Suites numériques

BCPST 1, 27/03/2018

I — Généralités

I.1 — Définition d'une suite

Définition 1.1 — Suite numérique
On appelle suite numérique toute fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

Notations Soit $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$. On parle de la suite u. On note usuellement la suite u par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et le réel $u(n)$ par u_n.
L'ensemble des suites numériques se note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Une suite peut-être définie à partir d'un certain rang, auquel cas on note $(u_n)_{n\geqslant N}$.
Une suite peut-être définie de plusieurs manières différentes :

1. explicitement : $u_n = f(n)$. Dans ce cas les propriétés de la fonction f fournissent les propriétés de u. On dit que $f(n)$ est le terme général de la suite. Ex. : $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$, etc.
2. par récurrence : u_n est définie en fonction des termes précédents. Exemple : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = qu_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_{n-1} + r$, etc. On parle de relation de récurrence liant u_{n+1} à u_n. Dans ce cas, il faut donner les premiers termes de la suite.
3. implicitement : u_n est défini par un propriété dépendant de n. Par exemple u_n est la plus petite valeur de x pour laquelle la fonction définie par $f(x) = x^n + nx + 1$ s'annule. Ou encore u_n est le périmètre de polygone régulier à 2^n cotés inscrit dans le cercle unité.

On aimerait plutôt avoir la forme 1. Dans certains cas la forme 2 permet d'avoir la forme 1. Avec la forme 3, il faut ferailler un peu plus. Il n'est pas du tout indispensable d'avoir la forme 1 pour pouvoir étudier une suite.

II — Suites et ordre

Définition 2.1 — Suite majorée, minorée, bornée
Soit u une suite numérique. La suite u est

1) *majorée si et seulement si* $\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant M;$
2) *minorée si et seulement si* $\exists m \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant m;$

3) bornée si et seulement si

$$\begin{aligned} & \exists (m,M)\in\mathbb{R}^2, \quad \forall n\in\mathbb{N}, \qquad m\leqslant u_n\leqslant M \\ \iff \quad & \exists M\in\mathbb{R}, \quad \forall n\in\mathbb{N}, \qquad |u_n|\leqslant M \end{aligned}$$

Notez que ses majorants et minorants ne dépendent pas de n.

Définition 2.2 — Monotonie d'une suite

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. La suite u est

1) croissante si et seulement si

$$\forall (n,m)\in\mathbb{N}^2, \qquad m\geqslant n \quad\Longrightarrow\quad u_m\geqslant u_n$$

2) strictement croissante si et seulement si

$$\forall (n,m)\in\mathbb{N}^2, \qquad m> n \quad\Longrightarrow\quad u_m> u_n$$

3) décroissante si et seulement si

$$\forall (n,m)\in\mathbb{N}^2, \qquad m\geqslant n \quad\Longrightarrow\quad u_m\leqslant u_n$$

4) strictement décroissante si et seulement si

$$\forall (n,m)\in\mathbb{N}^2, \qquad m> n \quad\Longrightarrow\quad u_m< u_n$$

Une suite est monotone si elle est soit croissante, soit décroissante.

Une suite peut également être croissante, décroissante, etc. à partir d'un certain rang (on remplace $\mathbb{N}$ par un ensemble de la forme $[\![N\,;\,+\infty [\![$ dans les définitions précédentes).

Propriété 2.3 — Caractérisation des suites croissantes

Soit $u\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. La suite u est croissante si et seulement si

$$\forall n\in\mathbb{N}, \qquad u_{n+1}\geqslant u_n$$

DÉM. Remarquer que cette propriété est propre aux suites (elle n'est pas valable pour les fonctions).
Sens direct : supposons u croissante

$$\forall (n,m)\in\mathbb{N}^2, \quad n\leqslant m \quad\Longrightarrow\quad u_n\leqslant u_m$$

Soit $n\in\mathbb{N}$. En appliquant le résultat précédent en n et $n+1$ on a bien la propriété.

Sens réciproque : supposons que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \geqslant u_n$$

Soit m et n deux entiers, tel que $m \geqslant n$. On peut supposer que $m > n$. Introduisons une somme télescopique

$$u_m - u_n = \sum_{k=n}^{m-1} u_{k+1} - u_k$$

La somme est bien définie, car $m-1 \geqslant n$. Par hypothèse, chaque terme de cette somme est positif. La somme l'est donc également, et donc $u_m \geqslant u_n$. □

Corollaire 2.4 — Caractérisation des suites décroissantes.
Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. La suite u est décroissante si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \geqslant u_{n+1}$$

DÉM. On applique le théorème précédent à la suite $-u$. □

Définition 2.5 — Suites constantes
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante si et seulement si

$$\exists a \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = a$$

Une suite constante à partir d'un certain rang est dite stationnaire.

