

Nombres réels

BCPST I — 14 septembre 2017

I — Ensembles de nombres

Parmi les objets élémentaires d'étude, nous disposons en particulier des **nombres**. Pour des raisons historiques, on leur donne des noms différents :

I.1 — Naturels, rationnels

L'ensemble \mathbb{N} est défini par la méthode de comptage traditionnelle : 0, 1, 2, etc. Un nombre est entièrement décrit par son écriture décimale.

Sur \mathbb{N} on définit une opération d'**addition**.

Puis, à partir de l'addition, on définit la **multiplication** de la façon suivante

$$\begin{aligned} \forall b \in \mathbb{N}, \quad 0 \times b &= 0 \\ \forall a \in \mathbb{N}^*, \quad \forall b \in \mathbb{N}, \quad a \times b &= \underbrace{b + b + \dots + b}_{a \text{ fois}} \end{aligned}$$

Vis-à-vis de l'addition, l'ensemble \mathbb{N} est trop petit pour pouvoir résoudre toutes les équations, comme par exemple $x + 5 = 2$. De façon équivalente, on peut aussi dire que dans \mathbb{N} il n'est pas possible d'effectuer toutes les opérations ($2 - 5 = ?$). Pour cela on étend \mathbb{N} en lui adjoignant les entiers naturels négatifs : ce sont les entiers naturels précédés du signe $-$. L'ensemble obtenu est noté \mathbb{Z} .

On étend les opérations définies sur \mathbb{N} à l'aide de conventions. Par exemple, pour l'addition sur \mathbb{Z} une des conventions est que $x + y = 0$ si et seulement si $y = -x$. Ainsi $2 - 5 = -3$ puisque $3 + (2 - 5) = 0$. Une autre convention bien connue est la règle des signes.

Avec ces conventions, l'addition gagne la propriété suivante : « tout élément de \mathbb{Z} possède un **opposé** »

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \quad \exists x' \in \mathbb{Z}, \quad x + x' = 0$$

En fait comme $x' = -1 \times x$, cet opposé est noté $-x$.

Ce travail d'extension d'ensemble se poursuit. Vis-à-vis de la multiplication, \mathbb{Z} est trop petit ; on étend donc \mathbb{Z} en lui ajoutant des éléments rationnels de la façon

suivante

$$\forall r \in \mathbb{Q}, \quad \exists p \in \mathbb{Z}, \quad \exists q \in \mathbb{N}^*, \quad r = \frac{p}{q}$$

(En imposant, de plus, que p et q n'ont pas de diviseurs en commun, il y a unicité du choix de p et q .)

Ce nouvel ensemble est noté \mathbb{Q} . On définit l'addition et la multiplication sur \mathbb{Q} par

$$\forall (p, q, p', q') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \quad \frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + p'q}{qq'}$$

et

$$\frac{p}{q} \times \frac{p'}{q'} = \frac{pp'}{qq'}$$

L'addition et la multiplication conservent les propriétés précédentes. De plus la multiplication gagne la propriété « tout élément de \mathbb{Q}^* possède un [inverse](#) »

$$\forall x \in \mathbb{Q}^*, \quad \exists x' \in \mathbb{Q}^*, \quad x \times x' = 1$$

On note $x' = \frac{1}{x}$.

I.2 — Nombres réels

Il manque encore quelque chose à \mathbb{Q} pour être un ensemble intéressant à utiliser en math. Considérons par exemple la suite

$$u_1 = 1 \qquad u_2 = 1 + \frac{1}{4} \qquad u_3 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{3!}$$

$$u_n = 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

Nous verrons que cette suite est une suite de rationnels croissante et majorée. En calculant chacun de ces termes, on trouve un nombre dont le début du développement décimal est

$$2,718\ 281\ 828\ 46 \dots 2,718\ 281\ 828\ 46 \dots$$

On peut démontrer que ce nombre *n'est pas dans* \mathbb{Q} . Pour étudier de façon pertinente cette suite, on doit donc se placer dans un ensemble plus grand que \mathbb{Q} .

