Probabilités

bcpst 1, 27/03/2018

I — Exemples d'expériences aléatoires

Une expérience aléatoire est une expérience dont on ne peut pas prédire le résultat avant de l'avoir réalisée… ce qui fait que toutes les expériences sont *a priori* aléatoires !

Exemple

- On lance un dé rouge et un dé bleu
- On lance une roue de loterie divisée en secteur de tailles 90°, 45°, 45°, 60°, 30°, chaque secteur portant un numéro entre 1 et 5.
- On fait naître une portée de 1000 drosophiles.
- On mesure la consommation d'essence d'une voiture lors des 100 derniers kilomètre parcourus.

Qu'est–ce que le résultat d'une expérience aléatoire ? Cette notion doit être clairement définie à chaque fois. Pour le lancer de dés, ce sont les chiffres obtenus… mais ça pourrait être aussi bien la distance entre les deux dés, le temps avant que les dés s'arrêtent, etc. Pour d'autres expériences aléatoires, le résultat peut sembler moins évident à décrire : culture de bactéries, file d'attente à un guichet, temps d'attente entre deux erreurs dans la transmission d'un message électronique, etc.
Mais on ne s'intéresse pas forcément au résultat d'une expérience. La plupart du temps on observe un événement particulier. Ces événements prennent des formes diverses et variés : le résultat du dé rouge est plus grand que le résultat du dé bleu, le temps d'attente est plus grand que 10 min, etc. Ces événements peuvent parfois se confondre avec un résultat particulier : la roue tombe sur le secteur le plus grand, etc. Mais en général l'événement considéré est une collection de résultat.
Parfois l'expérience et ses résultats se formalisent bien : le résultat de l'expérience des deux dés est une paire de nombre de la forme (i, j) où i représente la face du dé rouge obtenu et j la face du dé bleu. On peut ainsi faire des prédictions sur ce résultat. Par exemple $1 \leqslant i \leqslant 6$, $1 \leqslant j \leqslant 6$, la somme des deux dés sera inférieur à 40, etc. Si on ne peut pas connaître avec certitude le résultat du lancer, on sait par contre que le résultat sera dans l'ensemble $[\![1 ; 6]\!]^2$.
Mais la plupart du temps, la formalisation n'est pas aisée. Considérons par exemple une urne contient 4 boules blanches et 5 boules rouges. On tire les boules une à une et sans remise. Probabilité de tirer une boule blanche pour la première fois au 4–ième tirage ?

II — Univers – Évènements

Définition 2.1 — Expérience aléatoire — Univers
Une expérience aléatoire est un protocole dont on ne pas prédire le résultat à l'avance..
La collection des résultats possibles de l'expérience s'appelle l'univers de l'expérience. On le note Ω.

Exemple

- Une urne contient 3 pommes rouges et 2 jaunes. On en tire une. Univers ? Et si on en tire deux sans remise ? avec remise ?
- On lance deux dés discernables (par exemple l'un est rouge et l'autre est bleu). Décrire Ω.
  Et si les dés sont indiscernables ?

Définition 2.3 — Évènement aléatoire
On appelle événement aléatoire tout sous-ensemble de Ω.
Si $\omega \in \Omega$, alors le singleton $\{\omega\}$ est appelé événement élémentaire.

Tout événement est donc l'union disjointe d'événements élémentaires.
Lorsqu'on réalise une expérience, on dira qu'un événement A est réalisé si et seulement si le résultat ω de l'expérience est dans l'ensemble A.
En voyant un événement comme un sous-ensemble de Ω, la question se pose du sens des opérations ensemblistes. Et bien il se trouve que chaque opération ensembliste à un équivalent « probabiliste ».

Langage probabiliste	Langage ensembliste
Résultat possible	ω, élément de Ω
Évènement	A, partie de Ω
Évènement élémentaire	$\{\omega\}$, singleton de Ω
Évènement certain	Ω
Évènement impossible	$\varnothing$
L'événement « A ne se produit pas »	$\overline{A}$
L'événement « A ou B »	$A \cup B$
L'événement « A et B »	$A \cap B$
A et B sont incompatibles	$A \cap B = \varnothing$
A implique B	$A \subset B$

Vocabulaire L'ensemble des événements s'appelle la tribu des événements. On note souvent $\mathscr{T}$ l'ensemble des événements. On qualifie $(\Omega, \mathscr{T})$ d'espace probabilisable.