Propriété 2.6 — *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante si et seulement si*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = u_n$$

Exemple A

- Les suites constantes $(a)_{n\in\mathbb{N}}$ sont les seules qui soient à la fois croissantes et décroissantes.
- La suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $(E(n/2))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante mais pas strictement croissante.
- Les suites $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $((-1)^n/n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne sont pas monotones.

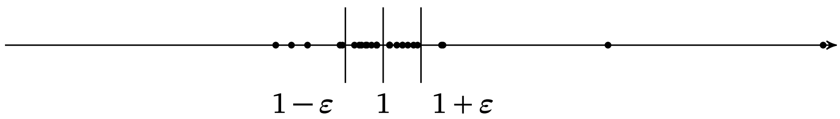
III — Suites convergentes

III.1 — Limite finie

Définition 3.1 — Convergence d'une suite
Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que u converge si il existe un réel ℓ tel que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \qquad n \in [\![N_\varepsilon \; ; +\infty [\![\quad \Longrightarrow \quad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Pour comprendre cette définition, il faut garder à l'esprit que $|a-b|$ peut s'interpréter comme la distance entre les deux réels a et b.
Que signifie intuitivement « u_n tend vers ℓ » ? Représentons par exemple une suite convergent vers 1



Dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ s'interprète par « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi proche que l'on veut de ℓ à partir d'un certain rang ». Cette proximité est mesurée par ε, et le rang associé est N_ε.
Ces définitions restent d'ailleurs pertinentes pour des suites définies à partir d'un certain rang. En fait la notion de convergence est asymptotique : en modifiant quelques termes de u, on ne modifie pas son caractère de convergence.

Exemple B
- la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 ;
- une suite constante qui converge vers 0 est une suite nulle.

Théorème 3.2 — Unicité de la limite
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente. Alors il existe une unique réel ℓ telle que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. On l'appelle limite *de u et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou encore $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.*

DÉM. Soit ℓ et ℓ' deux réels tels que

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \qquad n \geqslant N_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon \\ &\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N'_\varepsilon \in \mathbb{N}, \qquad n \geqslant N_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \left|u_n - \ell'\right| \leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

On va voir que la distance entre ℓ et ℓ' est aussi petite que l'on veut, ce qui signifie que $\ell = \ell'$.

Soit n quelconque plus grand que N_ε et N'_ε. D'après l'inégalité triangulaire

$$\left|\ell-\ell'\right| = \left|\ell-u_n-(\ell'-u_n)\right| \leqslant |\ell-u_n| - \left|\ell'-u_n\right| \leqslant 2\varepsilon$$

Si on résume

$$\forall\varepsilon>0, \qquad \left|\ell-\ell'\right| \leqslant 2\varepsilon$$

Montrons par l'absurde que $\ell=\ell'$. Si $\ell\neq\ell'$ alors en prenant $\varepsilon=\left|\ell-\ell'\right|/4>0$ dans la relation précédente, on aurait

$$\left|\ell-\ell'\right| \leqslant \left|\ell-\ell'\right|/2$$

ce qui est absurde. Ainsi $\ell-\ell'=0$. □

III.2 — Limite infinie

Définition 3.3 — Suite tendant vers $\pm\infty$

Soit $u\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

La suite u diverge vers $+\infty$ si et seulement si

$$\forall A\in\mathbb{R}, \quad \exists N_A\in\mathbb{N}, \qquad n\geqslant N_A \quad\Longrightarrow\quad u_n\geqslant A$$

La suite u diverge vers $-\infty$ ssi $-u$ diverge vers $+\infty$.

On note $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.

Exemple C La suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Remarque I.1

- Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ alors u n'est pas majorée, elle est minorée, et elle est strictement positive à partir d'un certain rang.
- Une suite de limite infinie n'est pas nécessairement croissante. Par exemple $n+(-1)^n$
- Une suite qui ne converge pas vers un réel est dite divergente. Elle peut alors tendre vers $+\infty$ ou $-\infty$ ou ne pas admettre de limite du tout.

III.3 — Suites extraites

Si la suite u converge vers ℓ, alors les suites $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Théorème 3.4 — Suites extraites

Soit u une suite numérique. Si les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une limite commune ℓ alors la suite u est convergente et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

DÉM. avec des ε. □

Exemple D la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas convergente et la suite $\left(\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas convergente.