Définition 1.1 — Nombres réels

On appelle \mathbb{R} l'ensemble des nombres rationnels \mathbb{Q} auquel on adjoint toutes les limites des suites convergentes de rationnels.

De cette manière, on prouve que $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, π , e sont des réels, car ils sont tous des limites de suites de rationnels. On montre que ce ne sont pas des rationnels.

Par exemple si a est un entier, alors la suite de rationnels définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{a}{u_n} \right)$$

est correctement définie, convergente et de limite \sqrt{a} .

Grâce à cette définition, on peut montrer que

- \mathbb{R} contient \mathbb{Q} , les opérations sur \mathbb{R} prolongent les opérations sur \mathbb{Q} et la relation d'ordre sur \mathbb{R} prolonge la relation d'ordre sur \mathbb{Q} ;
- toute suite croissante et majorée de réels converge.

La seconde propriété est essentielle en Analyse. Sa démonstration est très complexe pour nous, aussi nous l'admettrons.

II — Addition et multiplication

Les opérations d'addition et de multiplication ont finalement les propriétés suivantes dans \mathbb{R}

Proposition 2.1 — Propriétés de l'addition et de la multiplication

- elle sont *associatives* (et peuvent donc être notée sans parenthèses)

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad (x + y) + z = x + (y + z) \quad \text{et} \quad (xy)z = x(yz)$$

- elle sont *commutatives*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x + y = y + x \quad \text{et} \quad xy = yx$$

- elles possèdent chacune un *élément neutre*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x + 0 = x \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad x \times 1 = x$$

- chaque élément de \mathbb{R} possède un *opposé*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists x' \in \mathbb{R}, \quad x + x' = 0$$

(cet opposé est unique, il est noté $-x$);

- chaque élément de \mathbb{R}^* possède un *inverse*

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \exists x^* \in \mathbb{R}, \quad x \times x^* = 1$$

(cet inverse est unique, il est noté $1/x$);

- la multiplication est *distributive* sur l'addition

$$\forall (a, x, y) \in \mathbb{R}^3, \quad a \times (x + y) = a \times x + a \times y$$

III — Notation puissance

Et à partir de la multiplication, on définit l'**élévation à la puissance** de la même manière que la multiplication vis-à-vis de l'addition

Définition 3.1 — Puissances entières positives

On note

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{N}, \quad x^n = 1 \times \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}}$$

Il faut bien comprendre que $x^0 = 1$. C'est une espèce de convention, qui donne par exemple $0^0 = 1$... écriture qui peut surprendre au début !

Théorème 3.2 — Propriété caractéristique de la notation puissance

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall (n, m) \in \mathbb{N}^2 \quad x^n x^m = x^{n+m}$$

Dém. D'après la définition

$$\begin{aligned} x^n x^m &= 1 \times \underbrace{x \times x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}} \times 1 \times \underbrace{x \times x \times x \times \cdots \times x}_{m \text{ fois}} \\ &= 1 \times \underbrace{x \times x \times x \times \cdots \times x}_{n+m \text{ fois}} = x^{n+m} \quad \square \end{aligned}$$

Propriété 3.3 —

- 1) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ $(x^n)^m = x^{nm} = (x^m)^n$.
- 2) Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$ $(xy)^n = x^n y^n$.

Dém.

- 1) DIY
- 2) Pour la seconde :

$$\begin{aligned} (xy)^n &= 1 \times \underbrace{(x \times y) \times (x \times y) \times \cdots \times (x \times y)}_{n \text{ fois}} \\ &= 1 \times \underbrace{(x \times x \times \cdots \times x) \times (y \times y \times \cdots \times y)}_{n \text{ fois}} \\ & \qquad \qquad \qquad \text{par commutativité de } \times \\ (xy)^n &= x^n y^n \quad \square \end{aligned}$$

Définition 3.4 — Puissances entières négatives

Soit $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note

$$x^{-1} = 1/x \quad \text{et} \quad x^{-n} = (x^{-1})^n$$

Cette définition alourdit la notation puissance, c'est-à-dire qu'on utilise la même notation pour noter une nouvelle opération. Pour justifier l'emploi de cette notation, nous devons démontrer que la propriété caractéristique et les 2 propriétés calculatoires précédentes sont toujours vérifiées.