Dans tout ce chapitre, et durant toute l'année, Ω est un ensemble fini et les événements sont les parties de Ω.
Ces termes sont trop techniques pour la BCPST, mais on les rencontre parfois dans la littérature.

III — Probabilité

III.1 — Définition

Définition 3.1 — Probabilité
On appelle probabilité sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ toute application P de $\mathscr{P}(\Omega)$ dans $[\,0\,;\,1\,]$ telle que

1) $P(\Omega) = 1$;
2) *si A et B sont deux événements incompatibles alors*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Vocabulaire Sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$, il est possible de définir une probabilité P. Le triplet $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ s'appelle un espace probabilisé.

III.2 — Les trois situations possibles

Le cas fini C'est le cas où l'expérience amène un nombre fini de résultat : Ω est un ensemble fini et peut s'écrire sous la forme $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$. Dans ce cadre, tout ensemble de résultats peut être interprété comme un événements : ici, tous les sous-ensembles de A sont des événements.
Si A est événement, c'est-à-dire un sous-ensemble de Ω, alors A peut s'écrire

$$A = \left\{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_r}\right\}$$

c'est-à-dire comme une réunion finie et disjointe d'événements élémentaires. Ainsi la connaissance des probabilités des événements élémentaires suffit à calculer les probabilités de tous les événements, par une simple somme finie

$$P(A) = \sum_{k=1}^{r} P(A_{i_k})$$

Exemple Lancer de deux dés discernables.
Décrire dans ce cas les événements « le dé rouge donne un résultat plus grand que le dé bleu », « la somme des résultats est 5 ».

Le cas dénombrable C'est le cas où Ω est un ensemble infini en bijection avec $\mathbb{N}$: $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots\}$. Ici encore tous les sous-ensembles de Ω peuvent s'interpréter comme des événements. Ces événements sont des unions éventuellement infinies d'événements élémentaires

$$A = \left\{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_r}, \ldots\right\} = \left\{\omega_{i_k}, k \in \mathbb{N}\right\}$$

La connaissance des probabilités des événements élémentaires permet encore de calculer les probabilités de tous les événements, mais il faut utiliser un outil un peu plus technique : la somme dénombrable.

$$P(A) = \sum_{k \in \mathbb{N}} P(A_{i_k})$$

Exemple On lance une pièce de monnaie jusqu'à obtenir face. Si face est représenté par 1 et pile par 0, alors l'ensemble des résultats est de la forme $\{1, 01, 001, 0001, \ldots\}$.

Cas non finis et non dénombrables
Le cas typique est celui où l'ensemble des résultats est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Par exemple : on lance une fléchette sur une cible et on mesure la distance entre le centre de la cible et le point d'arrivée de la fléchette.
Pour des raisons théoriques difficiles à exposer ici, il existe alors des sous-ensembles de Ω qui ne peuvent pas être interprété comme des événements (sinon la théorie est soit incohérente, soit sans intérêt pratique – en d'autres termes, la probabilité définie est « trop simple »).
De plus un événement ne s'écrit plus nécessairement comme union finie ou dénombrable d'événements élémentaires : la théorie nécessite donc de nouveaux outils pour calculer les probabilités de tels événements.

III.3 — Propriétés

Proposition 3.4 — Propriété d'une probabilité
Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé.

1) $P(\varnothing) = 0$
2) *Pour tout événement A, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$*
3) *Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont n événements deux à deux incompatibles alors*

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

4) Si A et B sont deux événements et que A implique B ($A \subset B$) alors $P(A) \leqslant P(B)$ et $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$;

5) Si A et B sont deux événements alors

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Ceci dit $\varnothing$ n'est pas forcément le seul événement de probabilité nulle. Par exemple

$$\Omega = \{a, b, c\} \qquad P(a) = P(b) = 1/2 \qquad \text{et} \qquad P(c) = 0$$

De même $A \subset B$ et $P(A) = P(B)$ n'implique pas $A = B$.