IV — Convergence et ordre

IV.1 — Inégalités et convergence

Théorème 4.1 — *Soit u une suite convergente. Alors u est bornée.*

DÉM. Appliquons la définition de la limite avec $\varepsilon = 1$. On obtient

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N_1 \quad \Longrightarrow \quad |u_n - \ell| \leqslant 1$$

Donc la suite $(u_n)_{n\geqslant N_1}$ est bornée entre $\ell - 1$ et $\ell + 1$.
Comme la suite $(u_n)_{0\leqslant n\leqslant N_1}$ ne compte qu'un nombre fini de termes, elle est également bornée entre son minimum m et son maximum M. Ainsi, globalement, la suite u est bornée entre $\min(\ell-1, m)$ et $\max(\ell+1, M)$. □

Remarque I.2 La réciproque est fausse : la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée mais n'est pas convergente.

Propriété 4.2 — *Soit u une suite convergente, de limite* $\ell > 0$.
La suite u est strictement positive à partir d'un certain rang.

Propriété 4.3 — *Soit u une suite convergente, de limite* $\ell < 0$.
La suite u est strictement négative à partir d'un certain rang.

Théorème 4.4 — Passage à la limite dans une inégalité
Soit u une suite convergente de limite ℓ.
On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0$.
Alors $\ell \geqslant 0$.

Remarque I.3 L'inégalité stricte est devenue large. Par exemple $1/n > 0$ mais sa limite est nulle.

Corollaire 4.5 — *Soit u une suite convergente de limite ℓ. On suppose qu'il existe deux réels a et b tels que* $\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a < u_n < b.$
Alors $a \leqslant \ell \leqslant b$.

Corollaire 4.6 — *Si u et v sont deux suites convergentes de limites respectives ℓ et ℓ' et si* $\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n < v_n$.
Alors $\ell \leqslant \ell'$.

IV.2 — Théorème d'encadrement

La définition de la convergence est motivée presque entièrement par la possibilité d'utiliser le théorème d'encadrement suivant.

Théorème 4.7 — Théorème d'encadrement
Soit u, v et w trois suites telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$$

Si v et w sont convergentes et de même limite ℓ alors u est convergente de limite ℓ.

Dém. Traitons d'abord le cas où $\ell = 0$. Revenons à la définition de la limite

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \qquad & n \geqslant N_\varepsilon \implies |v_n - \ell| \leqslant \varepsilon \\ \exists N'_\varepsilon \in \mathbb{N}, \qquad & n \geqslant N_\varepsilon \implies |w_n - \ell| \leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

Prenons alors $\varepsilon > 0$, posons $N''_\varepsilon = \max(N_\varepsilon, N'_\varepsilon)$. Si $n > N''_\varepsilon$ on a

$$\ell - \varepsilon \leqslant v_n \qquad \text{et} \qquad w_n \leqslant \ell + \varepsilon$$

Donc en fait $$\ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon$$

Soit $$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N''_\varepsilon \in \mathbb{N}, \qquad n \geqslant N_\varepsilon \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$ □

Corollaire 4.8 — *Soit u et v deux suites réelles.*
Si v converge vers 0 et si $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant v_n$ alors u converge vers 0.

Dém. Si $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant v_n$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, \quad -v_n \leqslant u_n \leqslant v_n$ avec v et $-v$ de même limite 0. □

Exemple E Il est fréquent d'obtenir dans les exercices une inégalité de cette forme. Par exemple

$$\forall n \in N, \qquad |u_n - 1| \leqslant C \times \frac{1}{2^n}$$

On en déduit *directement* la convergence et la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui ici est 1.

Théorème 4.9 — Théorème de comparaison
Soit u et v deux suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \leqslant v_n$$

1) *Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, alors $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.*
2) *Si $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.*

DÉM. Démontrons la première proposition. Puisque $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ on a

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists N_A \in \mathbb{N}, \qquad n \geqslant N_A \quad \Longrightarrow \quad u_n \geqslant A$$

Mais puisque $u \leqslant v$, cela implique

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists N_A \in \mathbb{N}, \qquad n \geqslant N_A \quad \Longrightarrow \quad v_n \geqslant A$$

d'où $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
La seconde proposition s'obtient en appliquant la première à $-u$ et $-v$. □

IV.3 — Convergence des suites monotones

Rappelons tout d'abord que par construction de l'ensemble des réels,

Théorème 4.10 — Propriété fondamentale de $\mathbb{R}$
Toute suite croissante et majorée converge.

Attention ! Un majorant quelconque de u n'est pas nécessairement la limite de u, comme on peut le voir avec la suite $(1-1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, majorée par 2 et convergente vers 1.