Théorème 3.5 — Propriété caractéristique de la notation puissance

Pour $(x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2$ et $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$ on a

$$x^{n+m} = x^n x^m \quad (x^n)^m = x^{nm} \quad (xy)^n = x^n y^n$$

Dém. (pleins de cas à considérer) □

Ces propriétés justifient *a posteriori* qu'il était bien licite d'utiliser la notation puissance.

IV — Relation d'ordre

On peut définir sur \mathbb{N} une relation d'ordre qui est ensuite prolongée sur \mathbb{Z} , sur \mathbb{Q} , et enfin sur \mathbb{R} . On la note \leq .

Cette relation d'ordre est **compatible avec l'addition**

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x \leq y \implies x + z \leq y + z$$

Elle est également **compatible avec la multiplication par un réel positif**

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad z \geq 0 \quad x \leq y \implies xz \leq yz$$

On en déduit que

Proposition 4.1 — Propriété de la relation d'ordre dans \mathbb{R}

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

- 1) si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a + c \leq b + d$ (addition terme à terme);
- 2) si $a \leq b$ et $0 \leq c$ alors $ac \leq bc$.
- 3) si $a \leq b$ et $c \leq 0$ alors $bc \leq ac$.
- 4) si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$ alors $0 \leq ac \leq bd$ (multiplication terme à terme d'inégalités positives).

$$5) 0 \leq a \leq b \implies a^2 \leq b^2 \text{ (croissance de } x \mapsto x^2 \text{ sur } \mathbb{R}_+);$$

$$6) a \leq b \leq 0 \implies a^2 \geq b^2 \text{ (décroissance de } x \mapsto x^2 \text{ sur } \mathbb{R}_-).$$

Dém. Les trois premières propriétés sont admises, dans la mesure où elles sont issues de la définition même de \mathbb{R} .

La quatrième découle de la seconde : on a d'une part $ac \leq bc$ et d'autre part $bc \leq bd$ en multipliant $c \leq d$ par le réel positif b . Par transitivité de la relation d'ordre on en déduit $ac \leq bd$.

Les deux dernières découlent immédiatement de la quatrième. \square

On constate dans ces démonstrations l'importance de l'hypothèse de positivité des réels.

IV.1 — Parties de \mathbb{R} et ordre

Définition 4.2 — Minorant, majorant

Soit E une partie de \mathbb{R} .

On dit que $m \in \mathbb{R}$ est un *minorant* de E si et seulement si $\forall x \in E, m \leq x$.

On dit que $M \in \mathbb{R}$ est un *majorant* de E si et seulement si $\forall x \in E, M \geq x$.

Les *parties majorées* sont les sous-ensembles de \mathbb{R} qui admettent un majorant. On définit de même les parties *minorées*, *bornées*, etc.

Exemple A

- 10, 15, e^4 sont des majorants de \mathbb{Z}_- ;
- $]0 ; 1]$ est minoré par -1 , par 0, par tout réel plus petit que 0.

Définition 4.3 — Plus petit élément, plus grand élément

Soit E une partie de \mathbb{R} .

On dit que x_0 est le *plus petit élément* de E si et seulement si

$$x_0 \in E, \quad \text{et} \quad \forall x \in E, \quad x_0 \leq x$$

On le note alors $\min(E)$.

On dit que x_0 est le *plus grand élément* de E si et seulement si

$$x_0 \in E, \quad \text{et} \quad \forall x \in E, \quad x_0 \geq x$$

On le note alors $\max(E)$.

Le point important est que le plus grand élément ou le plus petit élément de E sont dans l'ensemble E , au contraire d'un majorant ou d'un minorant.

Exemple B

- \mathbb{N} admet un plus petit élément (0) mais pas de plus grand élément ;
- Ainsi $]0 ; 1[$ n'admet pas de plus petit élément. En effet, supposons qu'il existe $x \in]0 ; 1[$ qui soit un plus petit élément de cet intervalle. Alors $y = \frac{x}{2}$ est plus petit que x , et il est dans l'intervalle $1 > x > x/2 > 0$. Cette contradiction prouve que x n'existe pas.