Vocabulaire Un événement A tel que $P(A) = 0$ est dit quasi–impossible. Un événement A tel que $P(A) = 1$ est dit quasi–certain.
En fait, on évite de dire « certain » ou « impossible » pour préparer le terrain aux univers infinis qui seront vus en Spé. Dans ces univers, certains événements d'apparence simples sont de probabilité non nulle, sans être « vide ». Penser par exemple à l'événement « obtenir une infinité de Pile » en lançant une pièce de monnaie.

III.4 — Probabilité dans un univers fini

Tout événement A s'écrit comme réunion disjointe d'événements élémentaires. Donc, dans le cas des probabilités dans un univers fini, il suffit de connaître la valeur de P sur les événements élémentaires pour connaître P partout.

Exemple Un dé est pipé et la probabilité d'apparition d'une face est donnée par le tableau suivant

Face du dé	1	2	3	4	5	6
Probabilité	0,1	0,2	0,2	0,1	0,1	0,3

Quelle est la probabilité de l'événement : « Le résultat d'un lancer est pair », « le résultat d'un lancer est plus grand que 4 »?

Propriété 3.6 — *Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ un ensemble fini.*

1) Soit P une probabilité sur Ω. Pour $i \in [\![0\,; n]\!]$ on note $p_i = P(\omega_i)$. Les réels p_i vérifient

$$\forall i \in [\![1\,; n]\!], \qquad p_i \geqslant 0 \qquad \textit{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

2) réciproquement si $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ est un n–uplet de réels positif et de somme 1, alors il existe une unique probabilité P sur Ω telle que $\forall i \in [\![0\,; n]\!] \quad p_i = P(\omega_i)$.

Notez que dans la seconde partie du théorème, les hypothèses assurent que les réels p_i sont plus petits que 1.

Un cas particulier important : l'équiprobabilité

Définition 3.7 — Équiprobabilité
Soit Ω un ensemble fini.
On appelle probabilité uniforme ou équiprobabilité sur Ω l'unique probabilité qui a la même valeur pour tous les événements élémentaires.

Il faut justifier de l'existence et de l'unicité de cette probabilité.

- Si cette probabilité existe la condition $P(\Omega) = 1$ amène $P(\omega_i) = 1/\operatorname{card}(\Omega)$;
- réciproquement la probabilité définie ainsi existe et elle est unique d'après la propriété précédente.

Dans ce cas, si A est un événement,

$$P(A) = \frac{\operatorname{card}(A)}{\operatorname{card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas où } A \text{ se réalise}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Voici des exemples classiques de cette situation :

Exemple

- un tirage équiprobable : un dé à 6 faces honnête, une pièce de monnaie non truquée, une urne contenant p boules numérotées de 1 à p ;
  Dans ces cas, l'équiprobabilité est liée à la symétrie entre les résultats.
- on effectue une succession de n tirages avec remise dans un ensemble donné E. Dans ce cas, un résultat est un n–uplet d'élément de E, c'est-à-dire que $\Omega = E^n$. Toutes les configurations sont équiprobables.

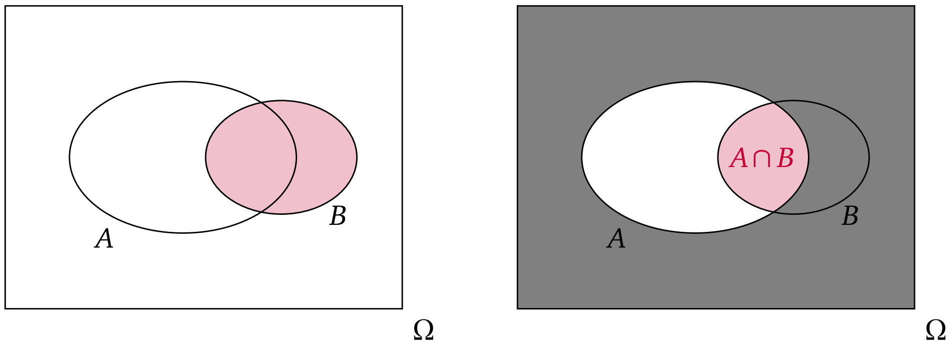
Un exemple à méditer : on lance deux dés indiscernables. Sensibilité des dés à la peinture.