Corollaire 4.11 — *Toute suite décroissante et minorée converge.*

De plus $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant u_n \leqslant u_0$$

Propriété 4.12 — *Soit u est une suite croissante et majorée.*

On a $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_0 \leqslant u_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} u_n$$

Théorème 4.13 — *Toute suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.*

DÉM. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante non majorée. La non-majoration de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'écrit

$$\forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists N \in \mathbb{R}, \qquad u_N > M$$

Mais par croissance de u on a alors

$$\forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists N \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in N, \quad n > N \quad \Longrightarrow \quad u_N > M$$

ce qui prouve la divergence de u vers $+\infty$. □

Attention ! Une suite peut tendre vers $+\infty$ sans être croissante. Par exemple la suite

$$1 \;\; 0 \;\; 2 \;\; 1 \;\; 3 \;\; 2 \;\; 4 \;\; 3 \ldots$$

(qui vaut $n/2+1$ si n est pair et $(n-1)/2$ sinon).

Corollaire 4.14 — *Toute suite décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.*

Pouvez-vous donner l'exemple d'une suite tendant vers $-\infty$ sans être décroissante ?

Exemple F — Convergence des suites géométriques
Soit $u = (q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$.
- Si $|q| < 1$, la suite est convergente, de limite 0.
- Si $q \leqslant -1$, la suite est divergente.
- Si $q = 1$, la suite est constante.
- Si $q > 1$ la suite diverge vers $+\infty$.

Traitons quelques cas :
- Si $0 < q < 1$ alors la suite $u_n = q^n$ est décroissante et minorée. Elle est donc convergente.
  Pour trouver sa limite, utilisons la relation de récurence
  $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = qu_n$$
  Comme u_{n+1} et u_n tendent vers la même limite ℓ, on a $\ell = q\ell$, donc $(1-q)\ell = 0$ soit $\ell = 0$ puisque $q \neq 1$.
- $-1 < q < 0$ alors la suite $u_n = q^n$ est encadrée de la façon suivante
  $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad -|q|^n \leqslant q^n \leqslant |q|^n$$
  D'après le théorème d'encadrement, elle tend donc vers 0.
- si $q = 1$, la suite est constante.

– Dans tous les autres cas, elle est divergente.

IV.4 — Suites adjacentes

Définition 4.15 — Suites adjacentes
On dit que deux suites u et v sont adjacentes si elles sont monotones, de monotonies contraires et si $u - v$ converge vers 0.

Théorème 4.16 — Convergence des suites adjacentes
Soit u et v sont deux suites adjacentes.
Elles sont convergentes et de même limite ℓ. De plus, si u est croissante et v décroissante, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \ell \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n$$

DÉM. $u - v$ est décroissante et de limite nulle. u est croissante et majorée par v_0, idem pour v avec u_0, elles sont donc cv de même limite. □

Exemple G La suite $u_n = \sum_{p=0}^{n} \dfrac{1}{p!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n!}$. Nous prouverons que leur limite commune est e.

V — Opérations usuelles

V.1 — Opérations arithmétiques

Étant des fonctions d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on peut additionner, multiplier, etc. des suites entre elles. Ces opérations donnent encore des suites.

Définition 5.1 — Opérations algébriques sur les suites
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques et λ un réel.

1) *Si $\lambda \in \mathbb{R}$, le produit de u par λ est la suite $\lambda u \overset{\text{déf.}}{=} (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*
2) *La somme de u et de v est la suite $u + v \overset{\text{déf.}}{=} (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$*
3) *Le produit de u et de v est la suite $u \times v \overset{\text{déf.}}{=} (u_n \times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$*
4) *Si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0$, alors l'inverse de u est la suite $(1/u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Une propriété sur une suite peut être vérifiée à partir d'un certain rang. Par exemple une suite u peut être non nulle à partir d'un certain rang, ce qui signifie

$$\exists N \in \mathbb{N}, \qquad n \geqslant N \implies u_n \neq 0$$

Dans ce cas la suite $1/u$ est définie « à partir d'un certain rang ».

Par définition, $u - v = u + (-1) \times v$ et $u/v = u \times (1/v)$ si $1/v$ est correctement définie.

Proposition 5.2 — *L'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ muni du produit par un scalaire et de la somme de deux suites est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.*

V.2 — Convergence et opérations usuelles

À partir de la définition, on démontre le résultat suivant, essentiel.

