deux variables aléatoires $X$ et $Y$ sont* ***indépendantes*** *si et seulement si*

$$\forall x \in X(\Omega), \ \forall y \in Y(\Omega), \quad P(X = x \cap Y = y) = P(X = x) \times P(Y = y)$$

Comme toujours avec l'indépendance, c'est une propriété de calcul, ou un hypothèse du modèle.

PROPRIÉTÉ 2.3 — *Si deux variables aléatoires $X$ et $Y$ sont indépendantes alors les lois de $X$ conditionnées aux évènements $(Y = y)$ sont identiques à la loi de $X$ (et de même pour $Y$).*

**Propriété 2.4 — Fonctions de deux variables aléatoires indépendantes**
*Soit $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires indépendantes et $f$ et $g$ deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*
*Alors les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.*

# III — Fonction de deux variables aléatoires

## III.1 — Loi

**Propriété 3.1** — *Soit $(X, Y)$ un vecteur aléatoire, $g$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $Z = g(X, Y)$. On note*

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \qquad \text{et} \qquad Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$$

*Le support de $Z$ est alors*

$$Z(\Omega) = \left\{g(x_i, y_j) \;\; ; \;\; i \in [\![ 1 ; n ]\!], j \in [\![ 1 ; m ]\!]\right\}.$$

*et la loi de $Z$ est donnée par la formule*

$$\forall z \in Z(\Omega), \qquad P(Z = z) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega) \\ g(x,y)=z}} P(X = x \cap Y = y)$$

*Si $X$ et $Y$ sont indépendantes, on a plus simplement*

$$\forall z \in Z(\Omega), \quad P(Z = z) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega) \\ g(x,y)=z}} P(X = x)\, P(Y = y)$$

**Application — Sommes de deux variables aléatoires**
Dans un cas particulier utile, la formule donnant la loi de $Z$ se simplifie : supposons que

$$X(\Omega) = [\![ 0 ; n ]\!] \qquad \text{et} \qquad Y(\Omega) = [\![ 0 ; m ]\!]$$

alors la loi de $Z = X + Y$ est

$$Z(\Omega) = [\![ 0 ; n+m ]\!], \qquad \forall k \in [\![ 0 ; n+m ]\!],$$

$$\boxed{P(Z = k) = \sum_{k=0}^{n+m} P(X = i \cap Y = k - i)}$$

Exemple
- Somme de deux variables indépendantes suivant une loi uniforme. (en exercice)
- Somme de deux variables indépendantes suivant une loi binomiale de paramètres $n$ et $p$ et $m$ et $p$.

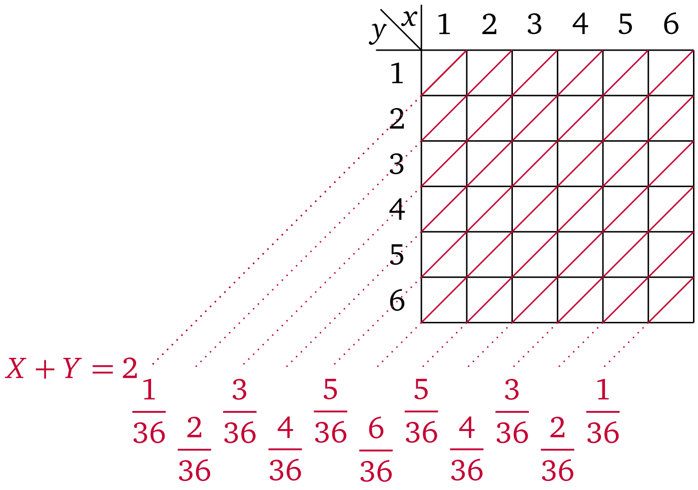



Figure I.3 — *Loi de la somme de deux lois uniformes*

### III.2 — Espérance – Formule de transfert

Il est plus simple d'obtenir directement l'espérance de $Z$ grâce à la

**Théorème 3.4 — Formule de transfert**
*Soit $(X, Y)$ un vecteur aléatoire, $g$ une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et $Z = g(X, Y)$.*

$$E(Z) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} g(x_i, y_j)\, P(X = x_i \cap Y = y_j)$$

Exemple Calculer directement l'espérance de $\sup(X_1, X_2)$.