IV — Probabilité conditionnelle

IV.1 — Approche directe

La probabilité conditionnelle est utilisée lorsque, dans une expérience aléatoire donnée, on dispose d'informations supplémentaires par rapport à l'expérience initiale.
Prenons un exemple : j'étudie les logements qu'un élève de ce lycée habite dans une maison ou dans un appartement, et la probabilité qu'il habite Lyon ou ailleurs. Si en France il y a 2 maisons pour un appartement, la probabilité qu'il habite une maison sera (à peu près) de 2/3. De plus, la moitié des élèves du lycée habitent Lyon, donc la seconde probabilité est 1/2.
Oui mais à Lyon il y a 5 appartements pour 1 maison : si je vais voir un élève et que je lui pose la question « Habitez–vous Lyon ? » et qu'il me dit oui, je ne vais pas 2/3 ! Elle sera plutôt 1/6 !

D'un point de vue théorique, en ayant une information supplémentaire, on change l'univers de l'expérience. Notons Ω est l'univers de départ, A l'événement « connu » et B l'événement étudié, alors le fait de connaître l'événement A réduit l'univers à une petite portion : l'événement A lui même. De B on ne s'intéresse qu'à la partie $A \cap B$.



Maintenant il faut bien comprendre que la probabilité de B « sachant que A est réalisé » n'est pas la probabilité de $A \cap B$.
Reprenons l'exemple précédent :
- A est l'événement « un étudiant habite à Lyon ». On pose $P(A) = 1/2$.
- B est l'événement « un étudiant habite dans une maison ». C'est la probabilité inconnue que je cherche à évaluer.
- la probabilité qu'un étudiant habite dans une maison, sachant qu'il habite à Lyon est, *grosso modo*, la probabilité qu'un lyonnais habite dans une maison : $P_A(B) = 1/6$.
- Puis-je estimer $P(B)$? Il n'y a aucune raison pour le pense ! Il me manque des informations sur la partie caché de B, à savoir « la probabilité que B est réalisé sachant que A n'est pas réalisé ».

Peut-on trouver un lien entre $P(A \cap B)$ et $P_A(B)$? Réfléchissons en terme de proportions. S'il y a N étudiants en tout, N_A vivant à Lyon, N_B dans une maison, etc. Alors

$$P(A) = \frac{N_A}{N} \qquad \text{et} \qquad P_A(B) = \frac{N_{A\cap B}}{N_A}$$

donc on a la relation

$$P(A \cap B) = \frac{N_{A\cap B}}{N} = \frac{N_{A\cap B}}{N_A}\frac{N_A}{N} = P(A \cap B)P(A)$$

Attention ! Retenez bien ce type de raisonnement : c'est la connaissance de la probabilité de B conditionnée par A qui nous amène à la probabilité de $A \cap B$, et pas l'inverse !

IV.2 — Définition

Définition 4.1 — Probabilité conditionnée à un événement
Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé, et A un événement tel que $P(A) \neq 0$.
La probabilité sachant que A est réalisé est définie par

$$\forall B \subset \Omega, \qquad P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

DÉM. On vérifie que P_A est bien une probabilité :
- $P_A(\Omega) = P(A \cap \Omega)/P(A) = P(A)/P(A) = 1$;
- Si B et B' sont deux événements disjoints

$$\begin{aligned} P_A(B \cup B') &= \frac{P(A \cap (B \cup B'))}{P(A)} = \frac{P\big((A \cap B) \cup (A \cap B')\big)}{P(A)} \\ &= \frac{P(A \cap B) + P(A \cap B'))}{P(A)} \\ P_A(B \cup B') &= P_A(B) + P_A(B') \end{aligned}$$

