Nombres réels

Bcpst I — 27 février 2017

I — Ensembles de nombres

Parmi les objets élémentaires d'étude, nous disposons en particulier des nombres. Pour des raisons historiques, on leur donne des noms différent : entiers naturels ($\mathbb{N}$), entiers relatifs ($\mathbb{Z}$), nombres rationnels ($\mathbb{Q}$) et nombre réels ($\mathbb{R}$). On a la suite d'implications

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$$

I.1 — Naturels, rationnels

L'ensemble $\mathbb{N}$ est défini par la méthode de comptage traditionnelle : 0, 1, 2, etc. Un nombre est entièrement décrit par son écriture décimale.

Sur $\mathbb{N}$ on définit une opération d'addition.

Puis, à partir de l'addition, on définit la multiplication de la façon suivante

$$\begin{aligned} &\forall b \in \mathbb{N}, \qquad 0 \times b = 0 \\ &\forall a \in \mathbb{N}^*, \quad \forall b \in \mathbb{N}, \qquad a \times b = \underbrace{b + b + \cdots + b}_{a \text{ fois}} \end{aligned}$$

Vis-à-vis de l'addition, l'ensemble $\mathbb{N}$ est trop petit pour pouvoir résoudre toutes les équations, comme par exemple $x + 5 = 2$. De façon équivalentes, on peut aussi dire que dans $\mathbb{N}$ il n'est pas possible d'effectuer toutes les opérations ($2 - 5 = ?$). Pour cela on étend $\mathbb{N}$ en lui adjoignant les entiers naturels négatifs : ce sont les entiers naturels précédé du signe $-$. L'ensemble obtenu est noté $\mathbb{Z}$.

On étend les opérations définies sur $\mathbb{N}$ à l'aide de conventions. Par exemple, pour l'addition sur $\mathbb{Z}$ un des conventions est que $x + y = 0$ si et seulement si $y = -x$. Ainsi $2 - 5 = -3$ puisque $3 + (2 - 5) = 0$. Une autre convention bien connue est la règle des signes.

Avec ces conventions, l'addition gagne la propriété suivante : « tout élément de $\mathbb{Z}$ possède un opposé «

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \quad \exists x' \in \mathbb{Z}, \qquad x + x' = 0$$

En fait comme $x' = -1 \times x$, cet opposé est noté $-x$.

Ce travail d'extension d'ensemble se poursuit. Vis-à-vis de la multiplication, $\mathbb{Z}$ est trop petit ; on étend donc $\mathbb{Z}$ en lui ajoutant des éléments rationnels de la façon suivante

$$\forall r \in \mathbb{Q}, \quad \exists p \in \mathbb{Z}, \quad \exists q \in \mathbb{N}^*, \qquad r = \frac{p}{q}$$

(En imposant, de plus, que p et q n'ont pas de diviseurs en commun, il y a unicité du choix de p et q.)

Ce nouvel ensemble est noté $\mathbb{Q}$. On définit l'addition et la multiplication sur $\mathbb{Q}$ par

$$\begin{aligned} \forall (p,q,p',q') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \qquad & \frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + p'q}{qq'} \\ \text{et} \qquad & \frac{p}{q} \times \frac{p'}{q'} = \frac{pp'}{qq'} \end{aligned}$$

L'addition et la multiplication conservent les propriétés précédentes. De plus la multiplication gagne la propriété « tout élément de $\mathbb{Q}^*$ possède un inverse »

$$\forall x \in \mathbb{Q}^*, \quad \exists x' \in \mathbb{Q}^*, \qquad x \times x' = 1$$

On note $x' = \dfrac{1}{x}$.

I.2 — Nombres réels

Il manque encore quelque chose à $\mathbb{Q}$ pour être un ensemble intéressant à utiliser en math. Considérons par exemple la suite

$$u_1 = 1 \qquad u_2 = 1 + \frac{1}{4} \qquad u_3 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{3!}$$
$$u_n = 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

Nous verrons que cette suite est une suite de rationnels croissante et majorée. En calculant chacun de ces termes, on trouve un nombre dont le début du développement décimal est

$$2{,}718\,281\,828\,46\ldots$$

On peut démontrer que ce nombre *n'est pas dans* $\mathbb{Q}$. Pour étudier de façon pertinente cette suite, on doit donc se placer dans un ensemble plus grand que $\mathbb{Q}$.