Théorème 5.3 — Linéarité de la convergence
Soit u une suite convergeant vers ℓ et v une suite convergeant vers ℓ'.
Alors la suite $u + v$ est convergente et $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell + \ell'$.
De plus, si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors la suite λu est convergente et $\lambda u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda \times \ell$.

DÉM. Démontrons le résultat d'addition. Puisque u tend vers ℓ et v vers ℓ', on a

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \quad & \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N_\varepsilon \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon \\ & \exists N'_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N'_\varepsilon \implies \left|v_n - \ell'\right| \leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

Prenons ε dans $\mathbb{R}$ et posons $N''_\varepsilon = \max(N_{\varepsilon/2}, N'_{\varepsilon/2})$. Pour $n \geqslant N''_\varepsilon$ on trouve, d'après l'inégalité triangulaire,

$$\left|u_n + v_n - (\ell + \ell')\right| \leqslant |u_n - \ell| + \left|v_n - \ell'\right| \leqslant 2 \times \varepsilon/2$$

d'où le résultat. □

Théorème 5.4 — Produit de deux suites convergentes
Soit u une suite convergeant vers ℓ et v une suite convergeant vers ℓ'.
La suite $u \times v$ est convergente et $u \times v \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \times \ell'$.

DÉM. On utilise le théorème d'encadrement

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|u_n v_n - \ell\ell'\right| &= \left|u_n v_n - v_n \ell + v_n \ell - \ell\ell'\right| \\ &\leqslant |v_n|\,|u_n - \ell| + |\ell|\left|v_n - \ell'\right| \\ &\leqslant |M|\,|u_n - \ell| + |\ell|\left|v_n - \ell'\right| \end{aligned}$$

où M est un majorant de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (qui est bornée, puisqu'elle est convergente, d'après le théorème 4.2). Comme le terme de droite tend vers 0, le terme de gauche aussi d'après le corollaire du théorème d'encadrement. □

Notez que les deux théorèmes précédents prouvent que la suite est convergente *et* donne sa limite.

Corollaire 5.5 — *Soit $p \in \mathbb{N}$ et u une suite de limite finie ℓ.*
La suite u^p est convergente de limite ℓ^p.

Théorème 5.6 — *Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}_+^*$.*
Les suites $u+v$ et $u \times v$ divergent vers $+\infty$.

On en déduit facilement le cas où u diverge vers $-\infty$ ou v converge vers $\ell \in \mathbb{R}_*$.

Théorème 5.7 — *Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Alors les suites $u+v$ et $u \times v$ divergent vers $+\infty$.*

On en déduit facilement le cas où u diverge vers $-\infty$ ou v diverge vers $-\infty$.
Tous les autres cas relèvent de « formes indéterminées ». Ils se résument en deux cas « $\infty - \infty$ » et « $0 \times \infty$ ».
« Forme indéterminée » signifie qu'il n'y a pas de théorème général permettant de prouver la convergence et donner la limite.

V.3 — Composition

Commençons d'emblée par le théorème le plus général et le plus puissant.

Théorème 5.8 — Composée d'une suite et d'une fonction continue
Soit u une suite convergeant vers ℓ et f une fonction définie sur un voisinage de ℓ et continue en ℓ. Alors la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et de limite $f(\ell)$.

Dém. Écrivons les définitions des deux propriétés. D'abord $f(x) \xrightarrow[x\to\ell]{} f(\ell)$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, x \in \,]\,\ell-\alpha\,;\,\ell+\alpha\,[\implies |f(x)-f(\ell)| \leqslant \varepsilon \qquad (1)$$

Ensuite $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, n \geqslant N_\varepsilon \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon \qquad (2)$$

La démonstration est en fait toute simple. Prenons $\varepsilon > 0$ quelconque et associons lui α selon la ligne (1). Alors d'après la ligne (2), pour $n \geqslant N_\alpha$, on a

$$|u_n - \ell| \leqslant \alpha$$

ce qui signifie d'après (1) que

$$|f(u_n) - f(\ell)| \leqslant \varepsilon$$

Bref

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N'_\varepsilon \in \mathbb{N}, n \geqslant N_\varepsilon \implies |f(u_n) - f(\ell)| \leqslant \varepsilon$$

où on a posé $N'_\varepsilon = N_\alpha$. C'est ce qu'on voulait démontrer. □

Notons que la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ peut n'être définie qu'à partir d'un certain rang.

Corollaire 5.9 — *Si u est une suite convergeant vers ℓ avec $\ell \neq 0$.*
Alors la suite $1/u$ est convergente et $1/u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1/\ell$,

Le théorème précédent admet une généralisation commode.