□

Exemple Je lance deux dés à 6 faces parfaitement équilibrés, que je cache tout de suite avec la main. Je vous demande : « quelle est la probabilité d'obtenir un 6 » ?
On a vu que l'univers adapté à cette expérience est $\Omega = [\![1 ; 6]\!]^2$ muni de l'équiprobabilité. Dans cet univers 11 résultats contiennent un 6 : les 5 résultats $(i, 6)_{1 \leqslant i \leqslant 5}$, les 5 résultats symétriques $(6, i)_{1 \leqslant i \leqslant 5}$ et le double 6. Comme il y a 36 résultats en tout, la probabilité d'obtenir un 6 est donc ici $11/36$.
Maintenant je découvre un des deux dés cachés : il porte le chiffre 3. Quelle est alors la probabilité que l'autre porte un 6 ?
La réponse $1/6$ semble s'imposer dans ce cas. En effet, tout dé lancé donne 6 avec la probabilité $1/6$. Est-ce que la formule de la probabilité conditionnelle confirme cette hypothèse ?
Notons S « obtenir un 6 » et T « obtenir un trois ». On cherche à calculer $P_T(S)$, qui vaut

$$P_T(S) = \frac{P(S \cap T)}{P(T)} = \frac{2/36}{11/36} = \frac{2}{11}$$

Surprise ! Le raisonnement exact est plutôt le suivant : l'univers dans lequel un des dés donne 3 contient 11 résultats équiprobables, dont 2 résultats avec un 6, ce qui justifie la valeur $2/11$ trouvée. Ces univers sont représentés sur la figure I.1.

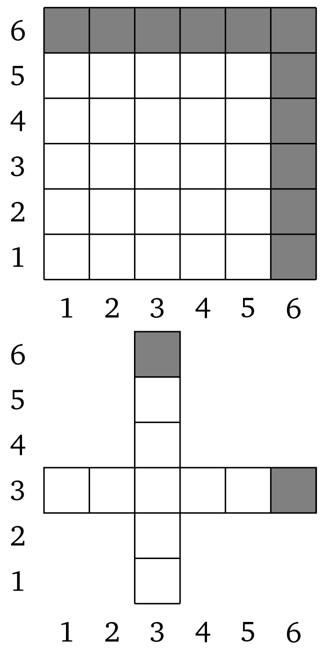


FIGURE I.1 — *En haut l'univers* Ω*, en bas l'univers dans lequel un des deux dés porte un* 3. *L'événement « obtenir un* 6 *» est en gris dans les deux cas.*

IV.3 — Évènement indépendants

On dit que deux événements A et B sont indépendants quand, lorsqu'on est placé dans l'univers ou l'un des deux est réalisé, la probabilité de l'autre ne varie pas. Si par exemple $P(A) \neq 0$

$$P_A(B) = P(B) \quad \Longrightarrow \quad P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Cette dernière égalité, qui ne nécessite pas de supposer $P(A) \neq 0$ est utilisée dans la définition.

Définition 4.3 — Couple d'événements indépendants
Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ *un espace probabilisé.*
Deux événements A *et* B *sont indépendants si et seulement si*

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Attention ! L'indépendance de deux événements est une propriété calculatoire ! On ne peut pas prévoir *a priori* si deux événements sont indépendants.
C'est pourquoi, la plupart du temps, l'indépendance est une hypothèse du modèle.

Exemple

- naissance de n drosophiles, on regarde les mâles et les femelles. On suppose que l'une soit mâle ou femelle ne dépend pas du sexe des autres.
- dans une famille de deux enfants, on considère les deux événements A : « il y a une fille et un garçon » et B : « il y a une fille » et C : « l'aîné est une fille ».
  En supposant que les 4 situations sont équiprobables : $P(A) = 1/2$, $P(B) = 3/4$ et $P(C) = 1/2$.
  On constate que $P(A \cap B) = P(A) = 1/4$, donc A et B ne sont pas indépendants.
  Par ailleurs $P(A \cap C) = 1/4 = P(A)P(C)$ donc A et C sont indépendants.