Définition 1.1 — *On appelle $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ auquel on adjoint toutes les limites des suites convergentes de rationnels.*

De cette manière, on prouve que $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, π, e sont des réels, car ils sont tous des limites de suites de rationnels. On montre que ce ne sont pas des rationnels.

Grâce à cette définition, on peut montrer que

– $\mathbb{R}$ contient $\mathbb{Q}$, les opérations sur $\mathbb{R}$ prolongent les opérations sur $\mathbb{Q}$ et la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ prolonge la relation d'ordre sur $\mathbb{Q}$;
– toute suite croissante et majorée de réels converge.

La seconde propriété est essentielle en Analyse. Sa démonstration est très complexe pour nous, aussi nous l'admettrons.

II — Les opérations usuelles

II.1 — Addition et multiplication

Les opérations d'addition et de multiplication ont finalement les propriétés suivantes dans $\mathbb{R}$

Proposition 2.1 — Propriétés de l'addition et de la multiplication

– *elle sont associatives (et peuvent donc être notée sans parenthèses)*

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \qquad (x+y)+z = x+(y+z) \qquad \text{et} \qquad (xy)z = x(yz)$$

– *elle sont commutatives*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad x+y = y+x \qquad \text{et} \qquad xy = yx$$

– *elles possèdent chacune un élément neutre*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x+0 = x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad x \times 1 = x$$

– *chaque élément de $\mathbb{R}$ possède un opposé*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists x' \in \mathbb{R}, \qquad x + x' = 0$$

(cet opposé est unique, il est noté $-x$) ;
– *chaque élément de $\mathbb{R}^*$ possède un inverse*

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \exists x^* \in \mathbb{R}, \qquad x \times x^* = 1$$

(cet inverse est unique, il est noté $1/x$) ;
– *la multiplication est distributive sur l'addition*

$$\forall (a,x,y) \in \mathbb{R}^3, \qquad a \times (x+y) = a \times x + a \times y$$

II.2 — Puissance

Et à partir de la multiplication, on définit l'élévation à la puissance de la même manière que la multiplication vis-à-vis de l'addition

Définition 2.2 — Puissances entières positives

Par définition on note

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{N}, \qquad x^n = 1 \times \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}}$$

Il faut bien comprendre que $x^0 = 1$. C'est une espèce de convention, qui donne par exemple $0^0 = 1$... écriture qui peut surprendre au début !

Théorème 2.3 — Propriété caractéristique de la notation puissance

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall (n, m) \in \mathbb{N}^2 \qquad x^n x^m = x^{n+m}$$

Dém. D'après la définition

$$\begin{aligned} x^n x^m &= 1 \times \underbrace{x \times x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}} \times 1 \times \underbrace{x \times x \times x \times \cdots \times x}_{m \text{ fois}} \\ &= 1 \times \underbrace{x \times x \times x \times \cdots \times x}_{n+m \text{ fois}} && = x^{n+m} \end{aligned}$$

$\square$

Propriété 2.4 —

1) *Pour* $x \in \mathbb{R}$ *et* $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ $\quad (x^n)^m = x^{nm} = (x^m)^n$.
2) *Pour* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *et* $n \in \mathbb{N}$ $\quad (xy)^n = x^n y^n$.

Dém.

1) DIY
2) Pour la seconde :

$$\begin{aligned} (xy)^n &= 1 \times \underbrace{(x \times y) \times (x \times y) \times \cdots (x \times y)}_{n \text{ fois}} \\ &= 1 \times \underbrace{(x \times x \times \cdots \times x) \times (y \times y \times \cdots \times y)}_{n \text{ fois}} \end{aligned}$$

par commutativité de $\times$

$$(xy)^n = x^n y^n$$

$\square$

Définition 2.5 — Puissances entières négatives

Soit $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition on note $x^{-1} = 1/x$ et $x^{-n} = (x^{-1})^n$

Cette définition alourdit la notation puissance, c'est-à-dire qu'on utilise la même notation pour noter une nouvelle opération. Pour justifier l'emploi de cette notation, nous devons démontrer que la propriété caractéristique et les 2 propriétés calculatoires précédentes sont toujours vérifiées.