Théorème 5.10 — Cas des limites infinies
Soit u une suite convergeant vers ℓ, avec ℓ finie ou infinie, et f une fonction définie sur un voisinage de ℓ et admettant une limite finie ou infinie ℓ' en ℓ.
Alors la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, de limite ℓ'.

DÉM. admis □

On a « gagné » le cas des limites infinies.

Corollaire 5.11 — *Si u est une suite convergeant vers 0 et positive à partir d'un certain rang alors la suite $1/u$ diverge vers $+\infty$.*

Corollaire 5.12 — *Soit $u \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pm\infty$.*
La suite $1/u$ est définie à partir d'un certain rang et $1/u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

VI — Suites usuelles

VI.1 — Suite géométrique

Définition 6.1 — Suite géométrique
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique si et seulement si il existe un réel q tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = q u_n$$

Le réel q est appellé la raison de la suite géométrique.

Théorème 6.2 — Expression d'une suite géométrique
Soit une suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison q. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = q^n u_0$$

DÉM. Par récurrence. □

Si u est géométrique à partir du rang $i \in \mathbb{N}$ alors

$$\forall n \in [\![i \ ; +\infty [\![, \qquad u_n = q^{n-i} u_i$$

VI.2 — Suite arithmético-géométrique

Définition 6.3 — Suite arithmético-géométrique
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique si et seulement si il existe deux réels a et b tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = a u_n + b$$

Théorème 6.4 — Expression d'une suite arithmético-géométrique
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $a \in \mathbb{R}$, avec $a \neq 1$.
Il existe un réel ℓ tel que la suite $(u_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = a^n(u_0 - \ell) + \ell$$

On a $\ell = b/(1-a)$, le point fixe de la suite.

DÉM. Raisonnement par Analyse-Synthèse. □

Lorsqu'une suite arithmético-géométrique est définie à partir du rang $i \in \mathbb{N}$, on a

$$\forall n \in [\![i \ ; +\infty [\![, \qquad u_n = a^{n-i}(u_i - \ell) + \ell$$

VI.3 — Suite récurrente linéaire d'ordre 2

Définition 6.5 — Suite récurrente linéaire d'ordre 2
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente linéaire d'ordre 2 si et seulement si il existe deux réels a et b tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} = a\, u_{n+1} + b\, u_n$$

Analyse Pour exprimer $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n, l'idée est d'utiliser une suite annexe $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que l'on saurait exprimer.

Que prendre pour la suite v ? On peut essayer $v_n = u_n - \ell$, $v_n = a \times u_n$, etc. Pour cela cherchons d'abord des suites géométriques vérifiant la relation de récurrence. Soit $v_n = \alpha\lambda^n$.

$$\begin{aligned} v_{n+2} &= \alpha\lambda^{n+2} \\ v_{n+2} &= a v_{n+1} + b v_n = \alpha\lambda^{n+2} \\ 0 &= \alpha\lambda^n(\lambda^2 - a\lambda - b) \end{aligned}$$

Ainsi la raison de v doit vérifier l'équation caractérisitique $X^2 - aX - b = 0$.
Énonçons alors le résultat, avant de le démontrer.

Théorème 6.6 — Expression en fonction de *n*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 vérifiant

$$(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$$

On pose $X^2 = aX + b$ l'équation caractéristique de la suite et Δ le dicriminant de cette équation.

- *Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux racines réelles λ_1 et λ_2.*
  Il existe alors deux réels α et β tels que
  $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha\,\lambda_1^n + \beta\,\lambda_2^n$$
  On détermine α et β à l'aide des valeurs initiales u_0 et u_1.
- *Si $\Delta = 0$, l'équation admet une racine réelle λ unique.*
  Il existe alors deux réels α et β tels que
  $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = (\alpha n + \beta)\,\lambda^n$$
  On détermine α et β à l'aide des valeurs initiales u_0 et u_1.
- *Si $\Delta < 0$, l'équation admet deux racines complexes conjuguées $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$.*
  Il existe alors deux réels A et B tels que
  $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = A\,\rho^n \cos(n\theta) + B\,\rho^n \sin(n\theta)$$
  On détermine A et B à l'aide des valeurs initiales u_0 et u_1.

Autre forme : il existe alors deux réels A et φ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = A\,\rho^n \cos(n\theta + \varphi)$$

On détermine A et φ à l'aide des valeurs initiales u_0 et u_1.