Définition 4.5 — Indépendance deux à deux, mutuelle
Soit A_1, A_2, ... A_n une suite de n événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$. Ces événements sont mutuellement indépendants si et seulement si

$$\forall \{i_1, i_2, \ldots, i_r\} \subset [\![1 \,;\, n]\!], \qquad P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_r}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_r})$$

L'indépendance mutuelle entraîne l'indépendance deux à deux, mais la réciproque est fausse.

Exemple On lance une pièce parfaitement équilibrée deux fois. Les événements A « obtenir deux résultats différents », B « obtenir « Face » au premier lancer » et C « obtenir « Pile » au second lancer » sont deux à deux indépendants mais pas mutuellement indépendants.

L'énonce fastidieux du résultat suivant cache en fait une propriété d'une grande simplicité.

Propriété 4.7 — *Soit A_1, A_2, ... A_n une suite de n événements mutuellement indépendants. Soit $i \in [\![1 \,;\, n-1]\!]$, B un événement pouvant s'écrire comme réunion ou intersection des A_j ou de leur contraire pour $1 \leqslant j \leqslant i$ et soit C un événement pouvant s'écrire comme réunion ou intersection des A_j ou de leur contraire pour $i+1 \leqslant j \leqslant n$.*
Alors B et C sont indépendants.

V — Trois formules essentielles

V.1 — Formule des probabilités composées

Cette formule permet de calculer la probabilité d'une succession d'événements.

Théorème 5.1 — Formule des probabilités composées

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé et soit $A_1, A_2, \dots, A_n$ une suite d'événements tels que $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_{n-1}) \neq 0$:

$$P\left(A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_n\right) = P_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_{n-1}}\left(A_n\right) \times P_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_{n-2}}\left(A_{n-1}\right) \times \cdots \times P_{A_1}\left(A_2\right) P\left(A_1\right)$$

Dém. Nécessité de l'hypothèse : soit $j \in [\![1 ; n-2]\!]$. Puisque

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_{n-1} \subset A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_j$$

on a
$$P\left(A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_{n-1}\right) \leqslant P\left(A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_j\right)$$

donc
$$0 < P\left(A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_j\right)$$

ce qui justifie que la probabilité conditionnée par $A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_j$ est bien définie. Ensuite il suffit de l'écrire !

$$\begin{aligned} & P_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_{n-1}}(A_n) \times P_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_{n-2}}(A_{n-1}) \times \cdots \times P_{A_1}(A_2) P(A_1) \\ & = \frac{P\left(A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_{n-1} \cap A_n\right)}{P\left(A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_{n-1}\right)} \times \frac{P\left(A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_{n-1}\right)}{P\left(A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_{n-2}\right)} \times \cdots \times \frac{P\left(A_1 \cap A_2\right)}{P(A_1)} P(A_1) \\ & = P\left(A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_n\right) \quad \square \end{aligned}$$

Exemple Une urne contient 40 boules dont 17 blanches et 23 noires. On tire successivement et sans remise 5 boules de l'urne.
– Probabilité que les 4 premières soient noires ?
– Probabilité que la cinquième est noire, sachant que les 4 premières le sont ?

V.2 — Formule des probabilités totales

Définition 5.3 — Système complet d'événements
On appelle système complet d'événement un p–uplet d'événements $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ de probabilité non nulle, deux à deux disjoints et dont l'union est égale à Ω :

- $\forall i \in [\![1 ; p]\!], \qquad P(A_i) \neq 0$;
- $\forall (i,j) \in [\![1 ; p]\!]^2, i \neq j \qquad A_i \cap A_j = \varnothing$;
- $\bigcup_{i=0}^{p} A_i = \Omega$.