**Théorème 3.6 — Linéarité de l'espérance**
*Soit $(X, Y)$ un vecteur aléatoire et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$*

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y) \tag{I.1}$$

Dém. La première par la formule de transfert. La seconde est une conséquence de la première. □

PROPOSITION 3.7 — *Soit $(X,Y)$ un vecteur aléatoire.*
*Si $X$ et $Y$ sont indépendantes, alors $E(XY) = E(X) \times E(Y)$.*

DÉM. Par la formule de transfert. □

# IV — COVARIANCE, COEFFICIENT DE CORRÉLATION LINÉAIRE

## IV.1 — COVARIANCE

DÉFINITION 4.1 — COVARIANCE DE DEUX VARIABLES ALÉATOIRES
*Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires.*
*On appelle* **covariance** *de $X$ et $Y$ le réel*

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X,Y) &= E\Big[\big(X - E(X)\big) \times \big(Y - E(Y)\big)\Big] \\ &= E(XY) - E(X)\,E(Y)\end{aligned}$$

THÉORÈME 4.2 — COVARIANCE DE DEUX VARIABLES ALÉATOIRES INDÉPENDANTES
*Si $X$ et $Y$ sont deux variables indépendantes, alors leur covariance est nulle.*

DÉM. Découle immédiatement de la proposition **??**. □

**Attention !** La réciproque est fausse !
Par exemple, soit $X$ de loi ci-dessous et $Y = X^2$

| $X$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $P(X = x)$ | $1/4$ | $1/2$ | $1/4$ |

On trouve $E(X) = 0$ et $E(XY) = E(X^3) = 0$ donc $\operatorname{cov}(X,Y) = 0$.
Mais $P(X = 0 \cap Y = 1) = 0 \neq P(X = 0)\,P(Y = 1)$, donc ces variables ne sont pas indépendantes.

PROPRIÉTÉ 4.3 — PROPRIÉTÉS DE LA COVARIANCE
*Soit $X$, $Y$, $X_1$ et $X_2$ des variables aléatoires et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$*

- $\operatorname{cov}(X,X) = V(X)$
- $\operatorname{cov}(X,Y) = \operatorname{cov}(Y,X)$
- $\operatorname{cov}(aX, bY) = ab\operatorname{cov}(Y,X)$

- $\text{cov}(X_1 + X_2, Y) = \text{cov}(X_1, Y) + \text{cov}(X_2, Y)$

PROPRIÉTÉ 4.4 — PROPRIÉTÉS DE LA VARIANCE
*Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$*

- $V(aX + bY) = a^2V(X) + b^2V(Y) + 2ab\,\text{cov}(X, Y)$
- $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\,\text{cov}(X, Y)$
- $V(X - Y) = V(X) + V(Y) - 2\,\text{cov}(X, Y)$
- $\text{cov}(X, Y) = \dfrac{1}{4}(V(X + Y) - V(X - Y))$

DÉM. Par des calculs à partir des définitions. □

## V — GÉNÉRALISATION AU CAS DE $n$ VARIABLES ALÉATOIRES

DÉFINITION 5.1 — VECTEUR ALÉATOIRE — $n$ VARIABLES
*Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, X_2, \dots, X_n$ n variables aléatoires.*
*On appelle **vecteur aléatoire** le n–uplet de variables aléatoires $(X_1, X_2, \dots, X_n)$.*

### V.1 — ESPÉRANCE, VARIANCE, COVARIANCE

Par généralisation des résultats précédents, nous pouvons en déduire :

THÉORÈME 5.2 — LINÉARITÉ DE L'ESPÉRANCE — $n$ VARIABLES
*Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire, et $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$ :*

$$E(a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n) = a_1E(X_1) + a_2E(X_2) + \cdots + a_nE(X_n)$$

### V.2 — INDÉPENDANCE

DÉFINITION 5.3 — INDÉPENDANCE MUTUELLE DE PLUSIEURS VARIABLES ALÉATOIRES
*On dit que les n variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont **mutuellement indépendantes** si et seulement si*

$$\begin{aligned}\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega),&\\ P(X_1 = x_1 \cap X_2 = x_2 \cap \cdots \cap X_n = x_n)&\\ = P(X_1 = x_1) \times P(X_2 = x_2) \times \cdots \times P(X_n = x_n)&\end{aligned}$$

**PROPRIÉTÉ 5.4** — *Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors toute sous-famille de $X_1, X_2, \ldots, X_n$ l'est aussi.*

L'indépendance mutuelle entraîne donc l'indépendance deux à deux, mais la réciproque est fausse.

**PROPRIÉTÉ 5.5** —
*Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n variables aléatoires mutuellement indépendantes, soit $p$ in $[\![ 1 ; n ]\!]$ et $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^{n-p} \longrightarrow \mathbb{R}$.*
*Les variables aléatoires $f(X_1, X_2, \cdots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \cdots X_n)$ sont indépendantes.*

**PROPRIÉTÉ 5.6** —
*Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n variables aléatoires mutuellement indépendantes, soit $u_1$, $u_2$, ..., $u_n$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*
*Les variables aléatoires $u_1(X_1)$, $u_2(X_2)$, ... $u_n(X_n)$ sont mutuellement indépendantes.*

**THÉORÈME 5.7** — **VARIANCE DE LA SOMME DE VARIABLES ALÉATOIRES MUTUELLEMENT INDÉPENDANTES**
*Si les n variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors*

$$V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)$$

APPLICATION I Loi de la somme de $n$ variables de Bernoulli indépendante et de même loi $\mathscr{B}(1, p)$.