VII — Comparaisons lorsque n tend vers $+\infty$

L'équivalence est moyen simple et rapide de calculer des limites. Il est toutefois souvent « un peu trop simple ». Nous l'approfondirons tout au long de l'année.
L'idée est de calculer grossièrement, c'est-à-dire en simplifiant les sommes de façon à n'en garder que le terme dominant. Par exemple

$$\frac{n^2 + 2^n - n}{e^n + n^3 + 4} \sim \frac{2^n}{e^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad \text{car } |2/e| < 1$$

VII.1 — Négligeabilité

Définition 7.1 — Suite négligeable devant une autre
On dit que la suite u est négligeable devant la suite v si et seulement si $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
On note alors « $u_n = o(v_n)$ ».

Exemple H
- On a $n = o(n^2)$
- Au voisinage de $+\infty$, $n/e^n \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, donc $n = o(e^n)$. De même $\ln(n) = o(n)$.

Ces résultats se généralisent.

Propriété 7.2 — Prépondérants en $+\infty$, suites de limite infinie

$$\begin{array}{rll}
\textit{si}\quad \alpha > 0 & \textit{alors} & \ln(n) = o(n^\alpha) \\
\textit{si}\quad \alpha < \beta & \textit{alors} & n^\alpha = o(n^\beta) \\
\textit{si}\quad \beta > 0 \ \textit{ et } \ q > 1 & \textit{alors} & n^\beta = o(q^n) \\
\textit{si}\quad 1 < q_1 < q_2 & \textit{alors} & q_1^n = o(q_2^n) \\
\textit{si}\quad q > 1 & \textit{alors} & q^n = o(n!)
\end{array}$$

Propriété 7.3 — Prépondérants en $+\infty$, suites de limite nulle

$$\begin{array}{rll}
\textit{si}\quad q_1 < q_2 < 1 & \textit{alors} & q_1^n = o(q_2^n) \\
\textit{si}\quad \alpha > 0 \ \textit{ et } \ q < 1 & \textit{alors} & q^n = o(n^\alpha) \\
\textit{si}\quad \alpha > \beta & \textit{alors} & n^\alpha = o(n^\beta)
\end{array}$$

Propriété 7.4 — Calcul avec des o

- *Transitivité : si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ et $v_n = \mathrm{o}(w_n)$ alors $u_n = \mathrm{o}(w_n)$;*
- *Somme : si $u_n = \mathrm{o}(w_n)$ et $v_n = \mathrm{o}(w_n)$ alors $u_n + v_n = \mathrm{o}(w_n)$;*
- *Produit par un scalaire : si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ et si $\alpha \in \mathbb{R}^*$ alors $\alpha\, u_n = \mathrm{o}(v_n)$;*
- *Produit : si $u_n = \mathrm{o}(w_n)$ alors $u_n v_n = \mathrm{o}(v_n w_n)$;*
- *Produit : si $u_n = \mathrm{o}(w_n)$ et $v_n = \mathrm{o}(x_n)$ alors $u_n v_n = \mathrm{o}(w_n x_n)$.*

VII.2 — Équivalence

Définition 7.5 — Suites équivalentes

Soit u et v deux suites telles que u/v et v/u soient définies à partir d'un certain rang. Les suites u et v sont équivalentes si et seulement si $\frac{u}{v} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, ce que l'on note « $u_n \sim v_n$ ».

Remarque I.4 En particulier, il est impossible d'avoir $u_n \sim 0$!

On suppose dans la suite du cours que u/v et v/u sont définies à partir d'un certain rang.

Propriété 7.6 — Caractérisation de l'équivalence

$$u_n = v_n + \mathrm{o}(v_n) \quad \Longleftrightarrow \quad u_n \sim v_n$$

Dém. Pour le sens direct, si $u_n = v_n + \mathrm{o}(v_n)$ alors

$$\frac{u_n}{v_n} = 1 + \frac{\mathrm{o}(v_n)}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \qquad \text{donc} \qquad u_n \sim v_n$$

Pour le sens réciproque, si $u_n \sim v_n$ alors

$$\frac{u_n - v_n}{v_n} = \frac{u_n}{v_n} - 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

ce qui prouve que $u_n - v_n = \mathrm{o}(v_n)$, donc que $u_n = v_n + \mathrm{o}(v_n)$. □

Théorème 7.7 — Convergence de suites équivalentes

Si $u_n \sim v_n$ et si $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ (la limite l peut éventuellement être infinie).

DÉM. Aisée. □

Attention ! La réciproque est fausse ! Par exemple 2^n et n ont la même limite en $+\infty$ mais ne sont pas équivalentes.
La notion d'équivalents est donc plus fine que la notion de limite. Elle permet de classer les suites ayant la même limite en différentes catégories selon la façon dont elles tendent vers cette limite.