Mais bien sûr 0 est un minorant de $]0 ; 1[$ Il joue d'ailleurs un rôle particulier, formalisé par la définition suivante.

Définition 4.4 — Borne supérieure, borne inférieure

Si l'ensemble des majorants de E admet un plus petit élément, on dit que c'est la *borne supérieure* de E . Notation : $\sup(E)$.

Si l'ensemble des minorants de E admet un plus grand élément, on dit que c'est la *borne inférieure* de E . Notation : $\inf(E)$.

Exemple C

- $]0 ; 1[$ admet comme borne inférieure 0. En effet, d'une part 0 est bien un minorant de l'ensemble.
D'autre part, si M est un minorant de $]0 ; 1[$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, $M < \varepsilon$. On fait alors « tendre ε vers 0 », et on trouve $M \leq 0$. Ainsi 0 est bien le plus grand des minorants possibles, soit la borne inférieure de l'ensemble.
- quelles sont les bornes, si elles existent, de l'ensemble $\left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$?

V — Partie entière

Théorème 5.1 — Soit $x \in \mathbb{R}$. L'ensemble $]x - 1 ; x[$ contient un unique entier. On l'appelle *partie entière de x* et on le note $\lfloor x \rfloor$.

Dém. Supposons que $]x - 1 ; x[$ ne contienne aucun entier. Dans ce cas, pour $k \in \mathbb{Z}$, l'ensemble $]x - 1 + k ; x + k[$ ne contient pas d'entier et donc $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]x - 1 + k ; x + k[$ non plus. Ainsi \mathbb{R} ne contient pas d'entiers, ce qui est absurde.

Prouvons maintenant l'unicité de cet entier. Soit n et m deux entiers dans $]x - 1 ; x[$. Alors $x - 1 < n \leq x$ et $-x \leq -m < -x + 1$. Par somme $-1 < n - m < 1$. Comme $n - m$ est un entier, cela signifie que $n - m = 0$ et donc $n = m$. □

On retiendra que $\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier vérifiant l'une des inégalités

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \iff \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

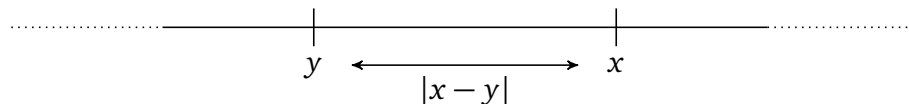
VI — Valeur absolue

Définition 6.1 — Valeur absolue

La fonction *valeur absolue* est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} |x| \stackrel{\text{d\u00e9f.}}{=} x & \text{si } x \geq 0 \\ |x| \stackrel{\text{d\u00e9f.}}{=} -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Si x et y sont deux réels, $|x - y|$ s'interprète comme la distance, sur la droite réelle, entre x et y .



Propriété 6.2 — Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$

- $|x| \geq 0$;
- $|x| = 0 \iff x = 0$;
- $|x| = |-x|$
- $|xy| = |x||y|$ et $|x^n| = |x|^n$;
- $|x|^2 = x^2$ et donc $\sqrt{x^2} = |x|$;
- $|1/y| = 1/|y|$ et $|x/y| = |x|/|y|$;

Théorème 6.3 — Inégalités et valeur absolue

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

- $|x| \leq y \iff -y \leq x \leq y$;
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \leq |x|$
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |x + y| \leq |x| + |y|$ (*inégalité triangulaire*);
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |x - y| \leq |x| + |y|$;

Dém.

- D'après la définition;
- idem;
- idem;

– On a

$$\begin{aligned} & |x + y| \leq |x| + |y| \\ \Leftrightarrow & |x + y|^2 \leq (|x| + |y|)^2 \quad \text{car } x \mapsto x^2 \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+ \\ \Leftrightarrow & 0 \leq (x + y)^2 \leq (|x| + |y|)^2 \\ \Leftrightarrow & 0 \leq xy \leq |x||y| \end{aligned}$$

cette dernière égalité étant vraie d'après le point précédent.

– en prenant $-y$ dans la relation précédente. □