Théorème 2.6 — Propriété caractéristique de la notation puissance

Pour $(x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2$ et $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$ on a

$$x^{n+m} = x^n x^m \qquad (x^n)^m = x^{nm} \qquad (xy)^n = x^n y^n$$

Dém. (pleins de cas à considérer) □

Ces propriétés justifient *a posteriori* qu'il était bien licite d'utiliser la notation puissance.

III — Relation d'ordre

On peut définir sur $\mathbb{N}$ une relation d'ordre qui est ensuite prolongée sur $\mathbb{Z}$, sur $\mathbb{Q}$, et enfin sur $\mathbb{R}$. On la note $\leqslant$.

Cette relation d'ordre est compatible avec l'addition

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \qquad , x \leqslant y \Longrightarrow x + z \leqslant y + z$$

Elle est également compatible avec la multiplication par un réel positif

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad z \geqslant 0 \qquad x \leqslant y \Longrightarrow xz \leqslant yz$$

On en déduit que

Proposition 3.1 — Propriété de la relation d'ordre dans $\mathbb{R}$

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

1) *si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$ alors $a + c \leqslant b + d$ (addition terme à terme) ;*
2) *si $a \leqslant b$ et $0 \leqslant c$ alors $ac \leqslant bc$.*
3) *si $a \leqslant b$ et $c \leqslant 0$ alors $bc \leqslant ac$.*
4) *si $0 \leqslant a \leqslant b$ et $0 \leqslant c \leqslant d$ alors $0 \leqslant ac \leqslant bd$ (multiplication terme à terme d'inégalités* positives*).*

5) $0 \leqslant a \leqslant b \implies a^2 \leqslant b^2$ *(croissance de* $x \mapsto x^2$ *sur* $\mathbb{R}_+$*) ;*

6) $a \leqslant b \leqslant 0 \implies a^2 \geqslant b^2$ *(décroissance de* $x \mapsto x^2$ *sur* $\mathbb{R}_-$*).*

Dém. Les trois premières propriétés sont admises, dans la mesure où elles sont issues de la définition même de $\mathbb{R}$.

La quatrième découle de la seconde : on a d'une part $ac \leqslant bc$ et d'autre part $bc \leqslant bd$ en multipliant $c \leqslant d$ par le réel positif b. Par transitivité de la relation d'ordre on en déduit $ac \leqslant bd$.

Les deux dernières découlent immédiatement de la quatrième. □

On constate dans ces démonstrations l'importance de l'hypothèse de positivité des réels.

III.1 — Parties de $\mathbb{R}$ et ordre

Définition 3.2 — Minorant, majorant

Soit E une partie de $\mathbb{R}$.

On dit que $m \in \mathbb{R}$ est un minorant de E si et seulement si $\forall x \in E, \quad m \leqslant x.$

On dit que $M \in \mathbb{R}$ est un majorant de E si et seulement si $\forall x \in E, \quad M \geqslant x.$

Les parties majorées sont les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ qui admette un majorant. On définit de même les parties minorées, bornées, etc.

Exemple

- $10, 15, \mathrm{e}^4$ sont des majorants de $\mathbb{Z}_-$;
- $]\,0\,;1\,]$ est minoré par -1, par 0, par tout réel plus petit que 0.

Définition 3.3 — Plus petit élément, plus grand élément

Soit E une partie de $\mathbb{R}$.

On dit que x_0 est le plus petit élément de E si et seulement si

$$x_0 \in E, \qquad \text{et} \qquad \forall x \in E, \qquad x_0 \leqslant x$$

On le note alors $\min(E)$.