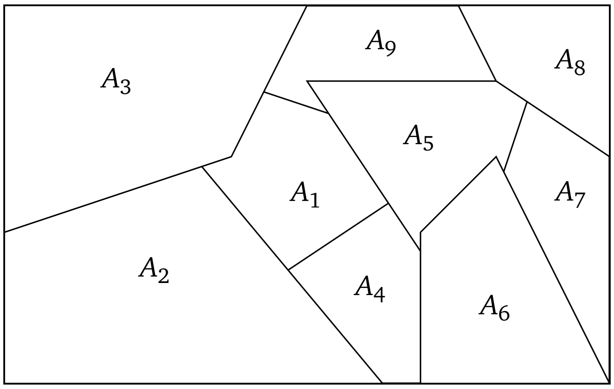


FIGURE I.2 — *Représentation d'un système complet d'événement.*

Un système complet d'événements est aussi une partition de Ω. Des exemples de systèmes complets d'événements :

Exemple

– Tirage d'une boule au loto : A_k est l'événement « la boule est comprise entre $10k+1$ et $10k$ » ;
– Soit n urnes $U_1, U_2, \ldots, U_n$. L'urne U_k contient k boules blanches et $n-k$ boules noires. L'expérience consiste à choisir une urne et à tirer une boule au hasard dans cette urne. On prend pour A_k : « choisir l'urne k ».

Cette fois–ci, on veut calculer la probabilité d'un événement qui peut arriver de plusieurs manières différentes. On connaît cependant toutes les manières différentes qui peuvent amener à cet événement.

Exemple A Trois urnes U_1, U_2 et U_3 contiennent respectivement
– pour la première 10 boules blanches et 30 noires ;
– pour la seconde 20 boules blanches et 40 noires ;
– pour la troisième 4 boules blanches et 6 noires ;
On choisit une urne au hasard, puis on y tire une boule au hasard.
Quelle est la probabilité de tirer une boule noire ?
Ici l'idée naturelle consiste à « conditionner par » le choix de l'urne. En effet les probabilités « sachant qu'on tire dans telle ou telle urne » sont connues.

Théorème 5.5 — Formule des probabilités totales
Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ *un espace probabilisé et soit* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *un système complet d'événements.*

$$\forall B \subset \Omega, \qquad P(B) = \sum_{k=1}^{n} P_{A_k}(B) P(A_k)$$

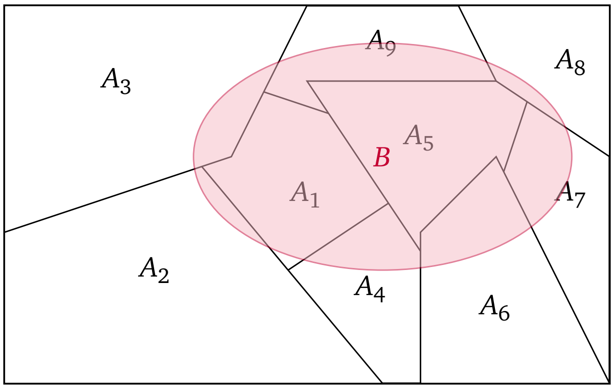


FIGURE I.3 — *Représentation d'un système complet d'événement.*

Exemple B
Avec des notations transparentes, on a

$$P(U_1) = P(U_2) = P(U_3) = \frac{1}{3}$$

$$P_{U_1}(B) = 1/4 \qquad P_{U_2}(B) = 1/3 \qquad P_{U_3}(B) = 2/5$$

Par application de la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned} P(B) &= P_{U_1}(B)P(U_1) + P_{U_2}(B)P(U_2) + P_{U_3}(B)P(U_3) \\ &= \frac{1}{4}\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\frac{1}{3} + \frac{2}{5}\frac{1}{3} = \end{aligned}$$

Exemple C Trois joueurs jouent aux fléchettes. On choisit équiprobablement celui qui va jouer. Le premier, A, atteinte la cible avec la probabilité $2/3$, le second avec la probabilité $1/2$ et le dernier avec la probabilité $1/4$. Quelle est la probabilité que la cible soit atteinte ?
Si elle n'est pas atteinte, le joueur A joue. Quelle est la probabilité que le joueur A atteigne la cible à ce petit jeu ?

V.3 — Formule de Bayes

C'est la « formule à remonter dans le temps ».

Théorème 5.6 — Formule de Bayes
Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé et soit A et B deux événements de probabilités non nulles. On a

$$P_A(B) = \frac{P(B)}{P(A)} P_B(A)$$

Exemple D Au jeu de fléchettes précédent, la cible est atteinte. Probabilité que ce soit le joueur B qui l'ait atteinte ? Que ce soit le joueur A ?