Exemple I L'idée générale des équivalents est : dans une somme ne garder que le terme dominant, et pour les autres opérations (produit, quotient, puissance) ne rien changer.

–
$$\frac{3n^5+2n^2+n}{n^2-1} = \frac{3n^5+\mathrm{o}(n^4)}{n^2+\mathrm{o}(n^2)} \sim \frac{3n^5}{n^2} \sim 3n^3 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

– $\dfrac{2^n+2^{-n}}{2^n-2^{-n}} = \dfrac{2^n+\mathrm{o}(e^n)}{2^n+\mathrm{o}(2^n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$

Ces deux résultats permettent de calculer des limites, en généralisant la méthode vue en Terminale.

Proposition 7.8 — Calcul avec des équivalents

1) *Transitivité : si $u_n \sim v_n$ et si $v_n \sim w_n$ alors $u_n \sim w_n$;*
2) *Produit : si $u_n \sim w_n$ et si $v_n \sim x_n$ alors $u_n v_n \sim w_n x_n$;*
3) *Inverse : si $u_n \sim v_n$ alors $1/u_n \sim 1/v_n$ (sous réserve d'existence) ;*
4) *Puissance : si $u_n \sim v_n$ alors $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$ (sous réserve d'existence) ;*
5) *Signe : si $u_n \sim v_n$ et si u_n est de signe constant à partir d'un certain rang alors u et v sont de même signe à partir d'un certain rang.*

Mais les opérations usuelles ne suffisent pas, et on veut pouvoir parfois faire des calculs avec des fonctions classiques. On dispose pour cela d'un petit réservoir de possibilités.

Théorème 7.9 — Composition avec des fonctions usuelles
Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de limite nulle. On a

$$\begin{aligned}
\sin(\varepsilon_n) &\underset{n\to+\infty}{\sim} \varepsilon_n &&\iff \sin(\varepsilon_n) = \varepsilon_n + \mathrm{o}(\varepsilon_n)\\
\cos(\varepsilon_n)-1 &\underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2}\varepsilon_n^2 &&\iff \cos(\varepsilon_n)-1 = -\frac{1}{2}\varepsilon_n^2 + \mathrm{o}(\varepsilon_n^2)\\
\tan(\varepsilon_n) &\underset{n\to+\infty}{\sim} \varepsilon_n &&\iff \tan(\varepsilon_n) = \varepsilon_n + \mathrm{o}(\varepsilon_n)\\
\ln(1+\varepsilon_n) &\underset{n\to+\infty}{\sim} \varepsilon_n &&\iff \ln(1+\varepsilon_n) = \varepsilon_n + \mathrm{o}(\varepsilon_n)\\
\mathrm{e}^{\varepsilon_n}-1 &\underset{n\to+\infty}{\sim} \varepsilon_n &&\iff \mathrm{e}^{\varepsilon_n}-1 = \varepsilon_n + \mathrm{o}(\varepsilon_n)
\end{aligned}$$

$$(1+\varepsilon_n)^\alpha - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha\varepsilon_n \quad\Longleftrightarrow\quad (1+\varepsilon_n)^\alpha - 1 = \alpha\varepsilon_n + o(\varepsilon_n)$$

DÉM. À partir de limites usuelles en 0. Par ailleurs, de la formule $\cos(2\varepsilon_n) = 1-2\sin^2\varepsilon_n$, on tire $\cos(\varepsilon_n) - 1 = -2\sin^2(\varepsilon_n/2)$ et donc

$$1-\cos(\varepsilon_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\varepsilon_n^2}{2} \quad\Longleftrightarrow\quad \cos(\varepsilon_n) = 1 - \frac{\varepsilon_n^2}{2} + o\left(\varepsilon_n^2\right)$$ □

Ne vous éloignez pas de ce formulaire : ailleurs, c'est un monde cruel où la moindre erreur se paye cash !

Attention ! Le gros point noir est qu'on ne peut pas faire d'addition d'équivalents.

Exemple J Par exemple $n+n^2 \sim n^2$ et $\sqrt{n}-n^2 \sim -n^2$ mais la somme est équivalente à n.

L'idée est que lorsqu'on somme deux équivalents, il faut savoir lequel des deux est le plus grand, et ne garder que celui-ci. Mais s'ils sont du même ordre de grandeur et qu'ils s'annulent, que faire ? Et bien la réponse est qu'il nous faut plus de détail sur le reste des deux sommes.

La morale est qu'il faut d'abord faire toute les sommes *puis* les équivalents... mais pas l'inverse !