On dit que x_0 est le plus grand élément de E si et seulement si

$$x_0 \in E, \qquad \text{et} \qquad \forall x \in E, \qquad x_0 \geqslant x$$

On le note alors $\max(E)$.

Le point important est que le plus grand élément ou le plus petit élément de E sont dans l'ensemble E, au contraire d'un majorant ou d'un minorant.

Exemple

- $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément (0) mais pas de plus grand élément ;
- Ainsi $]\,0\,;\,1\,]$ n'admet pas de plus petit élément. En effet, supposons qu'il existe $x \in \,]\,0\,;\,1\,[$ qui soit un plus petit élément de cet intervalle. Alors $y = \dfrac{x}{2}$ est plus petit que x, et il est dans l'intervalle $1 > x > x/2 > 0$. Cette contradiction prouve que x n'existe pas.

Mais bien sûr 0 est un minorant de $]\,0\,;\,1\,]$ Il joue d'ailleurs un rôle particulier, formalisé par la définition suivante.

Définition 3.4 — Borne supérieure, borne inférieure

Si l'ensemble des majorants de E admet un plus petit élément, on dit que c'est la borne supérieure de E. Notation : $\sup(E)$.

Si l'ensemble des minorants de E admet un plus grand élément, on dit que c'est la borne inférieure de E. Notation : $\inf(E)$.

Exemple

- $]0\,;\,1]$ admet comme borne inférieure 0. En effet, d'une part 0 est bien un minorant de l'ensemble.
  D'autre part, si M est un minorant de $]\,0\,;\,1\,]$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, $M < \varepsilon$.
  On fait alors « tendre ε vers 0 », et on trouve $M \leqslant 0$. Ainsi 0 est bien le plus grand des minorants possibles, soit la borne inférieure de l'ensemble.
- quelles sont les bornes, si elles existent, de l'ensemble $\left\{\dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$?

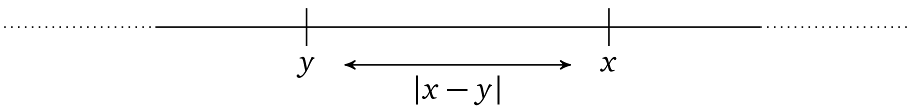
IV — Valeur absolue

Définition 4.1 — Valeur absolue

La fonction valeur absolue est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |x| \overset{\text{déf.}}{=} x \quad \mathrm{x} \geqslant 0 \qquad \textit{et} \qquad |x| \overset{\text{déf.}}{=} -x \quad \mathrm{x} < 0$$

Si x et y sont deux réels, $|x-y|$ s'interprète comme la distance, sur la droite réelle, entre x et y.



Propriété 4.2 — *Soit* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *et* $n \in \mathbb{N}$

- $|x| \geqslant 0$;
- $|x| = 0 \iff x = 0$;
- $|x| = |-x|$
- $|x|^2 = x^2$ *et donc* $\sqrt{x^2} = |x|$;
- $|xy| = |x|\,|y|$ *et* $|x^n| = |x|^n$;
- $|1/y| = 1/|y|$ *et* $|x/y| = |x|/|y|$;

Théorème 4.3 — **Inégalités et valeur absolue**

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

- $|x| \leqslant y \iff -y \leqslant x \leqslant y$;
- $\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x \leqslant |x|$
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad |x + y| \leqslant |x| + |y|$ *(inégalité triangulaire)*;
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad |x - y| \leqslant |x| + |y|$;

Dém.

- D'après la définition ;
- idem ;
- idem ;
- On a

$$\begin{aligned} & |x + y| \leqslant |x| + |y| \\ \iff \quad & |x + y|^2 \leqslant (|x| + |y|)^2 \qquad \text{car } x \mapsto x^2 \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+ \\ \iff \quad & 0 \geqslant (x + y)^2 \leqslant (|x| + |y|)^2 \\ \iff \quad & 0 \geqslant xy \leqslant |x|\,|y| \end{aligned}$$

  cette dernière égalité étant vraie d'après le point précédent.
- en prenant $-y$ dans la relation précédente. □